5 Funkcije

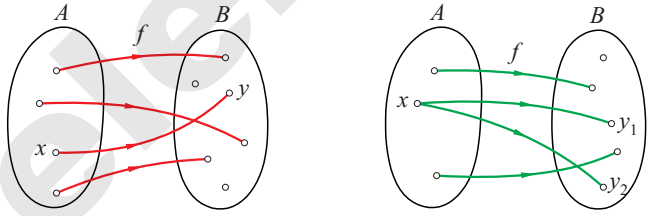
U dosadašnjem smo školovanju usvojili pojam funkcije (preslikavanja, pridruživanja) i upoznali mnoge primjere funkcija poput linearnih, kvadratnih, polinoma, racionalnih, trigonometrijskih, eksponencijalnih, logaritamskih i dr. Funkcije, uz brojeve, predstavljaju temeljni pojam matematike. U nastavku ćemo se baviti isključivo proučavanjem raznih svojstava funkcija i njihovim primjenama.

5.1. Zadavanje funkcije. Područje definicije

Pojam funkcije

Ako je svakom elementu x nekog skupa A pridružen točno jedan element y skupa B, tad kažemo da je definirano **preslikavanje** (**funkcija**) f iz skupa A u skup B. Pišemo $y = f(x)$. Element x naziva se još **argument** funkcije f, a y **vrijednost** te funkcije.

Da je elementu x pridružen y, zapisujemo još i simbolom: $x \mapsto y$ (čita se: x se preslikava u y).



Na slici je shematski prikaz funkcije (lijevo). Svakom elementu skupa A odgovara točno jedan element skupa B. Slika desno ne predstavlja funkciju, jer jednom elementu skupa A odgovara nekoliko elemenata skupa B.

Skup A zovemo **domenom** ili **područjem definicije** funkcije f i označavamo s $\mathcal{D}$ ili $\mathcal{D}_f$, a skup B zovemo **kodomenom** ili **područjem vrijednosti** funkcije f i označavamo s $\mathcal{R}$ ili $\mathcal{R}_f$.

Iako skupovi A i B mogu biti odabrani na mnogobrojne načine, mi ćemo promatrati u nastavku samo one funkcije za koje je domena i kodomena podskup skupa realnih brojeva. Takve funkcije zovemo **realnim funkcijama**.

Primjer 1.

Neka je $A = [1, 2]$ i $B = [3, 6]$. Preslikavanje koje elementu $x \in A$ pridružuje element $y = 3x \in B$ funkcija je definirana zakonom pridruživanja:

$$f(x) = 3x,$$

za koju je $\mathcal{D} = A$, $\mathcal{R} = B$.

Zadavanje funkcije

Realna funkcija f zadana je:

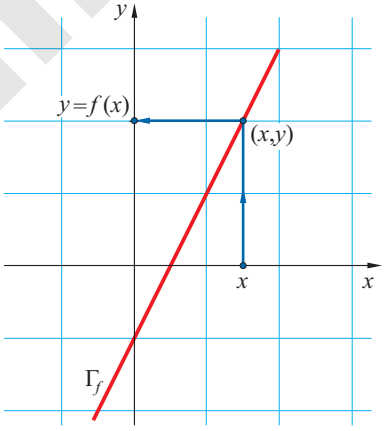
1. svojom domenom (područjem definicije) $\mathcal{D}$;
2. svojom kodomenom (područjem vrijednosti) $\mathcal{R}$;
3. zakonom pridruživanja $x \mapsto f(x)$.

Kad god je to moguće, funkcije ćemo prikazivati crtajući njihov graf Γ_f u Kartezijevu sustavu.

Graf funkcije

Graf Γ_f funkcije f skup je svih točaka $(x, f(x))$, za sve x iz domene $\mathcal{D}$ funkcije f:

$$\Gamma_f = \{(x, y) : x \in \mathcal{D},\ y = f(x)\}.$$



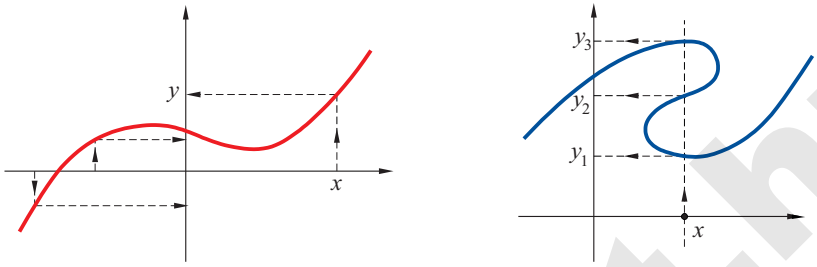
Graf funkcije $f(x) = 2x - 1$ je pravac $y = 2x - 1$. Svakoj vrijednosti x iz područja definicije (koje se nalazi na osi apscisa) odgovara točno jedna vrijednost $y = f(x)$ iz područja vrijednosti (koje je podskup osi ordinata). Točke s koordinatama (x, y) određuju graf funkcije.

