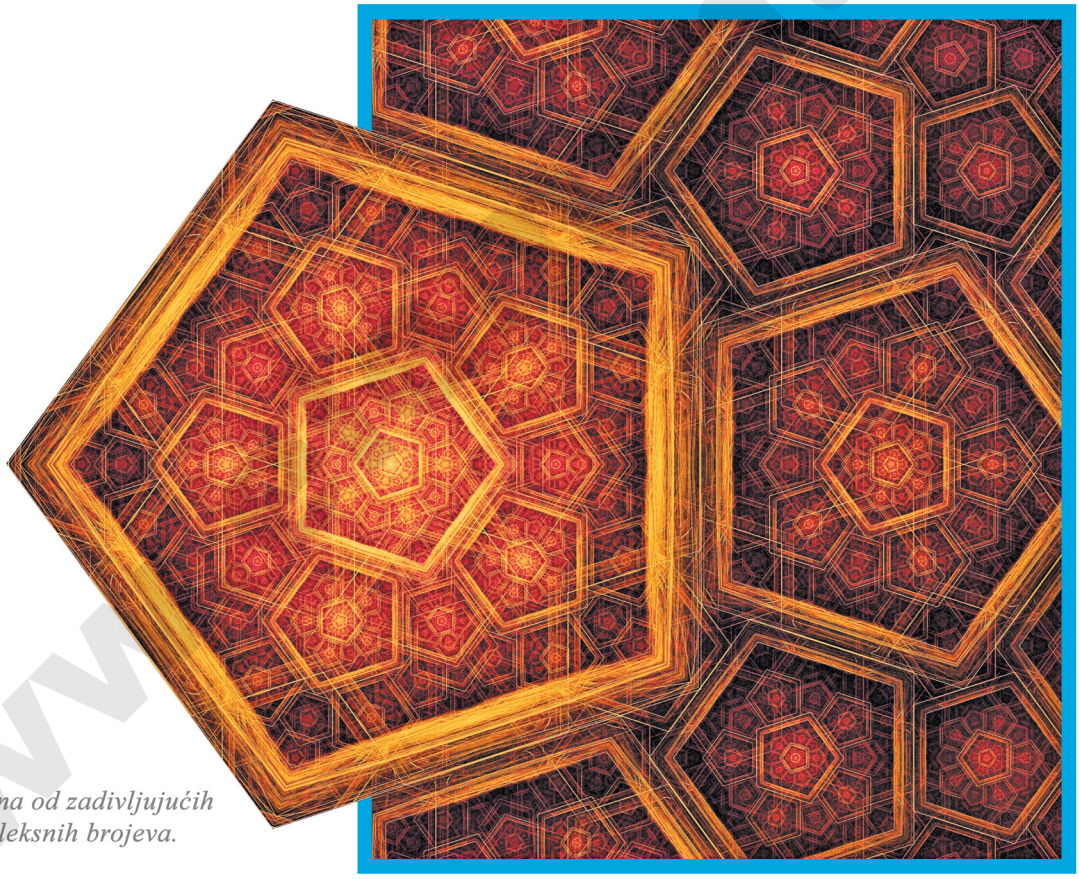
1 Skup kompleksnih brojeva



Fraktali su jedna od zadivljujućih primjena kompleksnih brojeva.

Brojevi su jedno od područja najšireg interesa matematičara i matematičke znanosti. Put od prirodnih do realnih brojeva, koji je trajao tisućljećima, danas svaki školarac prelazi već tijekom svojeg osnovnoškolskog obrazovanja. No je li time taj put i završen? Ili postoji njegov produžetak? Odgovor na posljednje pitanje je potvrdan i upravo će o njemu biti riječi u ovom poglavlju udžbenika. Upoznat ćemo nove, kompleksne brojeve i to tek u jednom malom opsegu. Valja znati kako je uloga kompleksnih brojeva u matematici, ali i u njihovoj stvarnoj primjeni, uistinu velika.

1.1. Kompleksni broj

Tijekom školovanja upoznali smo različite skupove brojeva. Bili su to:

- skup prirodnih brojeva $\mathbf{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$
- skup cijelih brojeva $\mathbf{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$
- skup racionalnih brojeva $\mathbf{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\right\}$.

Skup realnih brojeva $\mathbf{R}$ dobijemo združivanjem skupova racionalnih i iracionalnih brojeva. Znamo također da vrijedi

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}.$$

Svaki od skupova $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}$ proširenje je prethodnog, načinjeno zbog potrebe da se omogući provedba određene algebarske operacije. Primjerice, razlika dvaju prirodnih brojeva nije općenito prirodni broj. Stoga se skup $\mathbf{N}$ proširuje negativnim cijelim brojevima i nulom te se tako dobije skup cijelih brojeva $\mathbf{Z}$. Zbog izvedivosti dijeljenja cijelih brojeva skup $\mathbf{Z}$ se proširuje razlomcima, odnosno decimalnim (konačnim ili periodičkim) brojevima čime dobivamo skup racionalnih brojeva $\mathbf{Q}$. Vidjeli smo također da postoje brojevi koje ne možemo zapisati kao razlomke. To su iracionalni brojevi.

