# 5 Eksponencijalne i logaritamske funkcije

*potres u San Franciscu 1906. godine*

*Dosad smo u matematici upoznali više funkcija. Nekima od njih, a takve su primjerice polinomi prvog i drugog stupnja, vrijednosti možemo izračunati s pomoću četiri osnovne računske operacije te operacija potenciranja i korjenovanja. Takve se funkcije zovu* ***algebarske****.*

*U ovom poglavlju srest ćemo se s dvjema novim funkcijama, eksponencijalnom i logaritamskom koje prelaze te okvire jer se njihove vrijednosti ne mogu izračunati na opisani način. Takve se funkcije zovu* ***transcedentne****.*

*Eksponencijalna i logaritamska funkcija značajne su pri analizi i opisivanju nekih važnih prirodnih i društvenih pojava i fenomena. Za uvod odabrali smo jedan sasvim jednostavan primjer.*

## 5.1. Eksponencijalna funkcija

Cijena rabljenog automobila ovisi o više čimbenika od kojih je vrlo bitna godina proizvodnje, odnosno starost automobila. Svake se godine vrijednost nekog automobila umanjuje za 25 % u odnosu na prethodnu.

Ako je kao nov automobil stajao 15 000 eura, kolika mu je vrijednost nakon $n$ godina?

Označimo s $C_0 = 15\,000$ cijenu novog automobila. Nakon godinu dana ($n = 1$) vrijednost automobila umanji se za 25 % i iznosi

$$\begin{aligned} C_1 &= C_0 - C_0 \cdot 0.25 \\ &= C_0(1 - 0.25) \\ &= C_0 \cdot 0.75 \\ &= 11\,250 \text{ eura.} \end{aligned}$$

Nakon još jedne godine automobilu cijena ponovno padne za 25 % i iznosi

$$C_2 = C_1 - C_1 \cdot 0.25 = C_1(1 - 0.25) = C_1 \cdot 0.75 = C_0 \cdot 0.75^2 = 8437.5 \text{ eura.}$$

Analogno računamo dalje te je

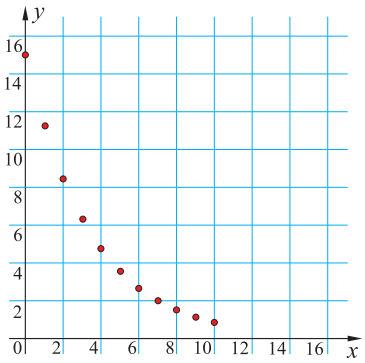
$$C_3 = C_0 \cdot 0.75^3 = 6328 \text{ eura itd.}$$

Cijena automobila funkcija je vremena i možemo je zapisati u sljedećem obliku:

$$C_n = 15\,000 \cdot (0.75)^n.$$

Prikažimo račun tablicom u kojoj je s $n$ označen broj godina, a s $C_n$ vrijednost automobila nakon $n$ godina izražena u tisućama eura. Primijetite da pri ispisivanju tablice rabimo sljedeću činjenicu: ako je $C_n$ cijena automobila nakon $n$ godina, tada je cijena sljedeće godine $C_n \cdot 0.75$.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_n$ | 15 | 11.250 | 8.438 | 6.328 | 4.746 | 3.560 | 2.7 |




Podatke iz tablice uz još nekoliko dodanih možemo zapisati u obliku uređenih parova $(n, C_n)$ te pridružene im točke ucrtati u koordinatni sustav. Što primjećujete? Opišite taj graf.

Naravno da ima smisla pitati i za cijenu automobila starog 3.5 godina ili 75 mjeseci i sl. Jer ipak je razdoblje od primjerice pola godine značajno u životu automobila. No doći ćemo do odgovora i na ovakva pitanja.

Opisani primjer uvodi nas u obradu jedne vrlo važne funkcije, **eksponencijalne funkcije**.

Kakva su očekivanja o duljini životnog vijeka neke osobe? Kojom se brzinom širi neka zarazna bolest? Koliko se komaraca može očekivati u nekom močvarnom području tijekom ljeta? Koliko vremena treba proći kako bi alkoholizirani vozač bio spreman za vožnju? Što znači da je neki potres jačine 5 stupnjeva po Richterovoj ljestvici? Eksponencijalna funkcija daje odgovore na ova, ali i mnoga druga pitanja.

## Ponovimo: Potencije i njihova svojstva

U prvom smo razredu upoznali potencije čiji su eksponenti cijeli ili racionalni brojevi.

Ako je $a > 0$ realan, a $n$ prirodan broj, onda je

$$a^2 = a \cdot a, \quad a^3 = a \cdot a \cdot a = a^2 \cdot a \cdot \ldots \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ puta}} = a^{n-1} \cdot a.$$

Broj $a$ je **baza**, a broj $n$ **eksponent** potencije $a^n$.

Iz definicije neposredno slijede osnovna svojstva potencija.

**Svojstva potencija**

$(\mathbf{E_1})$ $\quad a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$(\mathbf{E_2})$ $\quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$

$(\mathbf{E_3})$ $\quad (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$.

Potom smo uveli potencije čiji je eksponent negativan cijeli broj

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$

pri čemu je $a > 0$ i $n \in \mathbf{N}$.

