

# 1 Brojevi

slika iz jednog priručnika o računanju na prste (15.st.)



- Prirodni i cijeli brojevi..... 2
- Racionalni brojevi..... 9
- Realni brojevi..... 18



Upitate li nekoga, kome matematika i nije osobito bliska, čime se matematičari bave, možete očekivati odgovor: **brojevima!** I premda baš i nije točan, odgovor nije neobičan. Jer, prva iskustva s matematikom u svakog su čovjeka vezana uz brojeve i računanje. A još ne tako davno, prvoškolski su se udžbenici iz matematike zvali **Računice**. Kada su ljudi počeli rabiti brojeve? Na ovo pitanje nemoguće je dati odgovor. Brojevi i njihovo zapisivanje nastajali su i razvijali se u dugotraјnom povijesnom procesu<sup>1</sup>.

U ovom poglavlju dat ćemo pregled skupova brojeva koje smo do sada upoznali.

## 1.1. Prirodni i cijeli brojevi

Prirodni brojevi su brojevi 1, 2, 3, 4, 5, ... Njima se služimo pri brojenju ili prebrajanju. Prirodnim brojem iskazujemo brojnost nekog skupa, odgovaramo na pitanje **koliko** je u skupu članova.

Postoji najmanji prirodni broj, to je broj 1. Ne postoji najveći prirodni broj. Iza ma kako velikog prirodnog broja  $n$  slijedi veći ( $n + 1$ ) što znači da je skup prirodnih brojeva **beskonačan**.

### Skup prirodnih brojeva

Skup **prirodnih brojeva** označavamo s **N**.

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots\}.$$



Istražite

### PROSTI BROJEVI

Prirodni broj koji osim samoga sebe i broja 1 nema drugih djelitelja zove se **prost** ili **primbroj**. Evo svih prostih brojeva koji su manji od 100:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Nastavi ovaj niz ispisujući sve proste brojeve manje od 200. Što misliš, ima li tom ispisivanju kraja? Je li skup prostih brojeva beskonačan?

Starogrčki matematičar i fizičar Eratosten "pronalazio" je proste brojeve postupkom *prosijavanja*. Istraži o kakvom je postupku riječ. Posjeti u svrhu traganja za odgovorom <http://element.hr/plus/autosieve/medium>.



<sup>1</sup> Vidjeti PowerPointovu prezentaciju *O podrijetlu brojeva*, [www.element.hr/plus](http://www.element.hr/plus) (Matematika plus).

Za prirodni broj  $a$  kažemo da je djeljiv prirodnim brojem  $b$  ako postoji prirodni broj  $k$  takav da je  $a = k \cdot b$ .

Kažemo da je  $a$  **višekratnik** broja  $b$  ili da je  $b$  **djeljitelj** broja  $a$ .

**Najveći zajednički djeljitelj** ili mjera (oznaka  $M(a, b)$ ) brojeva  $a$  i  $b$  je najveći broj koji dijeli te brojeve.

**Najmanji zajednički višekratnik** (oznaka  $V(a, b)$ ) brojeva  $a$  i  $b$  je najmanji prirodni broj koji je djeljiv s oba ta broja.

Zbroj dvaju prirodnih brojeva uvijek je prirodan broj. Kažemo da je skup prirodnih brojeva **zatvoren** s obzirom na zbrajanje. A je li zatvoren s obzirom na oduzimanje? Drugim riječima, je li razlika  $m - n$  dvaju prirodnih brojeva uvijek prirodni broj? Ne, razlika dvaju prirodnih brojeva od kojih je prvi manji ili jednak drugom nije prirodan broj. To je razlog za proširenje skupa  $\mathbb{N}$  negativnim cijelim brojevima i nulom.

### Povijesni kutak



#### KAKO SU BROJEVE ZAPISIVALI NAŠI PREDCI?

Tijekom ljudske povijesti u raznim društvenim zajednicama razvili su se različiti zapisi prirodnih brojeva. Razlikujemo **pozicijski** i **nepozicijski sustav zapisa**.

U nepozicijskom svaku znamenka nosi istu brojevnu vrijednost bez obzira na njezino mjesto (poziciju) u zapisu broja. Jedan je takav primjer i rimski zapis. Primjerice, CCXXIX znači broj  $100 + 100 + 10 + 10 + (10 - 1) = 229$ . Znak C uvijek nosi brojevnu vrijednost 100, a znak X vrijednost 10.



U pozicijskim sustavima, kakav je i ovaj naš suvremeni, upravo je obrnuto. Znamenke nose brojevne vrijednosti koje ovise o njihovu položaju (poziciji) u zapisu. Tako primjerice, 333 znači  $3 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 3$ . Dakle, prva trojka znači 300, druga 30, a treća 3 jedinice.



Druga bitna karakteristika zapisa prirodnog broja jest njegova **osnovica** ili **baza**. Danas se u cijelom svijetu rabi **dekadski** brojevni sustav kojemu je osnovica 10. Vjerojatni razlog je taj što čovjek na obje ruke ima ukupno 10 prstiju. Postoje i brojevni sustavi s drugim osnovicama, primjerice binarni na kojem počiva rad elektroničkih računala.

Pri zapisivanju brojeva nerijetko su se uzimala slova pisma. Tako je primjerice u rimskom i grčkom zapisivanju ali i u staroslavenskoj glagoljici koja se u hrvatskim krajevima zadržala gotovo 10 stoljeća.