Izgradnjom skupa realnih brojeva $\mathbf{R}$ opisanim proširenjima nije kraj. Razlog leži u tome što kvadrat niti kojeg realnog broja nije negativan. Primjerice, već odgovor na pitanje: *Za koji realan broj x vrijedi $x^2 = -1$?* glasi: *Ne postoji takav realan broj*. Skup realnih brojeva proširujemo i uvodimo nove, **kompleksne brojeve**. Skup kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$ sadrži sve realne brojeve, svaki je realni broj ujedno i kompleksni broj.

Neka je i zamišljeno rješenje jednadžbe $x^2+1 = 0$, broj sa svojstvom $i^2+1 = 0$. Taj novi broj nazivamo **imaginarnom jedinicom**.

Imaginarna jedinica

Imaginarna jedinica i je broj za koji vrijedi

$$i^2 = -1.$$

Skup kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$ bit će proširenje skupa realnih brojeva $\mathbf{R}$. To znači da skup kompleksnih brojeva sadrži sve realne brojeve kao svoj podskup. Želimo također da u skupu kompleksnih brojeva budu definirane algebarske operacije zbrajanja i množenja. Zbog toga je umnožak bilo kojeg realnog broja y i imaginarne jedinice i kompleksan broj. Takve brojeve nazivamo posebnim imenom: **imaginarni brojevi**.

Brojevi $2i$, $-\frac{4}{7}i$, $\sqrt{3}i$, primjeri su imaginarnih brojeva.

Imaginarni brojevi

Imaginarni broj yi umnožak je realnog broja y i imaginarne jedinice i.

Kompleksni broj je zbroj realnog i imaginarnog broja. Kompleksni su brojevi primjerice

$$-1 + 3i,\ \sqrt{3} - i,\ \frac{3}{4} + \frac{1}{2}i \ldots$$

Svaki je realan broj i kompleksan broj jer se može zapisati u obliku $x + 0 \cdot i$. Svaki je imaginarni broj i kompleksni broj jer je $yi = 0 + yi$.

Skup kompleksnih brojeva

Kompleksni broj z je broj oblika

$$z = x + yi.$$

Tu su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x je **realni dio** kompleksnog broja z, a broj y je njegov **imaginarni dio**. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z, \qquad y = \operatorname{Im} z.$$

Zapis $z = x + yi$ zovemo **algebarski** (ili) **standardni prikaz** kompleksnog broja z.

Skup kompleksnih brojeva označavamo s $\mathbf{C}$.

Primjer 1. Odredimo realni i imaginarni dio svakog od kompleksnih brojeva:

1) $z_1 = 3+5i$; **2)** $z_2 = -\frac{1}{2}+i$; **3)** $z_3 = -11$; **4)** $z_4 = i\sqrt{3}$.

Prati redom odgovore i obrazloži ih:

1) $\operatorname{Re} z_1 = 3$, $\operatorname{Im} z_1 = 5$; **2)** $\operatorname{Re} z_2 = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} z_2 = 1$;

3) $\operatorname{Re} z_3 = -11$, $\operatorname{Im} z_3 = 0$; **4)** $\operatorname{Re} z_4 = 0$, $\operatorname{Im} z_4 = \sqrt{3}$.

Zadatak 1. Sljedeću tablicu prepiši u bilježnicu i popuni:

z	$3-7i$	$-1+i\sqrt{5}$	$0.5i$	$\frac{2}{3}-\frac{1}{4}i$	$2-\sqrt{2}$	$-i$	$\pi+i$
$\operatorname{Re} z$							
$\operatorname{Im} z$							

Jednakost kompleksnih brojeva

Nakon što smo definirali kompleksne brojeve, prirodno je postaviti pitanje: kada su dva kompleksna broja jednaka? Odgovor je vrlo jednostavan: dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako je realni dio prvoga jednak realnom dijelu drugoga i imaginarni dio prvoga jednak imaginarnom dijelu drugoga.

Jednakost kompleksnih brojeva

Kompleksni brojevi $z_1 = x_1+y_1i$ i $z_2 = x_2+y_2i$ jednaki su ako i samo ako im se podudaraju realni i imaginarni dijelovi:

$$z_1 = z_2 \text{ ako i samo ako vrijedi } x_1 = x_2 \text{ i } y_1 = y_2.$$

Zaista, iz $x_1 + y_1i = x_2 + y_2i$ slijedi $x_1 - x_2 = (y_2 - y_1)i$ pa ukoliko bi bilo $y_1 \neq y_2$ onda bi vrijedilo $i = \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} \in \mathbf{R}$, što je nemoguće. Zato je $y_1 = y_2$ i onda nužno $x_1 = x_2$.

Primjer 2. Odredimo realne brojeve a i b iz sljedećih jednakosti kompleksnih brojeva:

1) $a+3i=-1+bi$; **2)** $(a-1)x+(a+b)y=2+5i$;

3) $3-(a-b)i=2+(a+b)i$.