Nadalje, uz primjenu svojstva $(\mathbf{E_1})$ vrijedi:

$$a^0 = a^{n-n} = a^n \cdot a^{-n} = a^n \cdot \frac{1}{a^n} = 1.$$

Ovo ćemo važno svojstvo potencija također posebno istaknuti:

**Potenciranje nulom**

$$(\mathbf{E_4}) \qquad a^0 = 1\,.$$

Potenciranje pozitivnog broja $a$ recipročnim brojem prirodnog broja $n$ povezali smo s korijenom broja $a$:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Zatim smo uveli pojam potencije čija je baza $a$ pozitivan broj, a eksponent bilo koji racionalan broj. Ako je $x = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, tada stavljamo:

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Računanje s ovakvim potencijama posjeduje sva svojstva $(\mathbf{E_1})-(\mathbf{E_4})$.

Tako smo definirali potenciju $a^x$ za sve pozitivne brojeve $a$ te racionalne brojeve $x$.

## Eksponencijalna funkcija

Ako je $a$ zadana baza, $a > 0$ i $a \neq 1$, a $x$ bilo koji racionalan broj, onda vrijednost potencije $a^x$ ovisi o $x$. Možemo govoriti o funkciji koja racionalnom broju $x$ pridružuje vrijednost potencije $a^x$,

$$x \mapsto a^x.$$

Definicija te funkcije može se proširiti i na realne brojeve te je za svaki realni broj $x$ definirana funkcija

$$f(x) = a^x,$$

koju zovemo **eksponencijalna funkcija**.

**Primjer 1.**

Funkcija $f(x) = 3^x$ primjer je eksponencijalne funkcije. Za realni broj $x$ vrijednost funkcije je $3^x$.

Tako je

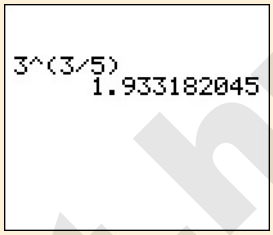
$$f(3) = 3^3 = 27, \qquad f(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{9}, \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

U svakom od triju primjera umjesto $x$ uvrštavali smo samo probrane brojeve. Jer općenito, bez pomoći džepnog računala ili tablica nije moguće izračunavati vrijednosti potencije $3^x$.

Koliko je, primjerice, $f\left(\frac{3}{5}\right)$? Odnosno, koliko je $3^{\frac{3}{5}}$?

$$3^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{3^3} = \sqrt[5]{27}.$$

Vrijednosti funkcije $f(x) = 3^x$ (i ne samo nje) u pravilu se određuju džepnim računalom. Kako, o tome će još biti riječi. No primijetite kako je na slici džepnim računalom dobiveno $3^{\frac{3}{5}} \approx 1.933182045$.




**Eksponencijalna funkcija**

Neka je $a > 0$ i $a \neq 1$ realan broj. Funkcija $f(x) = a^x$ definirana za svaki realni broj $x$ zove se **eksponencijalna funkcija**.

Zašto se zahtijeva da baza potencije bude pozitivan broj? Ako bismo dopustili da je baza negativan broj, tada potencije kao što su $(-2)^{-\frac{1}{4}}$, $(-3)^{\frac{3}{8}}$ i slične ne bi bile realni brojevi.

Ako bi pak baza bila jednaka nuli, tada bi vrijedilo $0^x = 0$ za svaki realni broj $x$ osim za $x = 0$, kada ta potencija nije definirana.

Jednako tako je $1^x = 1$ za svaki realni broj $x$. Dakle, funkcija $f(x) = 1^x = 1$ je konstanta pa je zbog toga uvedeno i ograničenje $a \neq 1$.

**Zadatak 1.** Ako je dana eksponencijalna funkcija $f(x) = 4^x$, koliko je: $f(2)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(-\frac{3}{2}\right)$, $f(0)$, $f(0.25)$?

Neka je baza eksponencijalne funkcije $a > 1$.

Tada za svaki pozitivan racionalni eksponent $x > 0$ vrijedi $a^x = a^{\frac{m}{n}} > 1$. Naime, $a^x = \sqrt[n]{a^m}$, a kako je $a^m > 1$, onda je i $\sqrt[n]{a^m} > 1$.

Uzmimo da je $x_1 < x_2$. Uz primjenu svojstva $(\mathbf{E_1})$ imamo:

$$a^{x_2} = a^{(x_2 - x_1) + x_1} = a^{x_2 - x_1} \cdot a^{x_1} > a^{x_1},$$

jer je $x_2 - x_1 > 0$ i $a^{x_2 - x_1} > 1$.

Time smo dokazali i sljedeće *svojstvo monotonosti eksponencijalne funkcije*.

**Monotonost eksponencijalne funkcije**

$(\mathbf{E}_5)$ Ako je $a > 1$, onda za racionalne brojeve $x_1 < x_2$ vrijedi $a^{x_1} < a^{x_2}$.

# Zadatci 5.1.

**1.** Obrazloži svojstva potencija $(\mathbf{E_1})-(\mathbf{E_3})$ za slučaj kada su $x$ i $y$ prirodni brojevi.

**2.** Zapiši u obliku potencije:

**1)** $10 \cdot 100^2 \cdot 1000^3$; **2)** $(9^3 \cdot 3 \cdot 27^2)^3$;
**3)** $(16 \cdot 4^3 \cdot 8^2)^5$; **4)** $3^7 + 6 \cdot 3^6$;
**5)** $9 \cdot 27^3 + 2 \cdot 3^{11}$; **6)** $2^6 \cdot 5^4 + 6 \cdot 10^4$.