Graf funkcija koje ćemo mi promatrati[1] opisan je krivuljom (ili dijelovima različitih krivulja) u ravnini. Prirodno je postaviti obratna pitanja:

- Kada neka krivulja predstavlja graf neke funkcije?
- Kako se određuju njezina domena i kodomena, a kako zakon pridruživanja?

Osnovni putokaz pri odgovoru na ova pitanja predstavlja sama definicija funkcije, koja kaže da svakom elementu x domene $\mathcal{D}$ mora biti pridružen točno jedan element y iz kodomene $\mathcal{R}$. To znači sljedeće: vertikalni pravac (paralelan s osi ordinata) smije sjeći krivulju najviše u jednoj točki. Apscisa presjeka tog pravca s osi apscisa predstavlja vrijednost varijable x, a odgovarajuću vrijednost od y dobivamo iz presjeka pravca sa zadanom krivuljom.

[1] Postoje neelementarne funkcije čiji graf može biti bitno složeniji.

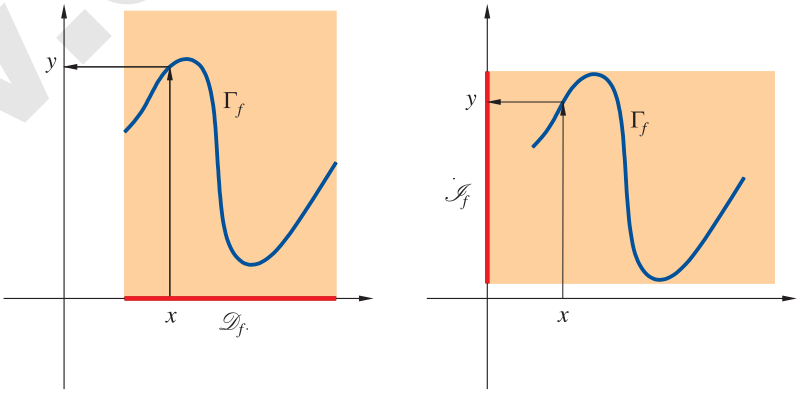


Krivulja lijevo određuje y kao funkciju varijable x. Krivulja desno ne predstavlja graf funkcije. Jednoj vrijednosti varijable x odgovara više vrijednosti varijable y.

Cesta ispod vrha Svetog Jure na Biokovu, iako strma, ne zadovoljava vertikalni test.

Što je i kako se računa kodomena $\mathcal{R}$ funkcije f ? Pri određivanju kodomene ne moramo biti toliko precizni kao kad određujemo domenu funkcije. U većini slučajeva točno poznavanje kodomene nije nam niti potrebno. Zato najčešće uzimamo $\mathcal{R} = \mathbf{R}$ i pišemo jednostavno $f : \mathcal{D} \to \mathbf{R}$.

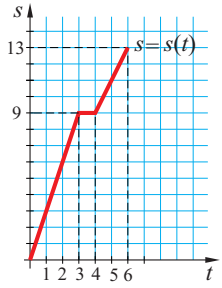
S pojmom kodomene povezan je još jedan skup: **slika funkcije**. Njega možemo shvatiti kao najmanju od svih mogućih kodomena funkcije f. Slika funkcije sastoji se od svih $y \in \mathbf{R}$ za koje postoji $x \in \mathcal{D}$ takav da je $f(x) = y$. To je, dakle, skup na koji funkcija f preslikava svoju domenu. Označavamo ga s $\mathcal{I}$, ili preciznije, s $\mathcal{I}_f$. Određivanje slike funkcije nije uvijek jednostavno. To je jedan od zadataka *diferencijalnog računa*.



Područje definicije određujemo računajući sve brojeve x na osi apscisa za koje postoji odgovarajući y. Taj je skup $\mathcal{D}_f$ jednak projekciji grafa na os apscisa (lijevo). Skup vrijednosti (slika funkcije) $\mathcal{I}_f$ je projekcija grafa na os ordinata (desno).

Funkciju možemo zadati i različitim formulama na različitim intervalima.

Primjer 2.



Funkcija

$$s(t) = \begin{cases} 3t, & 0 \leqslant t \leqslant 3, \\ 9, & 3 < t \leqslant 4, \\ 2t+1, & 4 < t \leqslant 6, \end{cases}$$

opisuje prijeđeni put u kilometrima osobe koja je prva tri sata hodala brzinom od 3 km/h, zatim se sat vremena odmarala, a nakon toga dva sata hodala brzinom od 2 km/h. Graf ove funkcije dan je na slici lijevo.

Uvjerimo se u to. Na intervalu $[0,3]$ jednadžba pravca je $s(t) = 3t$. U točki $t = 3$ vrijedi $s(3) = 9$ i funkcija je konstantna na intervalu $[3,4]$. Dalje će koeficijent smjera pravca biti 2, a jednadžbu određujemo uz uvjet da pravac prolazi točkom $(4,9)$:

$$s(t) - 9 = 2(t-4), \qquad 4 \leqslant t \leqslant 6$$

i odavde slijedi $s(t) = 2t + 1$.