1) Kompleksni brojevi s lijeve i s desne strane jednakosti jednaki su ako i samo ako je $a=-1$ i $b=3$;

2) Kao i u prethodnom primjeru mora biti $a-1=2$ i $a+b=5$. Dakle, $a=3$, $b=2$;

3) Realni dijelovi kompleksnih brojeva na lijevoj i desnoj strani jednakosti različiti su pa onda niti ti brojevi ne mogu biti jednaki niti za koji izbor realnih brojeva a i b.

Zadatak 2. Za koje realne brojeve a i b su kompleksni brojevi z_1 i z_2 jednaki:

1) $z_1=(a-b)+(a+b)i$, $z_2=1-3i$;

2) $z_1=2a-b+(3a-2b)i$, $z_2=-i$;

3) $z_1=3+(a-b)i$, $z_2=a+b-3i$?

Zadatci 1.1.

1. Odredi realni i imaginarni dio svakog od kompleksnih brojeva:

1) $z=5+2i$; **2)** $z=1-3i$;

3) $z=-\frac{1}{2}i$; **4)** $z=\sqrt{2}$;

5) $z=\frac{2-3i}{3}$; **6)** $z=1-\sqrt{2}+i\sqrt{3}$;

7) $z=0$; **8)** $z=(1-\sqrt{2})i$.

2. Odredi realne brojeve a i b iz jednakosti:

1) $a+4i=-2+bi$;

2) $a+i=1+bi$;

3) $2a-b+3i=a+2b-3i$;

4) $1-(a-b)i=1+(a+b)i$;

5) $a-b+5i=1+(a+b)i$;

6) $-1+(2a+b)i=1-(a-2b)i$.

3. Odredi realne brojeve x i y iz jednakosti:

1) $x+(y-1)i=-1+3i$;

2) $2x+y-yi=1+i$;

3) $x-y+(x+y)i=2+4i$;

4) $x-2y+(2x-y)i=3i$;

5) $2x-3y+(x-y)i=-1$;

6) $2x-3y+(x+y)i=x+2y+(3x+1)i$.

4. Gdje je greška u računu:

$$1=\sqrt{1}=\sqrt{(-1)\cdot(-1)}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$$
$$=i\cdot i=-1?$$

1.2. Zbrajanje i množenje kompleksnih brojeva

Zbroj, razlika i umnožak kompleksnih brojeva

Ako su $z_1 = x_1 + y_1 i$ i $z_2 = x_2 + y_2 i$ bilo koja dva kompleksna broja, tada njihov zbroj, razliku i umnožak definiramo na sljedeći način:

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)i,$$
$$z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + (y_1 - y_2)i,$$
$$z_1 \cdot z_2 = x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i.$$

Operacije zbrajanja i množenja u skupu $\mathbf{C}$ imaju svojstva komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti množenja prema zbrajanju. Naime, za svaka tri kompleksna broja z_1, z_2 i z_3 vrijedi:

- **svojstvo komutativnosti**

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \qquad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1;$$

- **svojstvo asocijativnosti**

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, \qquad z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3;$$

- **svojstvo distributivnosti množenja prema zbrajanju kompleksnih brojeva**

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$$

Primjer 1. Dani su kompleksni brojevi $z = -2 + 3i$, $w = 1 - 4i$. Izračunajmo $z + w$, $z - w$ i $z \cdot w$.

$$z + w = -2 + 3i + 1 - 4i = -1 - i;$$

$$z - w = -2 + 3i - (1 - 4i) = -3 + 7i;$$

$$z \cdot w = (-2 + 3i)(1 - 4i) = -2 + 8i + 3i - 12i^2 = -2 + 11i + 12 = 10 + 11i.$$

Zadatak 1. Za kompleksne brojeve $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = 3 - i$, $z_3 = -1 + 2i$ izračunaj

1) $z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1$; **2)** $(z_1 - z_2) \cdot (z_2 - z_3) \cdot (z_3 - z_1)$.

Potencije imaginarne jedinice

Pri množenju više kompleksnih brojeva pojavit će se potencije imaginarne jedinice. Izračunajmo, primjerice:

$$(2-3i)^3 = 8 - 36i + 54i^2 - 27i^3.$$

Koliko je i^3?

Možemo računati: $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$.

Onda je konačno $(2-3i)^3 = 8 - 36i - 54 + 27i = -46 - 9i$.

Izračunajmo vrijednosti prvih nekoliko potencija imaginarne jedinice prirodnim brojem. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
i^2 &= -1,\\
i^3 &= i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i,\\
i^4 &= i^3 \cdot i = (-i) \cdot i = -i^2 = 1,\\
i^5 &= i^4 \cdot i = i;\\
i^6 &= i^4 \cdot i^2 = i^2 = -1.
\end{aligned}$$

Uočavamo da dalje i ne moramo računati jer se vrijednosti potencija periodički ponavljaju. Pritom se uzastopce izmjenjuju četiri vrijednosti: i, -1, $-i$, 1.