**3.** Zapiši u obliku potencija s osnovicom $a$:

**1)** $(a^{n+1})^2 \cdot (a^{2n+1})^2 \cdot (a^{3n+1})^2$;
**2)** $(a^{3n-1})^2 \cdot (a^{3n-1})^3 \cdot (a^{3n-1})^4$;
**3)** $(a^3)^{2n+1} \cdot (a^4)^{2n+1} \cdot (a^5)^{2n+1}$;
**4)** $(a^{n+2})^3 \cdot (a^{n+1})^3 \cdot (a^n)^3$;
**5)** $a^{n+1} \cdot (a^{n+1})^2 \cdot (a^{n+1})^3$.

**4.** Izračunaj:

**1)** $4^{3n+2} : 8^{2n+1}$; **2)** $36^{n+3} : 6^{2n+5}$;
**3)** $9^{3n+2} : 27^{2n+2}$; **4)** $\dfrac{3^{2n-4} \cdot 7^{n-1}}{63^{n-1}}$;
**5)** $\dfrac{28^{n+2}}{2^{2n+4} \cdot 7^{n-1}}$; **6)** $\dfrac{36^{2n+1}}{16^n \cdot 3^{4n}}$.

**5.** Izračunaj:

**1)** $\left(\dfrac{8a^{-3}}{b^{-2}}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{b}{8a^{-2}}\right)^3$;
**2)** $\left(\dfrac{25}{a^{-2}b}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{5a^3}{b^2}\right)^{-2}$;
**3)** $(4x^2y^{-3})^3 : \left(\dfrac{1}{16x^3y^{-1}}\right)^{-2}$;
**4)** $\left(\dfrac{0.25x^3y^{-2}}{27z^{-2}}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{9x^{-2}}{4y^2z^3}\right)^{-3}$;
**5)** $\left(\dfrac{9a^{-2}}{16b^3c^{-1}}\right)^{-3} : \left(\dfrac{8a^3c^{-2}}{27b^{-5}}\right)^2$.

**6.** Provedi naznačene računske operacije i rezultat izrazi u znanstvenom zapisu:

**1)** $9.1 \cdot 10^{-5} + 5.2 \cdot 10^{-5}$;
**2)** $6.9 \cdot 10^8 + 7.8 \cdot 10^9$;
**3)** $3.5 \cdot 10^{-4} \cdot 7.6 \cdot 10^{-4}$;
**4)** $5.5 \cdot 10^{-4} \cdot 9.2 \cdot 10^{-5}$;
**5)** $7.4 \cdot 10^8 : 1.2 \cdot 10^{11}$;
**6)** $6.6 \cdot 10^{-10} : 4.4 \cdot 10^{-15}$.

**7.** Izračunaj:

**1)** $(-125)^{-3} \cdot (-25)^{-4}$;
**2)** $(-4)^{-4} \cdot (-8)^{-3}$;
**3)** $(-9)^{-3} : \left(-\dfrac{1}{27}\right)^{-3}$;
**4)** $(-0.1)^{-4} : (-100)^{-3}$;
**5)** $-10^{-3} \cdot (-0.1^{-2})^3 \cdot (-0.01^{-3})^{-2}$;
**6)** $-\dfrac{1}{100^{-2}} \cdot \dfrac{1}{0.01^3} \cdot \dfrac{10^{-2}}{0.001^2}$.

**8.** Otisak ovog udžbenika ima rezoluciju od 2400 točaka po inču. Koliko točaka ima na stranici dimenzije $20 \times 24$ cm? Izrazi rezultat u znanstvenom zapisu.

**9.** Za koliko će vremena svemirski brod koji putuje brzinom od $1.5 \cdot 10^5$ km/h prijeći put od $4.5 \cdot 10^{12}$ km?

**10.** Brzina svjetlosti je $3 \cdot 10^8$ metara u sekundi. Ako je udaljenost Sunca od Zemlje 93 milijuna milja (1 milja = 1.6 km), za koliko će vremena svjetlost sa Sunca stići do Zemlje?

**11.** Ako je masa atoma vodika $1.7 \cdot 10^{-24}$ grama, koliko je atoma vodika u masi od jednog kilograma?

**12.** Izračunaj:

**1)** $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$; **2)** $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$;
**3)** $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{3}$; **4)** $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{9}$;
**5)** $\sqrt[3]{9} : \sqrt{3}$; **6)** $\sqrt[4]{8} : \sqrt[3]{4}$;
**7)** $\sqrt{5 \cdot \sqrt{5}}$; **8)** $\sqrt{4 \cdot \sqrt[3]{4}}$.

**13.** Izračunaj:

**1)** $\sqrt{\sqrt[5]{x^3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[5]{x^3}}$; **2)** $\sqrt[3]{\sqrt{x^9}} \cdot \sqrt{\sqrt{x^6}}$;
**3)** $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^8}} : \sqrt[9]{\sqrt{x^3}}$; **4)** $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}} : \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^4}}$.

**14.** Pojednostavni:

**1)** $(\sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x}} : \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}) \cdot \sqrt[3]{x^2}$;
**2)** $(\sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x^2}} : \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}) \cdot \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[4]{x}}$;
**3)** $(\sqrt[3]{x \cdot \sqrt[n]{x^5}})^3 : (\sqrt[n]{x^2 \cdot \sqrt{x}})^2$;
**4)** $(\sqrt[n]{x \cdot \sqrt[3]{x}})^3 : (\sqrt{x \cdot \sqrt[n]{x^4}})^2$.