Primjer 3.

Odredi $f(x)$ ako je $f\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = x^2$.

Stavimo

$$t = \frac{x}{x+1},$$

onda se zadani izraz može napisati u obliku $f(t) = x^2$. Da bismo odredili $f(x)$, potrebno je izraziti x kao funkciju varijable t.

$$t = \frac{x}{x+1} \iff tx + t = x \iff x = -\frac{t}{t-1}.$$

Sad dobivamo

$$f(t) = x^2 = \left(-\frac{t}{t-1}\right)^2 = \frac{t^2}{(t-1)^2}.$$

Time je funkcija određena, a ime varijable možemo označiti po volji:

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}.$$

Ovim je određen samo zakon pridruživanja, ali ne i domena funkcije f.

Zadatak 1. Ako je $f(x^2-1) = x^4 + x^2 - 3$, koliko je $f(x^2+1)$?

Zadatak 2. Ako je $f(x-1) = \dfrac{x+1}{2x-3}$, koliko je $f(x+1)$?

Analitičko zadavanje funkcija. Područje definicije

Za funkciju zadanu zakonom pridruživanja (koji popularno nazivamo 'formulom'), kažemo da je zadana **analitički**. Primjerice:

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1,$$
$$g(x) = \ln(x-1),$$
$$h(x) = \sqrt{2 - \sin x}.$$

Pritom se postavlja pitanje: što je domena ovih funkcija? *Prema dogovoru*, za domenu uzimamo skup svih realnih brojeva x za koje ovi izrazi imaju smisla (kažemo još: za koje postoji $f(x)$).

Prirodna domena funkcije

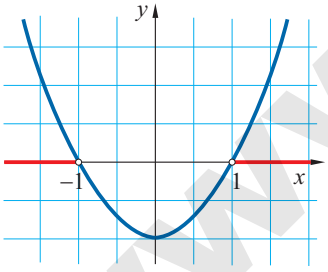
Domena realne funkcije po dogovoru je skup svih realnih brojeva x za koje zadani zakon pridruživanja ima smisla. Takvu domenu nazivamo **prirodna domena**.

Tako, primjerice, funkcija f ima za domenu $\mathcal{D}_f = \mathbf{R}$. Funkcija g definirana je za one x za koje je $x-1>0$, dakle, $\mathcal{D}_g = \langle 1, \infty \rangle$. Funkcija h definirana je za svaki realni broj x, a izraz pod korijenom uvijek je pozitivan. Stoga je $\mathcal{D}_h = \mathbf{R}$.

Primjer 4.

Odredimo područje definicije funkcija:

1) $f(x) = \log \dfrac{x-1}{x+1}$; **2)** $g(x) = \sqrt{1 - |x-1|}$.



1) Argument logaritamske funkcije mora biti pozitivan. Nejednakost $\dfrac{x-1}{x+1} > 0$ ekvivalentna je nejednakosti $(x-1)(x+1) > 0$.

Načinimo skicu polinoma s lijeve strane i s nje očitamo:

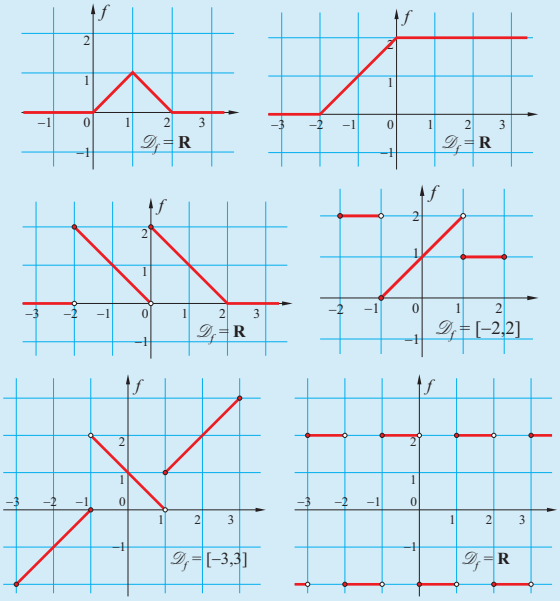
$$\mathcal{D}_f = \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle.$$

2) Područje definicije ove funkcije je skup svih realnih brojeva x za koje je $1 - |x-1| \geqslant 0$. Ekvivalentan je uvjet $|x-1| \leqslant 1$, odakle slijedi $-1 \leqslant x-1 \leqslant 1$, odnosno $0 \leqslant x \leqslant 2$.

Dakle je $\mathcal{D}_f = [0, 2]$.

Zadatci 5.1.

1. Napiši formule za funkciju skiciranu crtežom.



2. Pokaži da zadana funkcija zadovoljava napisanu jednakost:

1) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$, $\quad f(2) = f(1)$;

2) $g(t) = t^3 - 3t^2 + 4t - 1$, $\quad g(2) = g(1)$;

3) $h(u) = 4u^3 - 3u^2 - 5u - 6$, $h(3) + 6h(1) = 0$;

4) $\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 10$, $\varphi(1) = \varphi(2) = \varphi(3)$.