Za određivanje vrijednosti potencije i^n, gdje je n prirodni broj, dovoljno je pogledati koliki je ostatak pri dijeljenju broja n s 4. Tada je vrijednost potencije jednaka i^r, gdje je r ostatak pri dijeljenju n s 4. Evo zašto.

Prirodni broj n može se zapisati u obliku $4k + r$, gdje je k količnik, a r ostatak pri dijeljenju broja n s 4. Broj r je jedan od brojeva $0, 1, 2$ ili 3.

Zato možemo pisati:

$$i^n = i^{4k+r} = i^{4k} \cdot i^r = (i^4)^k \cdot i^r = 1^k \cdot i^r = i^r.$$

Potencije imaginarne jedinice

Neka je k prirodni broj. Tada za potencije imaginarne jedinice i vrijedi:

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i.$$

Primjer 2.

Izračunajmo:

1) i^{12}; **2)** i^{123}; **3)** i^{1234}; **4)** $i^{12\,345}$.

1) Broj 12 djeljiv je s 4, pa je $i^{12} = 1$.

2) Pri dijeljenju s 4 broj 123 daje ostatak 3 (jer je $123 = 4 \cdot 30 + 3$) te je $i^{123} = i^{4 \cdot 30 + 3} = (i^4)^{30} \cdot i^3 = 1^{30} \cdot i^3 = i^3 = -i$.

3) Ostatak pri dijeljenju nekog višeznamenkastog broja s 4 jednak je ostatku što ga pri dijeljenju s 4 daje njegov dvoznamenkasti završetak. Naime, svaki se prirodni broj n s trima ili više znamenki može zapisati u obliku $n = 100t + \overline{uv}$, gdje je t prirodni broj, a $\overline{uv}$ dvoznamenkasti završetak od n.
Broj $100t$ djeljiv je s 4. Stoga na pitanje o djeljivosti broja n s 4 odgovor nalazimo promatrajući dvoznamenkasti broj $\overline{uv}$.
Budući da je $1234 = 12 \cdot 100 + 34$, imamo $i^{1234} = i^{34} = i^2 = -1$.

4) $i^{12\,345} = i^{45} = i$.

Zadatak 2. Izračunaj:

1) i^{313}; **2)** $i^{54\,321}$; **3)** $(i^{123})^{123}$.

Primjer 3.

Izračunajmo: $1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots + i^{1001}$.

Vidjeli smo da se pri uzastopnim potencijama imaginarne jedinice u jednom periodu pojavljuju četiri vrijednosti: i, -1, $-i$, 1. Njihov zbroj je jednak nuli.

U našem zadatku imamo 1002 pribrojnika. Kad ih od početka razvrstamo po četiri, dobit ćemo 250 skupina po 4 pribrojnika i još dva pribrojnika na kraju.

U svakoj od tih 250 skupina imamo zbroj $1 + i - 1 - i = 0$, a na kraju još ostaje $i^{1000} + i^{1001}$.

Ukupan zbroj svih 1002 pribrojnika onda je jednak $i^{1000} + i^{1001} = 1 + i$.

Primijetite kako smo grupiranje mogli provesti od kraja prema početku. Tako bi nam nakon poništavanja ostala prva dva člana zbroja. Rezultat je, naravno, isti.

Zadatak 3. Izračunaj:

1) $1 + i^3 + i^5 + \ldots + i^{553} + i^{555}$; **2)** $i^2 \cdot i^4 \cdot i^6 \cdot \ldots \cdot i^{442} \cdot i^{444}$.

Primjer 4.

Vrijednosti potencija nekih "posebnih" kompleksnih brojeva vrlo su jednostavne. Navedimo dva primjera koji to pokazuju.

Dokaži da za svaki prirodni broj n vrijede jednakosti:

1) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = i^n$; **2)** $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{3n} = (-1)^n$.

1) Kako je $z^{2n} = (z^2)^n$, za svaki kompleksni broj z, onda imamo:

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = \left(\frac{1+2i+i^2}{2}\right)^n = \left(\frac{2i}{2}\right)^n = i^n.$$

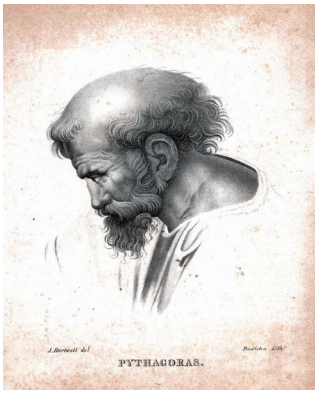
2) I u ovom primjeru postupit ćemo slično kao i u prethodnom. Primijenit ćemo jednakost $z^{3n} = (z^3)^n$:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{3n} = \left(\frac{1}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{8}i+\frac{9}{8}i^2+\frac{3\sqrt{3}}{8}i^3\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{8}i-\frac{9}{8}-\frac{3\sqrt{3}}{8}i\right)^n = (-1)^n.$$

Kutak plus

PITAGORA I KOMPLEKSNI BROJEVI



Određivanje *Pitagorinih trojki brojeva*, trojki prirodnih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu $a^2+b^2=c^2$, jedan je od davnih problema teorije brojeva. Taj je problem riješen i to, slično Pitagorinu poučku, na čitav niz različitih načina. Zanimljivo je da se uz pomoć kompleksnih brojeva može pronaći po volji mnogo *Pitagorinih trojki*.