**15.** Zapiši u obliku potencije:

**1)** $\sqrt[3]{4}$; **2)** $\sqrt[4]{27}$; **3)** $\dfrac{2}{\sqrt[5]{8}}$;

**4)** $\dfrac{1}{\sqrt{125}}$; **5)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{8^3}}$; **6)** $\sqrt[4]{\dfrac{1}{2^5}}$;

**7)** $\sqrt[3]{(a-2)^2}$; **8)** $\sqrt[4]{a^2-b^2}$.

**16.** Zapiši s pomoću korijena sljedeće potencije:

**1)** $2^{-\frac{1}{2}}$; **2)** $3^{-1.5}$;

**3)** $5^{\frac{2}{3}}$; **4)** $(a^{\frac{1}{2}}-1)^{\frac{1}{2}}$;

**5)** $(a^2-1)^{\frac{2}{3}}$; **6)** $a^{\frac{1}{4}}\cdot b^{-\frac{3}{4}}$.

**17.** Izračunaj:

**1)** $81^{\frac{1}{2}}$; **2)** $81^{-\frac{1}{4}}$;

**3)** $0.0625^{\frac{1}{4}}$; **4)** $32^{\frac{1}{5}}+(-8)^{\frac{1}{3}}$;

**5)** $\sqrt[10]{32^2}$; **6)** $\sqrt[3]{(-2)^3}$.

**18.** Izračunaj:

**1)** $0.25^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0.5}$;

**2)** $0.04^{-1.5}\cdot\left(\dfrac{1}{125}\right)^{\frac{2}{3}}$;

**3)** $16^{0.5}+\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0.75}$;

**4)** $(0.81)^{-0.5}+\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

**5)** $\left(\dfrac{16}{25}\right)^{-\frac{3}{2}}-(0.064)^{-\frac{2}{3}}$;

**6)** $27^{-\frac{2}{3}}-\left(5\dfrac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$.

**19.** Izračunaj vrijednost brojevnog izraza

$$\left[(a^{-\frac{1}{3}}b)^{-1.5}\ :\ (a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{4}}\right]^{-\frac{1}{3}},$$

za $a=16$, $b=\dfrac{8}{27}$.

**20.** Izračunaj vrijednost brojevnog izraza

$$\left[(a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{-2})^{0.75}\ :\ (a^{-\frac{1}{2}}\cdot b^{3})^{-\frac{1}{2}}\right]^{-3},$$

za $a=\dfrac{16}{81}$, $b=0.01$.

**21.** Izračunaj vrijednost brojevnog izraza

$$\left[(a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{-2})^{-\frac{1}{2}}\ :\ (ab^{-3})^{\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{3}{4}}$$

ako je $a=0.64$, $b=\dfrac{4}{25}$.

**22.** U kojem su međusobnom odnosu realni brojevi $m$ i $n$, ako je

**1)** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^m>\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$; **2)** $2^m>2^n$;

**3)** $0.2^m<0.2^n$; **4)** $4^m=4^n$;

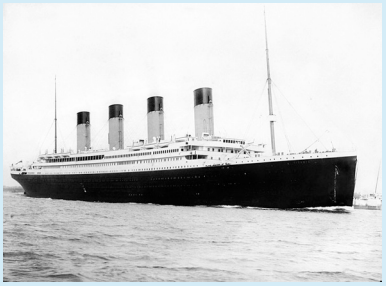
**5)** $\left(\dfrac{4}{3}\right)^m<\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$; **6)** $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^m>\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$;

**7)** $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^m<\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^n$; **8)** $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^m>\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^n$?

**23.** Formulom $v=6.5p^{1/7}$ izražava se ovisnost brzine broda u čvorovima o snazi $p$ brodskog motora u konjskim snagama (1 čvor = 1.15 mi/h = 1.85 km/h).

**1)** Kako se brzo kreće brod čiji motor ima snagu od 600 KS?

**2)** Ako se snaga motora udvostruči, kojom će se brzinom kretati brod?



**3)** Brzina Titanika pri udaru o santu bila je 18.5 čv. Kolikom su snagom u tom trenutku radili motori?

**24.** D. Dubois i E. F. Dubois objavili su u časopisu *Archives of Internal Medicine* 1916. godine rad u kojem navode formulu za izračunavanje površine ljudskog tijela. Ta formula glasi:

$$P=0.007184m^{0.425}\cdot h^{0.725},$$

pri čemu je $P$ u kvadratnim metrima površina tijela, $m$ masa tijela u kilogramima, $h$ visina osobe u centimetrima.

Ako je masa neke osobe 70 kg, a visina 175 cm, kolika je površina njezina tijela? Izračunaj površinu svojega tijela.

# 5.2. Graf i svojstva eksponencijalne funkcije

Način na koji zapisujemo brojeve daje naslutiti kako će baza $a = 10$ imati posebnu ulogu u računanju potencija. Naime, dekadski zapis brojeva upravo se zasniva na računanju s potencijom broja $10$.

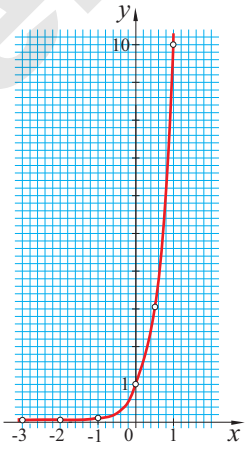
Promotrimo zato potencije oblika $10^x$.