3. Ako je $f(x) = 3x^2 + 2$, izračunaj

1) $f(2)$; **2)** $f(-2)$;

3) $f(2+\sqrt{3})$; **4)** $f(x+1)$;

5) $f(x-1) + f(x+1)$;

6) $f(f(x))$.

4. Ako je $f(x) = x^2 - x + 1$, koliko je $(a+1)f(a) - (a-1)f(-a)$?

5. Ako je $f(x) = x^2 + x + 1$, koliko je $(a+1)f(-a) + (a-1)f(a)$?

6. Ako je $f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = x^3 + 1$, koliko je $f(a+1) - g(a-1)$?

7. Ako je $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = (x-1)^2$, koliko je $(a-1)f(a) - (a+1)g(-a)$?

8. Koliko je $f\left(\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}\right)$ ako je $f(x) = x^2 + 2x + 1$?

9. Ako je $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+1} : \dfrac{1}{x^3-1}$, koliko je $f(\sqrt{2})$?

10. Ako je $f(x) = \dfrac{x(x+1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+2)}$, koliko je $f(1-\sqrt{3})$?

11. Ako je $f(x) = \dfrac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(x-1)(x+4)}$, izračunaj $f\left(\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}\right)$.

12. Ako je $f(x) = \dfrac{3x^3 - 7x^2 + 3x - 2}{3x^2 - x + 1}$, koliko je $f(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$?

13. Koliko je $f(x_0)$, $x_0 = (2 + 3^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}$ ako je $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$?

14. Ako je $f(x) = x^2 - 8x + 12$, koliko je $f(x_0)$, $x_0 = 25^{-\log_{0.2}(1+\sqrt{3})}$?

15. Ako je $x_0 = 2^{-\log_4(4-2\sqrt{3})}$ te $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x^2+4x+3}$, izračunaj $f(x_0)$.

16. Odredi $f(x)$, ako je:

1) $f(\log_2 x) = \dfrac{\log_2(4x^3)}{\log_{\sqrt{2}} x - \log_{0.5} x}$;

2) $f(\log_{\sqrt{3}} x) = \dfrac{\log_9 \sqrt{3x}}{\log_3 x - \log_{\frac{1}{3}} x}$;

3) $f(\log_{\frac{1}{2}} x) = \dfrac{2\log_4 x - \log_{\sqrt{2}} \frac{x}{8}}{1 + \log_2 \sqrt{0.125}}$;

4) $f(\log_{0.2} x) = \dfrac{\log_{\sqrt{5}}(0.04x)}{\log_{25} 125 - \log_5 \sqrt{5x}}$.

17. Ako je $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$, bez tablica i računala izračunaj koliko je $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

18. Ako je $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$, te $\sin 2x_0 = \frac{2}{3}$, koliko je $f(x_0)$?

19. Ako je $f(\cos^2 x) = \operatorname{ctg}^2 x - \cos 2x$, koliko je $f(x)$?

— ◆ —

20. Odredi nul-točke polinoma drugog stupnja $f(x) = ax^2 + bx + c$, ako je $f(-2) = 4$, $f(1) = -2$, $f(0) = -2$.

21. Ako je $f(0) = 1$, $f(x) = x + f(x-1)$, za $x > 0$, koliko je $f(100)$?

22. Funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definirana s

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ za racionalne } x, \\ 0 \text{ za iracionalne } x \end{cases}$$

zove se Dirichletova funkcija. Koliko je $f(-\pi)$, $f(\log_2 \sqrt[3]{4})$, $f(\sin 3)$, $f\left(\cos \frac{17\pi}{6}\right)$, $f(1.111\ldots)$, $f(4^{-0.5})$?

— ◆ —

23. Odredi $f(x)$ ako je:

1) $f(x+1) = 3x - 2$; **2)** $f(x - \frac{1}{2}) = -2x + \frac{1}{3}$;

3) $f(-\frac{2}{3}x + 1) = x$; **4)** $f(2x-1) = 4x^2 - 3$;

5) $f(x+3) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}$;

6) $f(3x-1) = x^2$.

24. Odredi $f(x)$ ako je:

1) $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$;

2) $f\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x^2 - 1$;

3) $f\left(\frac{3x-1}{x+2}\right) = \frac{x+1}{x-1}$;

4) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3x}{2x+7}$;

5) $f\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

25. Ako je $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{x}{x-2}$, koliko je $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$?

26. Ako je $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1-x}$, koliko je $f\left(\frac{1}{1-x}\right)$?

27. Ako je $f\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x$, koliko je $f\left(1 - \frac{1}{x}\right)$?

28. Koliko je $f\left(\frac{x-1}{x}\right)$ ako je $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = x$?

29. Koliko je $f\left(\frac{1}{x}\right)$ ako je $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{x-1}{x+1}$?

30. Ako je $f(x) = \log_3 x - 2\log_9 \frac{3}{x}$, koliko je $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$?

31. Ako je $f(x) = \log_4 x + 3\log_2(8x)$, koliko je $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$?

— ◆ —

32. Ako je $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(\pi - x)$, koliko je $f\left(\frac{67\pi}{6}\right)$?

33. Ako je $f(x - 2\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2\sin(x - \pi)$, koliko je $f\left(-\frac{35\pi}{6}\right)$?