Uzmimo, primjerice, kompleksni broj $z=-3+2i$ pa ga kvadrirajmo. Tako ćemo dobiti:

$$z^2 = 9-12i+4i^2 = 9-12i-4 = 5-12i.$$

Apsolutne vrijednosti realnog i imaginarnog dijela kompleksnog broja $5-12i$ duljine su kateta pravokutnog trokuta. Naime, vrijedi: $5^2+12^2=13^2$.

Provjerimo da to vrijedi i općenito, za svaki kompleksni broj $z=x+yi$, $x, y \in \mathbf{N}$.

$$z^2 = x^2-y^2+2xyi.$$

Tada je $|x^2-y^2|=a$, $2|xy|=b$ pa ćemo imati:

$$a^2+b^2=(x^2-y^2)^2+4x^2y^2=(x^2+y^2)^2=c^2.$$

I sada iz jednakosti $a=|x^2-y^2|$, $b=2xy$, $c=x^2+y^2$ za svaki $x, y \in \mathbf{N}$, $x \neq y$, dobijemo jednu *Pitagorinu trojku brojeva*.

Zadatci 1.2.

1. Izračunaj $z+w$, $z-w$ i $z\cdot w$ ako je:

1) $z=-\frac{1}{2}+i$, $w=1-\frac{1}{3}i$;
2) $z=-2+3i$, $w=2+i$;
3) $z=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}i$, $w=\frac{3}{4}+\frac{1}{3}i$.

2. Izračunaj $z+w$, $z-w$, $z\cdot w$, z^2 i w^2 ako je:

1) $z=1-2i$, $w=3-i$;
2) $z=-3+5i$, $w=4-7i$;
3) $z=11-5i$, $w=-7-i$.

Izračunaj:

3. **1)** $(1+i)^2$; **2)** $(1-2i)^2$; **3)** $(2-i)^2$;
4) $(1+2i)^3$; **5)** $(3+2i)^3$; **6)** $(i+2)^3$;
7) $(1-i)^4$; **8)** $(2+i)^4$.

4. **1)** $(1-i\sqrt{2})(\sqrt{2}-i)$;
2) $(\sqrt{3}-i)(1+i\sqrt{3})$;
3) $(\sqrt{2}-i)(\sqrt{3}+2i)-(\sqrt{3}+i)(\sqrt{2}-i)$.

5. **1)** $(1-i)(2-i)(3-i)$;
2) $(1+i)(1+2i)(1+3i)$;
3) $\left(\frac{1}{2}-i\right)(1+2i)\left(1-\frac{1}{2}i\right)(2+i)$.

6. **1)** $(1-i)^2\cdot(2-i)^2\cdot(3-i)^2$;
2) $(1-i)^2\cdot(1-2i)^2\cdot(1-3i)^2$;
3) $(1+i)^3\cdot(1+2i)^3\cdot(1+3i)^3$;
4) $(1+2i)^3\cdot(2-i)^3\cdot(1+3i)^3\cdot(3-i)^3$.

7. **1)** $(1-\sqrt{2}+i)(1+\sqrt{2}-i)$;
2) $\left(1-(\sqrt{2}-\sqrt{3})i\right)\left(1+(\sqrt{2}+\sqrt{3})i\right)$;
3) $(1-\sqrt{2}+i\sqrt{3})\cdot(1+\sqrt{2}-i\sqrt{3})$
$\cdot(1-\sqrt{2}-i\sqrt{3})\cdot(1+\sqrt{2}+i\sqrt{3})$.

8. Izračunaj vrijednost brojevnog izraza

$$z^2-z\cdot w+w^2$$

ako je:
1) $z=1-2i$, $w=3+i$;
2) $z=\sqrt{2}-i$, $w=\sqrt{2}+i$;
3) $z=1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i$, $w=1-\sqrt{2}+\sqrt{3}i$.

9. Izračunaj vrijednost izraza za zadanu vrijednost kompleksnog broja:

1) z^3-z^2+2z, za $z_1=1+i$, $z_2=1-i$;
2) z^3+3z^2-z+1, za $z_1=2+i$, $z_2=2-i$;
3) z^4-z^2+2, za $z_1=1+i$, $z_2=1-i$.

10. Dani su kompleksni brojevi $z=-5+8i$ i $w=7-11i$. Odredi realni i imaginarni dio brojeva

1) z^2-w^2; **2)** $(z-w)^2$; **3)** z^2+w^2.