## Graf funkcije $x \longmapsto 10^x$

Skicirajmo graf funkcije $f(x) = 10^x$. U tu ćemo svrhu izračunati njezine vrijednosti za nekoliko odabranih vrijednosti $x$.

| $x$ | $10^x$ |
|---|---|
| $-3$ | $10^{-3} = 0.001$ |
| $-2$ | $10^{-2} = 0.01$ |
| $-1$ | $10^{-1} = 0.1$ |
| $0$ | $10^0 = 1$ |
| $0.5$ | $10^{0.5} = \sqrt{10} = 3.16$ |
| $1$ | $10^1 = 10$ |
| $1.5$ | $10^{1.5} = \sqrt{1000} = 31.6$ |
| $2$ | $10^2 = 100$ |

Primijetimo da su vrijednosti funkcije u točkama $0.5$ i $1.5$ određene približno, jer su $\sqrt{10}$ i $\sqrt{1000}$ iracionalni brojevi.



*graf potencije* $10^x$

Vidimo da ova eksponencijalna funkcija raste vrlo brzo za pozitivne brojeve $x$. Crtano u mjerilu $1:1$, za $x = 10$ cm koordinata $y$ iznosi $10^{10}$ cm $= 10^5$ km. Za negativne argumente $x$ funkcija pada prema nuli, također vrlo brzo. Njezin se graf priljubljuje uz negativni dio $x$-osi. Kažemo da je $x$-os **asimptota** grafa eksponencijalne funkcije.

## Graf funkcije $10^x$ u različitim mjerilima

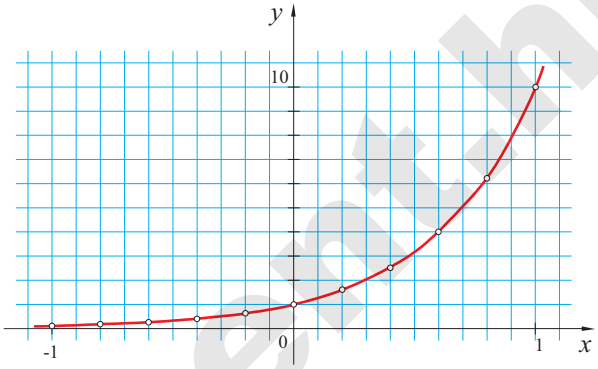
Grafove funkcija koje rastu vrlo brzo možemo lakše predočiti tako da upotrijebimo različita mjerila na koordinatnim osima. Nacrtajmo sad graf eksponencijalne funkcije $10^x$ na intervalu $[-1, 1]$ izabravši jedinice na koordinatnim osima tako da jednoj jedinici na $x$-osi odgovara deset jedinica na $y$-osi.

Pritom ćemo s pomoću džepnog računala izračunati vrijednosti eksponencijalne funkcije u racionalnim točkama. Broj $10^x$ računa se na džepnom računalu na sljedeći način:

- unese se vrijednost broja $x$
- pritisne se tipka $10^x$ .

Dobivene ćemo vrijednosti zapisati dvjema znamenkama.

| $x$ | $10^x$ |
|---|---|
| $-1$ | 0.1 |
| $-0.8$ | 0.16 |
| $-0.6$ | 0.25 |
| $-0.4$ | 0.40 |
| $-0.2$ | 0.63 |
| 0 | 1 |
| 0.2 | 1.6 |
| 0.4 | 2.5 |
| 0.6 | 4.0 |
| 0.8 | 6.3 |
| 1 | 10 |




*Graf funkcije* $10^x$ *nacrtan je u mjerilu* $10:1$.

Nacrtan je graf funkcije koja je definirana za svaki realni broj $x$, dakle i za svaki iracionalni broj. Provjerit ćemo je li ovaj postupak ispravan.

Izaberimo neki iracionalni broj, recimo $\sqrt{2}$. Zapisati ga možemo samo s određenom točnošću, jer je njegov decimalni zapis beskonačan. Ako računamo na dvije decimale, tada ćemo zapisati:

$$1.41 < \sqrt{2} < 1.42\,.$$

Želimo da svojstva eksponencijalne funkcije ostanu sačuvana. Zato po svojstvu $(\mathbf{E_4})$ mora vrijediti:

$$10^{1.41} < 10^{\sqrt{2}} < 10^{1.42},$$

odnosno:

$$25.70 < 10^{\sqrt{2}} < 26.30\,.$$

Ocjena je neprecizna jer funkcija $x \mapsto 10^x$ raste jako brzo, a uzeli smo grubu aproksimaciju broja $\sqrt{2}$. Popravimo je! Iz ocjene

$$1.41421 < \sqrt{2} < 1.41422$$

slijedi:

$$25.95434 < 10^{\sqrt{2}} < 25.95493.$$

Vidimo da smo dobili broj $10^{\sqrt{2}}$ s pet točnih znamenki $10^{\sqrt{2}} = 25.954\ldots$

Kad se broj $10^{\sqrt{2}}$ računa na džepnom računalu koje zapisuje brojeve s 10 znamenki, tada računalo koristi aproksimaciju

$$1.41421356237 < \sqrt{2} < 1.41421356238$$

(Prebrojite broj znamenki!), a na zaslonu se pokaže vrijednost

$$\boxed{2}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{10^x}\ \boxed{=} \qquad 25.95455352,$$