34. Ako je $f(x + \pi) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(2\pi - x)$, koliko je $f\left(\frac{35\pi}{3}\right)$?

35. Ako je $f\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}(\sin x - \cos x)$, koliko je $f\left(\frac{11\pi}{12}\right)$?

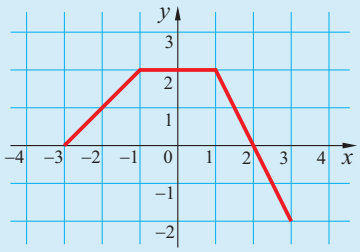
36. Ako je $f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x + \cos x$, koliko je $f\left(\frac{4\pi}{3}\right) \cdot f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$?

37. Ako je $f(x - \pi) = \sin x \cdot \cos x$, koliko je $f\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$?

38. Ako je $f\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\alpha + \cos\alpha$, tada je $f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot f\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos 2\alpha$. Dokaži!

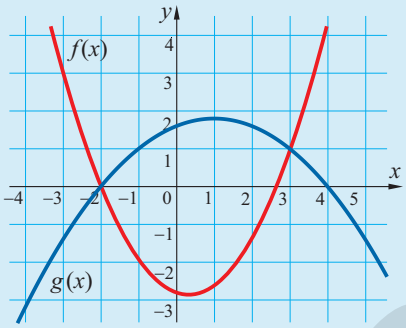
— ◆ —

39. Na slici je nacrtan graf funkcije f .



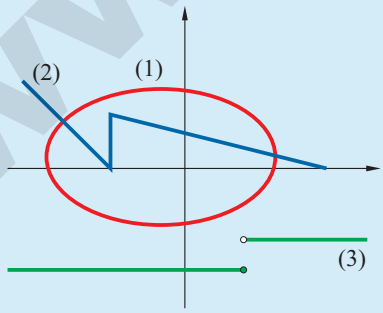
1) Odredi područje definicije.
2) Odredi sliku (područje vrijednosti funkcije).
3) Pročitaj sa slike $f(0)$ i $f(2)$.
4) Za koji x vrijedi $f(x) = 1$?
5) Napiši formulu za $f(x)$.

40. Na slici su nacrtani grafovi funkcija f i g.



1) Očitaj vrijednosti za $f(1)$ i $g(-3)$.
2) Za koje x vrijedi $f(x) = g(x)$?
3) Za koje x vrijedi $f(x) = 0$?
4) Za koje x vrijedi $g(x) = 0$?
5) Za koje x vrijedi $f(x) = -1$.
Tražene vrijednosti očitaj približno s točnošću od 1 decimale.

41. Koje krivulje na slici predstavljaju graf neke funkcije $y = f(x)$?



42. Poveži funkcije i njihove domene

1) $\mathcal{R}_f = \langle -\infty, 1]$ **A)** $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$;
2) $\mathcal{R}_f = [0, 1]$ **B)** $f(x) = \sqrt{1 - x}$;
3) $\mathcal{R}_f = [-1, 1]$ **C)** $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$;
4) $\mathcal{R}_f = \mathbf{R}$ **D)** $f(x) = 2^{x-1}$.

43. Odredi prirodno područje definicije funkcija:

1) $f(x) = \dfrac{1}{2 - 3x}$; **2)** $f(x) = \dfrac{1}{4x^2 - 1}$;
3) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$; **4)** $f(x) = \dfrac{1}{\cos \pi x}$;
5) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$; **6)** $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x - 1}}$;
7) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2 - x}{3x + 2}}$; **8)** $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x}$;
9) $f(x) = \sqrt{3^{1-2x}}$; **10)** $f(x) = \sqrt{\sin \pi x}$.

44. Odredi prirodno područje definicije sljedećih funkcija:

1) $f(x) = \sqrt{5 - x^2}$;
2) $f(x) = \log(6x - x^2)$;
3) $f(x) = \log x + \log(4 - x)$;
4) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$;
5) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 2}}$;
6) $f(x) = \sqrt{2 \sin x - 1}$.

45. Odredi prirodno područje definicije sljedećih funkcija:

1) $f(x) = \log \dfrac{x + 3}{x}$;
2) $f(x) = \sqrt{3 + x} + \sqrt{3 - x}$;
3) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 5} \cdot \log_2(x + 1)$;
4) $f(x) = \sqrt{4x - x^2} - \log_3(x - 2)$;
5) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 5}}{\log(9 - x)}$;
6) $f(x) = \log_{x-1}(x + 1)$;
7) $f(x) = \log_{x+3}(x^2 + 1)$;
8) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x - 1)}$;

9) $f(x) = \log_{\frac{2}{3}} \sin x$;

10) $f(x) = \sin \sqrt{x}$.