11. Neka je $z=x+yi$. Odredi realni i imaginarni dio kompleksnih brojeva z^2 i z^3.

12. Brojevi $z_1=3+4i$ i $z_2=3-4i$ rješenja su jednadžbe $z^2-6z+25=0$. Provjeri.

13. Brojevi $z_1=2-3i$ i $z_2=2+3i$ rješenja su jednadžbe $z^2-4z+13=0$. Provjeri.

14. **1)** Provjeri je li kompleksni broj $z=1-2i$ rješenje jednadžbe $(1+i)z^2-(3+i)z+4+2i=0$.
2) Je li kompleksni broj $z=1+i$ rješenje jednadžbe $(1+i)z^2-(3+i)z+4+2i=0$?

15. Provjeri jesu li brojevi $z_1=1+i$ i $z_2=2+i$ rješenja jednadžbe $z^2-(3+2i)z+1+3i=0$.

16. Odredi realne brojeve x i y iz jednakosti:

1) $(1-i)x+(1+i)y=i$;
2) $(2-3i)x-(1+4i)y=3+i$;
3) $(x+y)(2-i)+(x-y)(1+3i)=2+3i$.

17. Odredi realne brojeve x i y u svakoj od sljedećih jednakosti:

1) $(x+yi)(2+i)+(x-yi)(1-3i)=5+2i$;
2) $(x+yi)(1-i)+(x-yi)(2+i)=3i$;
3) $(x-yi)(1+4i)-(y-xi)(5-3i)=5+24i$.

18. Ako je $z = 1 + i$, $w = 2 + i$, odredi realne brojeve x i y tako da bude

$$x \cdot z + y \cdot w = z \cdot w.$$

19. Odredi kompleksni broj z iz jednakosti:

$$(z + i)(1 + 2i) + (1 + zi)(3 - 4i) = 1 + 7i.$$

20.* Riješi sustave jednadžbi:

1) $\begin{cases} z + 2w = 1 + i, \\ 3z + iw = 2 - 3i; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2z + w = 7i, \\ zi + w = -1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (1 - i)z - iw = 5 - 4i, \\ (1 + i)z - (1 - 2i)w = 8 - i. \end{cases}$

— ◆ —

21. Izračunaj:

1) i^{77}; **2)** i^{1359}; **3)** i^{2468}.

22. Koliko je:

1) $1 + i^3 + i^6 + i^9 + i^{12} + i^{15}$;

2) $i^{111} + i^{222} + i^{333} + \ldots + i^{999}$?

23. Dokaži da za svaki cijeli broj k vrijedi:

1) $i^k + i^{k+1} + i^{k+2} + i^{k+3} = 0$;

2) $i^k \cdot i^{k+1} \cdot i^{k+2} \cdot i^{k+3} = -1$.

24. Koristeći se činjenicama iz prethodnog zadatka izračunaj:

1) $i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{303}$;

2) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \ldots \cdot i^{303}$.

25. Koliko je $i^{2k-1} + i^{2k+1}$, $k \in \mathbf{Z}$?
Koristeći se dobivenim rezultatom izračunaj:

$$i + i^3 + i^5 + \ldots + i^{111}.$$

26. Koliko je $i^{2k} + i^{2k+2}$, $k \in \mathbf{Z}$?
Koristeći se dobivenim rezultatom izračunaj:

$$i^2 + i^4 + i^6 + \ldots + i^{100}.$$

Izračunaj:

27. **1)** $i^2 \cdot i^5 \cdot i^8 \cdot \ldots \cdot i^{101}$;

2) $i \cdot i^4 \cdot i^7 \cdot i^{10} \cdot \ldots \cdot i^{103}$.

28. $1 - i + i^2 - i^3 + \ldots + i^{100} - i^{101}$.

29. $1 - 2i + 3i^2 - 4i^3 + \ldots - 100i^{99} + 101i^{100}$.

30. **1)** $(1 - i)^5$; **2)** $(1 + i)^8$;

3) $(\sqrt{3} - i)^6$; **4)** $(1 + i\sqrt{3})^9$.

31. Koliko je

1) $(1-i)(1+i)(1+i^2)(1+i^4)(1+i^8)(1+i^{16})$;

2) $(1-i^3)(1+i^3)(1+i^6)(1+i^{12})(1+i^{24})$?

32. Izračunaj:

1) $\left(\dfrac{1 - i}{\sqrt{2}}\right)^4$; **2)** $\left(\dfrac{1 + i}{\sqrt{2}}\right)^6$.

33. Dokaži $\sqrt{1 + i} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2} + 1}{2}} + \sqrt{\dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}}\, i$.

34. Dokaži da za svaki prirodni broj n vrijedi:

$$\left(\frac{1 - i}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = (-i)^n.$$

35. Izračunaj:

1) $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6$; **2)** $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)^9$.