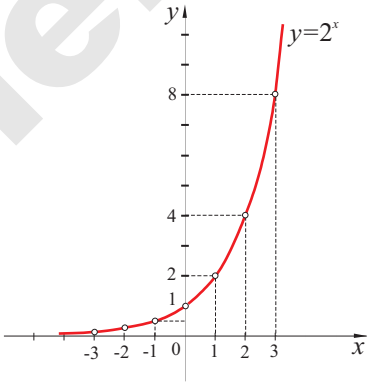
s deset točnih znamenki. Naravno, i ovo je samo približna vrijednost broja $10^{\sqrt{2}}$ jer je to iracionalan broj. Pri zapisivanju brojeva izračunanih na džepnom računalu, rezultate ćemo zaokruživati na 2–5 točnih znamenki.

Na ovakav način, koristeći racionalne eksponente, vrijednost potencije $10^x$ možemo s dovoljnom točnošću izračunati za svaki iracionalni broj $x$. Za to je dovoljno uzeti bliske decimalne brojeve $x_1$ i $x_2$ takve da vrijedi $x_1 < x < x_2$. Onda će biti: $10^{x_1} < 10^x < 10^{x_2}$.

## Graf eksponencijalne funkcije $x \mapsto a^x$

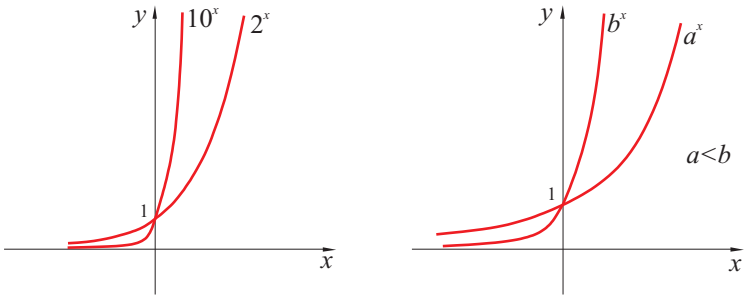
Baš kao za $a = 10$, možemo nacrtati graf funkcije $a^x$ za druge vrijednosti baze $a$. Nacrtajmo graf funkcije $f(x) = 2^x$.

| $x$ | $2^x$ |
|---|---|
| $-3$ | $\frac{1}{8}$ |
| $-2$ | $\frac{1}{4}$ |
| $-1$ | $\frac{1}{2}$ |
| $0$ | $1$ |
| $1$ | $2$ |
| $2$ | $4$ |
| $3$ | $8$ |




*graf funkcije* $2^x$

Vidimo da i ova funkcija ima graf sličan grafu funkcije $x \mapsto 10^x$, samo što ona za pozitivne realne brojeve $x > 0$ raste sporije, jer je $2^x < 10^x$ za $x > 0$. Za negativne brojeve $x$ vrijedi suprotna nejednakost: $2^x > 10^x$.




*usporedba grafova eksponencijalnih funkcija za razne vrijednosti baza* $a > 1$, $b > 1$

**Zadatak 1.** Nacrtaj graf funkcije $f(x) = 3^x$. Usporedi ga s grafovima funkcija $(x) = 10^x$ i $f(x) = 2^x$. Što možeš zaključiti?

Uz bazu 10, koja je važna zbog toga što računamo u dekadskom sustavu, te bazu 2, jer računala računaju u binarnom sustavu (sustavu s bazom 2), važna je i eksponencijalna funkcija čija je baza broj $e$. To je iracionalan broj s približnom vrijednošću

$$e = 2.718281828\ldots$$

Funkcija $f(x) = e^x$ ugrađena je u svako džepno računalo koje sadrži i ostale standardne funkcije. Njezina je tipka označena s $e^x$. Vrijednost broja $e$ možemo dobiti s pomoću $1$ $e^x$.

**Zadatak 2.** Provjeri:
$e^{1.5} \approx 4.4817, \quad e^3 \approx 20.0855, \quad e^{-0.25} \approx 0.7788, \quad e^{-1} \approx 0.3679.$

## Kutak plus

### BROJ $e$

Jednadžbe kao što su linearna $ax + b = 0$, kvadratna $ax^2 + bx + c = 0$ ili jednadžba 3. stupnja (kubna), gdje su koeficijenti racionalni brojevi zovu se **algebarske jednadžbe**.

Realni brojevi koji su rješenja takvih jednadžbi zovu se **algebarski brojevi**.

No postoje realni brojevi koji nisu rješenja niti koje algebarske jednadžbe. To su **transcedentni brojevi**. Broj $\pi$ je transcedentan broj. On nije rješenje nijedne algebarske jednadžbe. Dužinu čija je duljina transcedentan broj nije moguće konstruirati. Tako ne možemo konstruirati niti dužinu duljine $\pi$ i to je razlog zbog kojeg nije rješiv zadatak *kvadrature kruga* spomenut u 1. razredu.

Uz broj $\pi$ još se ističe jedan transcedentan broj, broj $e$.

Taj broj, čija je približna vrijednost $2.7182818284590$, kao baza eksponencijalne funkcije pojavljuje se u vrlo raznolikim prirodnim zakonima, kao što su razne vrste prirodnog prirasta. Nezaobilazne su takve funkcije i u optici, akustici, elektronici, dinamici itd.