46. Odredi prirodno područje definicije sljedećih funkcija:

1) $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$; **2)** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{\lfloor x \rfloor}$; **4)** $f(x) = \dfrac{1}{\{x\}}$;

5) $f(x) = \sqrt{1-\lfloor x \rfloor}$; **6)** $f(x) = \sqrt{\{x\}-1}$;

7) $f(x) = \sqrt{2^{x-1} - 3^{x+1}}$;

8) $f(x) = \log_2(2-x) + \log_2(x+2)$;

9) $f(x) = \log_2 \log_{0.5} \dfrac{x+1}{x-2}$;

10) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1-2x}{x+3}}$;

11) $f(x) = \sqrt{\log_x 2 - \log_2 x}$;

12) $f(x) = \sqrt{\log_{x-2}(x^2 - 8x + 15)}$.

47. Odredi prirodno područje definicije sljedećih funkcija:

1) $f(x) = \sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}$;

2) $f(x) = \sqrt{\cos(\sin x)}$;

3) $f(x) = \log_{\cos x}(\sin x)$;

4) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1-\sin x}}$;

5) $f(x) = \sqrt{\dfrac{\cos x - 1}{\sin x}}$;

6) $f(x) = \sqrt{\sin^2 x - \sin x}$.

— ◆ —

48. Odredi skup svih vrijednosti funkcije:

1) $f(x) = x^2 - 2x - 3$;

2) $f(x) = -2x^2 - x + 1$;

3) $f(x) = -x^2 + |x| + 2$;

4) $f(x) = |x^2 + x| - 2$.

49. Odredi skup svih vrijednosti funkcije:

1) $f(x) = -2\log_3 x + 1$;

2) $f(x) = 3^{x-2} - 1$;

3) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2x-5) - 3$;

4) $f(x) = -\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+1} + 2$.

50. Odredi skup svih vrijednosti funkcije:

1) $f(x) = -0.5\cos(3x-7) + 1$;

2) $f(x) = 3\,\mathrm{tg}(x-1) + 1$;

3) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$;

4) $f(x) = (\sin x - \cos x)^2$;

5) $f(x) = |\cos^2 11x - \sin^2 11x|$;

6) $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\cos x}$.

51. Jesu li jednake funkcije f i g definirane na prirodnoj domeni:

1) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} - 3$, $g(x) = x - 2$;

2) $f(x) = 2^{\log_2(x+1)}$, $g(x) = x + 1$;

3) $f(x) = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x+1}$,
$g(x) = \sqrt{2x^2 - x - 1}$;

4) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$, $g(x) = x - 2$;

5) $f(x) = \log_3 x^2$, $g(x) = 2\log_3 x$;

6) $f(x) = 2x$, $g(x) = |x-1| + |x+1|$;

7) $f(x) = \log_3(x-1) + \log_3(x+1)$,
$g(x) = \log_3(x^2-1)$;

8) $f(x) = \log_2|x-1|$, $g(x) = |\log_2(x-1)|$?

52. Jesu li jednake funkcije f i g definirane na prirodnoj domeni:

1) $f(x) = \mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{ctg}\, x$, $g(x) = 1$;

2) $f(x) = \lfloor \sin x \rfloor$, $g(x) = \dfrac{|\sin x|}{\sin x}$;

3) $f(x) = 1$, $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$;

4) $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$, $g(x) = 2$;

5) $f(x) = \cos x - \sin x$, $g(x) = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)$;

6) $f(x) = \cos^2 x \cdot \mathrm{tg}\, x$, $g(x) = \sin^2 x \cdot \mathrm{ctg}\, x$?

5.2. Slaganje funkcija. Injektivnost

Kompozicija funkcija

Funkcionalnu vezu varijabli x i y često dobivamo uzastopnim djelovanjem nekoliko elementarnih funkcija. Primjerice, funkcija

$$h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

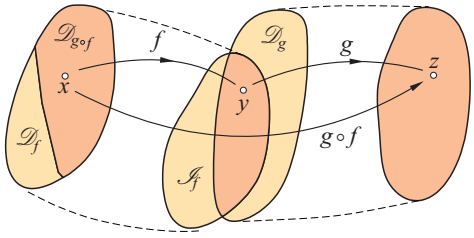
dobivena je uzastopnim djelovanjem dviju elementarnih funkcija, kvadratne funkcije i funkcije drugi korijen.

Neka je $f(x) = x^2 + 1$ i $g(x) = \sqrt{x}$. Onda je

$$g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1} = h(x).$$

Kažemo da je h **kompozicija funkcija** g i f i pišemo $h = g \circ f$.

Neka su $f : \mathcal{D}_f \to \mathbf{R}$, $g : \mathcal{D}_g \to \mathbf{R}$ bilo koje funkcije. Da bi bila definirana kompozicija $g \circ f$ u točki x, mora biti $y \in \mathcal{D}_g$.



Na slici je prikazano slaganje funkcija. Područje definicije kompozicije $g \circ f$ dio je domene $\mathcal{D}_g$ označen na slici tamnijom bojom.