36. Dokaži da za svaki prirodni broj n vrijedi:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{3n} = i^n.$$

1.3. Dijeljenje kompleksnih brojeva

Umnožak dvaju kompleksnih brojeva kompleksni je broj. No onda je i količnik $\frac{z_1}{z_2}$ dvaju kompleksnih brojeva z_1 i z_2 (uz uvjet $z_2 \neq 0$) kompleksan broj. Kako odrediti taj količnik? Kako provesti dijeljenje dvaju kompleksnih brojeva?

Konjugirano kompleksni brojevi

Najprije uvedimo jedan novi pojam.

Ako je $z = x + yi$ bilo koji kompleksni broj, onda broj $\overline{z} = x - yi$ zovemo **konjugirano kompleksni broj broja z.**

Par kompleksnih brojeva z i $\overline{z}$ nazivamo **parom konjugirano kompleksnih brojeva**. To je, dakle, par čiji su realni dijelovi jednaki, a imaginarni dijelovi suprotni su realni brojevi.

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva pozitivan je realni broj.

Lako je provjeriti ovu tvrdnju:

$$(x + yi)(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2.$$

Primjer 1. Odredimo broj $\overline{z}$ za svaki od danih brojeva z te izračunajmo $z \cdot \overline{z}$:

1) $z = -3 + 4i$; **2)** $z = \sqrt{2} - i$; **3)** $z = -0.7i$; **4)** $z = 5$.

1) Konjugirani broj broja $z = -3 + 4i$ je broj $\overline{z} = -3 - 4i$ te je

$$z \cdot \overline{z} = (-3 + 4i)(-3 - 4i) = (-3)^2 - (4i)^2 = 9 - (-16)$$
$$= 9 + 16 = 25.$$

2) Analogno prethodnom primjeru je $\overline{z} = \sqrt{2} + i$ pa je

$$z \cdot \overline{z} = (\sqrt{2} - i)(\sqrt{2} + i) = 3.$$

3) Broj $z = -0.7i$ je imaginarni broj, njegov konjugirani broj je $\overline{z} = 0.7i$, te je $z \cdot \overline{z} = -0.7i \cdot 0.7i = 0.49$.

4) Broj $z = 5$ je realan broj. Takvi su brojevi sami sebi konjugirani te je $z \cdot \overline{z} = 5^2 = 25$.

Konjugirano kompleksni brojevi

Brojevi $z = x + yi$ i $\overline{z} = x - yi$ čine par konjugirano kompleksnih brojeva.

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva realan je i pozitivan broj:

$$(x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2.$$

Primjer 2.

Dokažimo sljedeća svojstva konjugirano kompleksnih brojeva:

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; **2)** $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$; **3)** $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i)} = \overline{(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i}$
$= (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i = (x_1 - y_1 i) + (x_2 - y_2 i) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

2) Dokaz se provodi analogno prethodnom. Provedite ga sami.

3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1 i)}$
$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 y_2 + x_2 y_1)i = (x_1 - y_1 i)(x_2 - y_2 i) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Dijeljenje kompleksnih brojeva

Činjenicu da je $z \cdot \overline{z}$ realan broj iskoristit ćemo pri dijeljenju kompleksnih brojeva. Bit će to postupak analogan onome koji smo provodili pri racionalizaciji nazivnika razlomka uz primjenu identiteta

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b, \quad a \geqslant 0, \quad b \geqslant 0.$$

Neka je, primjerice, $z_1 = 4 + 3i$, $z_2 = 1 + 2i$. Koliko je $z_1 : z_2$?

Zapišimo dijeljenje u obliku razlomka i razlomak proširimo brojem $1 - 2i$, brojem koji je konjugiran broju $1 + 2i$. Tada imamo:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4 + 3i}{1 + 2i} = \frac{(4 + 3i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{10 - 5i}{5} = 2 - i.$$

Isti postupak provodimo i pri dijeljenju bilo kojih dvaju kompleksnih brojeva.

Dijeljenje kompleksnih brojeva

Dva se kompleksna broja $z_1 = x_1 + y_1 i$ i $z_2 = x_2 + y_2 i$ dijele na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} \cdot \frac{x_2 - y_2 i}{x_2 - y_2 i} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + (x_2 y_1 - x_1 y_2) i}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.\end{aligned}$$

Zadatak 1. Za svaka dva kompleksna broja z_1 i z_2 ($z_2 \neq 0$) vrijedi jednakost:

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

Provjeri!

Zadatak 2. Ako je $z_1 = -1 + i$, $z_2 = 3 + i$, $z_3 = 1 + 2i$, izračunaj:

1) $\dfrac{z_3}{z_1 \cdot z_2}$; **2)** $\dfrac{z_2}{z_1 \cdot z_3}$; **3)** $\dfrac{z_1}{z_2 \cdot z_3}$.

Primjer 3. Odredimo kompleksni broj z iz jednakosti:

$$\frac{z}{1 - i} - \frac{\overline{z}}{2 + i} = 3i.$$

Uzmimo da je $z = x + yi$ pa ga uvrstimo u jednakost. Trebamo zatim odrediti realne brojeve x i y. Provedimo dijeljenje kompleksnih brojeva u danoj jednakosti:

$$\frac{(x + yi)(1 + i)}{2} - \frac{(x - yi)(2 - i)}{5} = 3i.$$

Kad sredimo lijevu stranu jednakosti, dobijemo:

$$x - 3y + (7x + 9y)i = 30i.$$

Ovdje se radi o jednakosti kompleksnih brojeva iz koje slijedi sustav linearnih jednadžbi $x - 3y = 0$ i $7x + 9y = 30$.