Promatramo li niz brojeva koji dobijemo uvrštavanjem za $n$ redom prirodnih brojeva u izraz $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, sve smo bliži broju $e$ što dalje u tom nizu odmičemo.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to 2.7182818284590\ldots$$

Oznaku $e$ uveo je švicarski matematičar Leonhard Euler 1727. godine, vjerojatno inspiriran riječju *eksponent*. On je 1737. dokazao da je $e$ iracionalan, a da je transcedentan dokazao je 1873. Charles Hermite.

## Graf eksponencijalne funkcije s bazom $0 < a < 1$

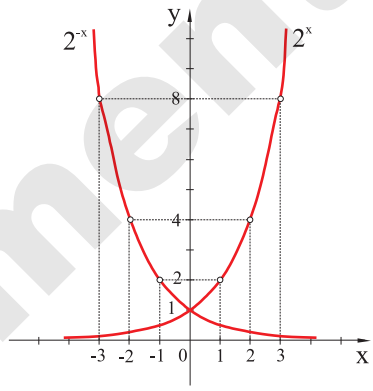
Sada ćemo promotriti eksponencijalnu funkciju s bazom $0 < a < 1$. Vidjet ćemo da se njezin graf može izvesti iz grafa eksponencijalne funkcije s bazom većom od 1, koju znamo nacrtati.

Započnimo s jednim primjerom. Uzmimo bazu $a = \frac{1}{2}$. Primijetimo da vrijedi:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}.$$

Nacrtajmo na istom koordinatnom sustavu grafove funkcija $f(x)=2^x$ i $g(x)=2^{-x}$.

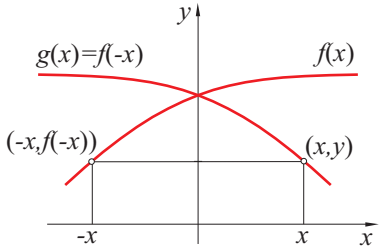
| $x$ | $2^x$ | $2^{-x}$ |
|---|---|---|
| $-3$ | $\frac{1}{8}$ | 8 |
| $-2$ | $\frac{1}{4}$ | 4 |
| $-1$ | $\frac{1}{2}$ | 2 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | $\frac{1}{2}$ |
| 2 | 4 | $\frac{1}{4}$ |
| 3 | 8 | $\frac{1}{8}$ |




*Grafovi funkcija $f(x) = 2^x$ i $g(x) = 2^{-x}$ simetrični su s obzirom na $y$-os.*

Primjećujemo da funkcije $f$ i $g$ poprimaju iste vrijednosti za brojeve suprotnih predznaka, jer vrijedi: $f(-x) = 2^{-x} = g(x)$. Zato su grafovi ovih funkcija simetrični s obzirom na $y$-os.

Objasnimo u kakvoj su vezi funkcije čiji su grafovi simetrični s obzirom na $y$-os.




*Zrcaljenjem oko $y$-osi dobiva se graf funkcije $g(x) = f(-x)$.*

Zrcalimo graf po volji odabrane funkcije $f$ oko $y$-osi. Time dobivamo graf neke funkcije; označimo je s $g$. Ako točka $(x, y)$ leži na njezinom grafu, tada je $y = g(x)$, ali isto je tako $y = f(-x)$, jer je graf dobiven zrcaljenjem (vidi sliku).

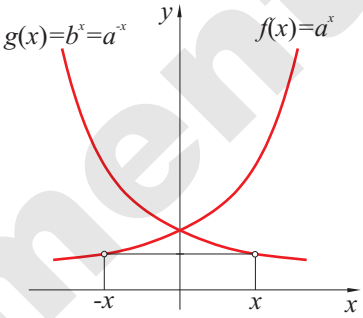
**Zrcaljenje grafa oko $y$-osi**

Zrcaljenjem grafa funkcije $f$ oko $y$-osi dobiva se graf funkcije $g(x) = f(-x)$.

Zrcalimo li graf eksponencijalne funkcije $f(x) = a^x$ oko $y$-osi, dobit ćemo graf eksponencijalne funkcije $g(x) = a^{-x}$:

$$g(x) = f(-x) = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x.$$

*Graf funkcije $g(x) = b^x$, $0 < b < 1$ simetričan je grafu funkcije $f(x) = a^x$, $a = \frac{1}{b}$ s obzirom na $y$-os. Funkcija $g(x) = b^x$ padajuća je funkcija. Pozitivan dio $x$-osi njezina je asimptota.*




**Zadatak 3.** Graf funkcije $f(x) = 2^x$ zrcalimo prema koordinatnim osima. Koje funkcije pripadaju zrcalnim slikama?

Proširi zaključivanje na graf bilo koje eksponencijalne funkcije i njezine zrcalne slike prema koordinatnim osima.

Možeš li provesti slično zaključivanje za translaciju grafa eksponencijalne funkcije u smjeru koordinatnih osi?