Zato je područje definicije $\mathcal{D}_{g \circ f}$ ove kompozicije podskup domene $\mathcal{D}_f$, jer sadrži samo one elemente $x \in \mathcal{D}_f$ za koje vrijedi $f(x) \in \mathcal{D}_g$.

Primjer 1. Neka je $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = \ln x$. Sada vrijedi:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1 - x^2) = \ln(1 - x^2).$$

Domena funkcije f je $\mathcal{D}_f = \mathbf{R}$. Domena funkcije g je $\mathcal{D}_g = \langle 0, \infty \rangle$. Međutim, domena kompozicije $g \circ f$ je interval $\langle -1, 1 \rangle$ jer samo za brojeve x iz tog intervala vrijedi $y = 1 - x^2 \in \mathcal{D}_g$.

Primjer 2.

Neka je $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^2$. Kompozicija $g \circ f$ definirana je za svaki realni broj x i vrijedi

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x - 1) = (2x - 1)^2.$$

Kompoziciju prirodno računamo onim redom kojim djeluju funkcije, iako i drugi način vodi do istovjetne formule:

$$g(f(x)) = (f(x))^2 = (2x - 1)^2.$$

Jednako tako definirana je i kompozicija $f \circ g$, za koju je

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 - 1.$$

Primjećujemo da je općenito $g \circ f \neq f \circ g$.

Nekomutativnost kompozicije

Slaganje funkcija nije komutativno; općenito vrijedi $f \circ g \neq g \circ f$.

Primjer 3.

Neka je $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 3x + 1$, $h(x) = x^2$. Označimo $y = f(x)$, $z = g(y)$, $w = h(z)$. Kompoziciju triju funkcija možemo računati na dva načina. Prvi je način ovaj:

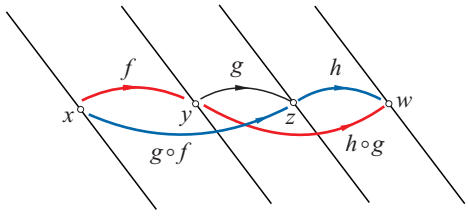
$$\begin{aligned} y &= f(x) = \sqrt{x}, & y &= f(x), \\ z &= g(y) = 3\sqrt{x} + 1, & z &= g(f(x)) = (g \circ f)(x), \\ w &= h(z) = (3\sqrt{x} + 1)^2, & w &= h(g(f(x)) = [h \circ (g \circ f)](x). \end{aligned}$$

Isti rezultat možemo računati i ovako:

$$(h \circ g)(y) = h(g(y)) = h(3y + 1) = (3y + 1)^2.$$

$$[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g)(\sqrt{x}) = (3\sqrt{x} + 1)^2.$$

Način računanja možemo iskazati slikom:



asocijativnost kompozicije

Računajući kompoziciju triju funkcija, f, g i h na bilo koji od dvaju opisanih načina dobit ćemo istu vrijednost $h(g(f(x)))$. Kažemo da je slaganje funkcija **asocijativno**.

Asocijativnost kompozicije

Za slaganje funkcija vrijedi zakon asocijativnosti:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Injektivnost

Pri rješavanju jednadžbi, često iz jednakosti funkcija zaključujemo da i argumenti moraju biti jednaki. Primjerice, ako vrijedi

$$\log(2x+3) = \log 5$$

tad zaključujemo da mora biti $2x+3=5$.

Na isti način postupamo pri rješavanju eksponencijalnih jednadžbi. Tako primjerice, jednadžbu

$$2^{x+3} = 32$$

rješavamo ovako:

$$2^{x+3} = 2^5 \implies x+3=5$$

pa je odatle $x=2$.

Oba ova postupka možemo objasniti svojstvom **injektivnosti**[2] logaritamske, odnosno eksponencijalne funkcije:

$$\log_a(x_1) = \log_a(x_2) \implies x_1 = x_2,$$
$$a^{x_1} = a^{x_2} \implies x_1 = x_2.$$

Ovo važno svojstvo može se definirati i općenitije, za bilo koju funkciju f:

Injektivnost funkcije

Kažemo da funkcija f ima **svojstvo injektivnosti**, ili da je ona **injekcija** ako vrijedi:

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Dakle, funkcija je injekcija ako iz jednakosti funkcijskih vrijednosti slijedi i jednakost argumenata. Svojstvo ekvivalentno ovome je:

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

Dakle, funkcija je injekcija ako različitim brojevima pridružuje različite vrijednosti funkcije.

[2] Čita se *in-jektivnost*, *in-jekcija*, s odvojenim glasovima *n* i *j*.

Jesu li sve funkcije injektivne? Dakako da nisu. Tako primjerice, $f(x) = x^2$ nije injekcija:

$$-3 \neq 3 \quad \text{ali je ipak} \quad (-3)^2 = 3^2.$$

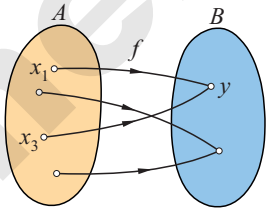
Zato kod rješavanja jednadžbi u kojima se javlja kvadratna funkcija moramo biti oprezniji, iz

$$(x-2)^2 = 16 = 4^2$$

ne slijedi nužno da je $x - 2 = 4$ odnosno $x = 6$, jer je rješenje ove jednadžbe i broj $x = -2$.