Rješenje sustava je $x = 3, y = 1$ pa je rješenje zadatka kompleksni broj $z = 3 + i$.

Zadatak 3. Odredi kompleksni broj $a + bi$ iz jednakosti

$$\frac{a + bi}{1 - i} = \frac{2 + i}{1 + 3i}.$$

Zadatci 1.3.

1. Za svaki od danih kompleksnih brojeva z odredi njegov kompleksno konjugirani broj $\overline{z}$:

1) $z = -1 + 3i$; **2)** $z = 1 + \sqrt{22}$;

3) $z = \dfrac{1-\sqrt{2}}{3}i$; **4)** $z = 1-(\sqrt{2}-\sqrt{3})i$;

5) $z = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}i$.

2. Za koje su realne brojeve m i n kompleksni brojevi $z = 2m + n + mi$ i $w = m - (n-3)i$ međusobno kompleksno konjugirani?

3. Odredi $\overline{z}$ ako je:

1) $z = (2-i)(1+2i)$;

2) $z = (\sqrt{3}-i)(1+i\sqrt{3})$;

3) $z = (1+i)(2-i)(3+i)(4-i)$.

Izračunaj:

4. **1)** $\dfrac{3-i}{1+i}$; **2)** $\dfrac{1+2i}{1-i}$; **3)** $\dfrac{-4i}{\sqrt{3}+i}$;

4) $\dfrac{1-7i}{3-i}$; **5)** $\dfrac{1-i}{1+i}$; **6)** $\dfrac{5-4i}{3+2i}$.

5. **1)** $\dfrac{1}{1+i}$; **2)** $\dfrac{2}{1-2i}$;

3) $\dfrac{1+3i}{i}$; **4)** $\dfrac{i}{3-i}$.

6. **1)** $\left(\dfrac{4+3i}{1+3i}+\dfrac{3-4i}{3-i}\right)\cdot\dfrac{3+4i}{10}$;

2) $\dfrac{(1+i)(2+i)}{2-i}-\dfrac{(1-i)(2-i)}{2+i}$.

7. **1)** $\dfrac{(1-2i)^2-(2-i)^2}{(1-i)^3-(1+i)^3}$;

2) $\dfrac{(1+2i)^2-(2+i)^2}{(1+i)^3+(1-i)^3}$.

8. **1)** $\operatorname{Re} z$ ako je $z = \dfrac{1+i}{(2+i)(1-3i)}$;

2) $\operatorname{Im} z$ ako je $z = \dfrac{1-i}{(3-i)(1+2i)}$.

9. **1)** $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z^2-\overline{z}}$ ako je $z = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$;

2) $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z^2+iz}$ ako je $z = \dfrac{\sqrt{2}-i}{3}$.

10. Izračunaj vrijednost brojevnog izraza $\dfrac{z\overline{w}-\overline{z}w}{z^2-w^2}$ ako je:

1) $z = -1+2i$, $w = 2-3i$;

2) $z = 1-i\sqrt{2}$, $w = \sqrt{2}-i$.

11. Ako je $z = 5-2i$, $w = 1-4i$, izračunaj $\dfrac{z\cdot\overline{w}+w\cdot\overline{z}}{\overline{z}-\overline{w}}$.

12. Koliko je $\operatorname{Re} z$ ako je $z = \dfrac{i^{357}}{(1-2i)(3+i)}$?

13. Koliko je $\operatorname{Im} z$ ako je $z = \dfrac{i^{246}}{(1+2i)(3-i)}$?

14. Odredi realne brojeve a i b iz jednakosti:

1) $\dfrac{a+bi}{2-3i} = 1+4i$; **2)** $\dfrac{3+5i}{a+bi} = 1-i$.

15. Dani su kompleksni brojevi $z = 1+2i$, $w = 2-i$. Odredi realne brojeve x i y tako da vrijedi jednakost $\dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{w} = i$.

16. Dani su kompleksni brojevi $z = 1-2i$, $w = 2+i$. Odredi realne brojeve x i y tako da vrijedi jednakost $\dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{w} = i$.

17. Odredi realne brojeve x i y iz jednakosti:

1) $x\cdot\dfrac{1-i}{2-i}+y\cdot\dfrac{2-i}{1-i} = \dfrac{1}{i}$;

2) $x\cdot\dfrac{3+i}{1-2i}-y\cdot\dfrac{1-i}{2+i} = i$.

18. Odredi kompleksni broj z iz jednakosti

1) $z(2-3i)+\overline{z}(3-2i) = 4-4i$;

2) $z(2+i)-\overline{z}(1-3i) = -3-2i$.