**Zadatak 4.** Poveži svaku od šest eksponencijalnih funkcija s bojom u kojoj je nacrtan njezin graf:

**1)** $f(x) = 4^x$ **a)** ●

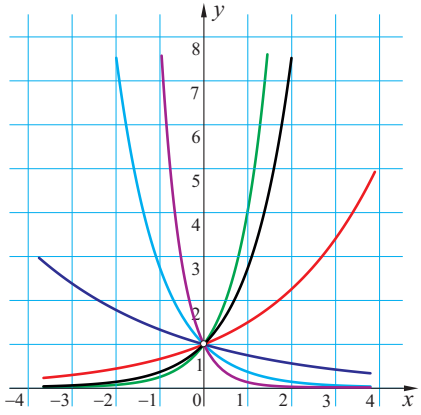
**2)** $f(x) = e^{-x}$ **b)** ●

**3)** $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ **c)** ●

**4)** $f(x) = (0.75)^x$ **d)** ●

**5)** $f(x) = \left(\frac{1}{8}\right)^x$ **e)** ●

**6)** $f(x) = e^x$ **f)** ●



Navedimo sada svojstva eksponencijalne funkcije:

**Svojstva eksponencijalne funkcije**

Eksponencijalna funkcija $x \mapsto a^x$ ima sljedeća svojstva:

1. Funkcija je definirana za svaki realni broj $x$.
2. Sve su vrijednosti funkcije pozitivni brojevi i svaki je pozitivan realni broj vrijednost funkcije za neki realni broj $x$.
3. $(\mathbf{E}_1)$ $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$,

   $(\mathbf{E}_2)$ $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$,

   $(\mathbf{E}_3)$ $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$.

   $(\mathbf{E}_4)$ $a^0 = 1$.

   $(\mathbf{E}_5)$ 1) Ako je $a > 1$, onda za $x_1 < x_2$ vrijedi $a^{x_1} < a^{x_2}$; funkcija je rastuća.
   2) Ako je $0 < a < 1$, onda za $x_1 < x_2$ vrijedi $a^{x_1} > a^{x_2}$; funkcija je padajuća.
4. Grafovi eksponencijalnih funkcija, čije su baze recipročni brojevi, simetrični su s obzirom na os $y$.
   Za svaki $a > 0$, $a \neq 1$ je $a^0 = 1$, a to znači da graf svake eksponencijalne funkcije prelazi os $y$ u točki $(0, 1)$.

## Injektivnost eksponencijalne funkcije

Iz svojstva $(\mathbf{E_5})$ slijedi sljedeći važan zaključak.

**Injektivnost eksponencijalne funkcije**

$(\mathbf{E_6})$ Ako je $a^{x_1} = a^{x_2}$, onda vrijedi $x_1 = x_2$.

Zaista, kad bi bilo $x_1 \neq x_2$, pa je, recimo, $x_1 < x_2$, onda se po svojstvu $(\mathbf{E_5})$ 1) ili $(\mathbf{E_5})$ 2) vrijednosti $a^{x_1}$ i $a^{x_2}$ također razlikuju. Vrijedi, dakle:

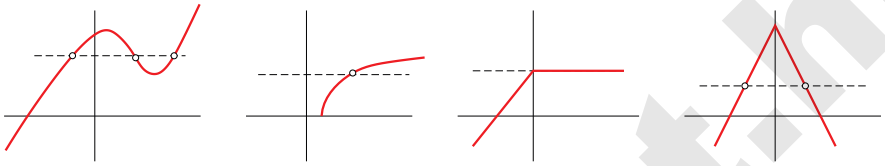
$$x_1 \neq x_2 \implies a^{x_1} \neq a^{x_2}.$$

Ova je tvrdnja ekvivalentna tvrdnji $(\mathbf{E_5})$. (Razmislite zašto!)

Primjerice, iz $2^x = 8$, tj. $2^x = 2^3$ nužno slijedi $x = 3$.

**Kriterij injektivnosti**

Funkcija $f$ je injektivna ako pravac paralelan s $x$-osi siječe njezin graf najviše u jednoj točki.



*Od četiriju funkcija čiji su grafovi skicirani, samo druga zadovoljava kriterij injektivnosti.*

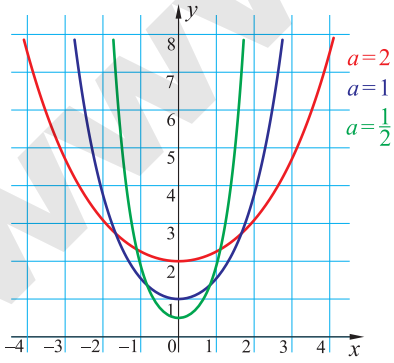
Dosad smo obradili više realnih funkcija: linearnu funkciju, funkciju apsolutne vrijednosti i kvadratnu funkciju. Jesu li te funkcije injektivne? Odgovor obrazložite.

## Kutak plus

### LANČANICA

Kad smo govorili o željezničkom mostu preko Save u Zagrebu, pretpostavili smo da njegov veliki luk ima oblik parabole. I općenito, skloni smo lukove na raznim mostovima gledati kao parabole. No je li to baš tako? Naime, lukovi većine mostova kružnog su oblika, neki su mostovi parabolični, a mnogi imaju oblik lančanice.

*pješački most u Osijeku*




**Lančanica** je krivulja čiji oblik poprima lanac kada ga prihvatimo za njegove krajeve i pustimo da slobodno visi. Na slici vidimo jednu lančanicu na pješačkom mostu preko Drave u Osijeku.

**Jednadžba lančanice** je

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

U toj je jednadžbi broj $e = 2.71828\ldots$ poznata matematička konstanta, $a$ je koeficijent koji utječe na oblik lančanice. Na slici su prikazane krivulje za $a = 2$, $a = 1$ i $a = \frac{1}{2}$.