Funkcija nije injekcija ako postoje dva različita broja x_1 i x_2 koja se preslikavaju u istu vrijednost. U matematičkoj simbolici ovu tvrdnju pišemo ovako:

$$(\exists x_1, x_2)(x_1 \neq x_2 \quad \wedge \quad f(x_1) = f(x_2)).$$



Na slici je shematski prikaz funkcije koja nije injekcija. Dva različita elementa iz domene funkcije preslikavaju se u isti element kodomene.

Primjer 4.

Provjerimo koje su od dolje navedenih funkcija injektivne.

1) $f(x) = 3x - 5$.

Ako je $x_1 \neq x_2$, onda je $3x_1 \neq 3x_2$, pa $3x_1 - 5 \neq 3x_2 - 5$. Dobili smo $f(x_1) \neq f(x_2)$ te je f injekcija.

2) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$, $x \neq -2$.

Sad je lakše koristiti drugi uvjet. Pretpostavimo da je $f(x_1) = f(x_2)$:

$$\frac{x_1 - 1}{x_1 + 2} = \frac{x_2 - 1}{x_2 + 2},$$
$$(x_1 - 1)(x_2 + 2) = (x_1 + 2)(x_2 - 1),$$
$$x_1x_2 - x_2 + 2x_1 - 2 = x_1x_2 + 2x_2 - x_1 - 2,$$
$$3x_1 = 3x_2.$$

Vidimo da mora biti $x_1 = x_2$. Dakle, f je injektivna.

3) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$.

Sad je:

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbf{R} : 16 - x^2 \geqslant 0\} = [-4, 4].$$

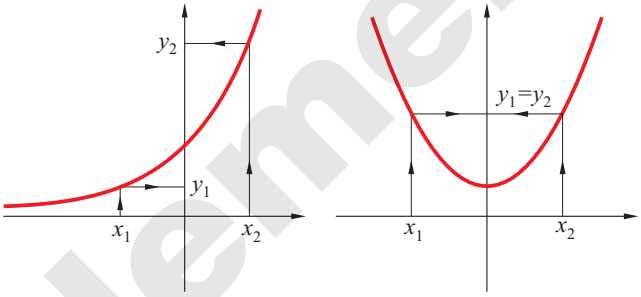
Pretpostavimo da je $f(x_1) = f(x_2)$:

$$\sqrt{16 - x_1^2} = \sqrt{16 - x_2^2} \implies 16 - x_1^2 = 16 - x_2^2 \implies x_1^2 = x_2^2.$$

Međutim odavde ne slijedi nužno da je $x_1 = x_2$, jer može biti i $x_1 = -x_2$. Zaista, za $x_1 = -3$ i $x_2 = -3$ vrijedi $f(-3) = \sqrt{16 - (-3)^2} = \sqrt{7}$ i $f(3) = \sqrt{16 - 3^2} = \sqrt{7}$.

Prema tome, pronašli smo točke $x_1 \neq x_2$ za koje vrijedi $f(x_1) = f(x_2)$, pa funkcija nije injektivna.

Kako možemo pomoću grafa ustanoviti je li neka funkcija injektivna? Pogledajmo najprije sljedeću sliku dviju funkcija od kojih je jedna injektivna a druga to nije.

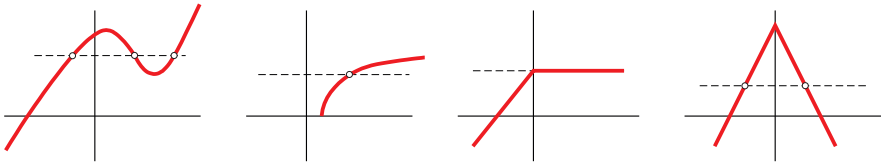


Na slici su prikazane dvije funkcije. Funkcija nacrtana lijevo jest injektivna jer različitim vrijednostima argumenta odgovaraju različite funkcijske vrijednosti. Funkcija nacrtana desno nije injektivna jer se ista vrijednost funkcije dobije za dvije različite vrijednosti argumenta.

Pretpostavimo da funkcija nije injektivna. Za takvu funkciju postoje brojevi $x_1 \neq x_2$ za koje je $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$. Prema tome, točke (x_1, y_1) i (x_2, y_2) leže na grafu funkcije, a imaju jednake ordinate. To znači da pravac s jednadžbom $y = y_1$ (paralelan s x-osi) siječe graf funkcije u dvije točke, s apscisama x_1 i x_2.

Horizontalni test — kriterij injektivnosti

Funkcija f je injektivna ako svaki pravac paralelan s x-osi siječe njezin graf najviše u jednoj točki.



Od četiriju funkcija čiji su grafovi skicirani, samo druga zadovoljava kriterij injektivnosti.