#### Istražite:

1. Kako su brojeve zapisivali i s njima računali stari Rimljani?
2. Kako su naši predci zapisivali brojeve koristeći se glagoljicom?
3. Navedite još neki primjer nedekadskog brojevnog sustava. Možete li opisati osnovne značajke binarnog brojevnog sustava?

Negativni cijeli brojevi su se “udomačili” u našoj svakodnevničkoj životnoj situaciji. Njima zapisujemo temperaturu ispod ništice, visinu vodostaja rijeke koja je manja od one iskazane nulom, dubinu mora, stanje na tekućem ili nekom drugom bankovnom računu itd.

Prirodni brojevi zajedno s negativnim cijelim brojevima i nulom čine skup cijelih brojeva.

### Skup cijelih brojeva

Skup cijelih brojeva označavamo sa **Z**:

$$\mathbf{Z} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

#### Primjer 1.

Klijent banke je na tekućem računu imao 238 kuna. Podigao je na bankomatu 300 kuna. Isti dan je preko POS uređaja platio u trgovini račun od 139 kuna. Sada je njegov tekući račun “u minusu”. Objasni što znači “u minusu”! Koliko je točno stanje na njegovom računu?

► Klijent je podigao s računa više novaca nego što je bilo na računu, zato duguje banci i kažemo da mu je račun “u minusu”.

Nakon što je podigao 300 kuna, stanje na računu je bilo:

$$238 - 300 = -62 \text{ kn.}$$

Nakon plaćanja u trgovini stanje je:

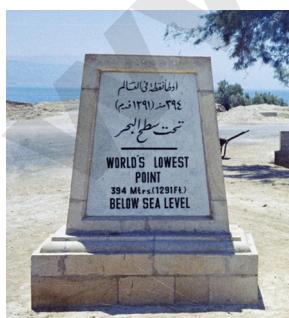
$$-62 - 139 = -201 \text{ kn.}$$

To znači da banci duguje 201 kunu.

#### Zadatak 1. Nadmorska visina

Mrtvo more je jezero površine  $600 \text{ km}^2$ . Nadmorska visina njegove površine iznosi  $-418 \text{ m}$ . Dno jezera doseže  $-794 \text{ m}$ . *The Challenger Deep* najniža je točka na Zemlji, a nalazi se u Tihom oceanu na južnom dijelu Marijanske brazde na nadmorskoj visini  $-10\,971 \text{ m}$ . Najviša točka iznad razine mora je *Mount Everest* na granici Tibeta i Nepala. Njezina je nadmorska visina  $8848 \text{ m}$ .

Planinski vrh *Chimborazo* u Ekvadoru je najudaljenija točka od središta Zemlje. Ta udaljenost iznosi  $6\,384.4 \text{ km}$  što je za oko  $2 \text{ km}$  udaljenije nego *Mount Everest*. Posljedica je činjenice da Zemlja nije sfera već je spljoštena na polovima, a *Chimborazo* je u blizini ekvatora.



- 1) Kolika je najveća dubina Mrtvog mora?
- 2) Kolika je razlika između nadmorskih visina najniže i najviše točke na Zemlji?
- 3) Kolika je udaljenost *Mount Everesta* od središta Zemlje?



## Za radoznaće

### PRIČA O NULI

Nula, naoko ništa neobično, broj kao i svaki drugi!  
Je li uistinu tako? Pogledajmo ove jednakosti:

$$a + 0 = a, \quad a \cdot 0 = 0, \quad a - a = 0, \quad a^0 = 1.$$

*S nulom se ne smije dijeliti*, učimo još u osnovnoj školi. A zašto? Iz  $\frac{a}{0} = b$  slijedi  $a = b \cdot 0$ , pa imamo ove dvije mogućnosti:



(1) ako je  $a = 0$ , onda je  $0 = b \cdot 0$  i ta je jednakost ispunjena za svaki broj  $b$ . Dakle, dijeljenje je tada **neodređeno**. Rezultat dijeljenja je bilo koji broj  $b$ ;



(2) ako je  $a \neq 0$ , jednakost  $a = b \cdot 0$  nije ispunjena niti za jedan broj  $b$ . Naime, s njezine lijeve strane je broj različit od nule, a s desne nula. U ovom slučaju dijeljenje nije definirano, ono **nije moguće**.

Nula je cijeli broj. Ona nije prirodni broj **po definiciji**.

Prema nekim povjesničarima matematike nulu su uveli Kinezi. Neki drugi pripisuju njezinu pojavu indijskim matematičarima iz 6. st., od kojih potječe i njezina suvremena oznaka. Njezin je naziv latinskog podrijetla (lat. *nullus* = nijedan).



### Iz zabavne matematike

#### LEWIS CARROLL

Lewis Carroll, čoven po svojim knjigama o Alisi, pseudonim je Charlesa Dodgsona, engleskog matematičara, profesora na *Christ Church*, najvećem koledžu Sveučilišta u Oxfordu. Carroll je rado zabavljaо svoje prijatelje raznim igrama s brojevima.

Evo jedne od njih:

Igru igraju dva igrača. Polazeći od broja 1 oni naizmjence dodaju prirodne brojeve po volji, ali svaki put ne veći od 10. Pobjednik je onaj koji prvi dosegne broj 100. Kako treba igrati neki igrač kako bi pobijedio u ovoj igri?

**Rješenje:** Drugi igrač odabire uvijek onaj broj koji je razlika broja 11 i onog koji je odabrao prvi igrač. Carroll je razradio ovu ideju te stvorio igru koja je poznata kao *Arithmetical Croquet*.





## Kutak plus



Gauss kao osmogodišnji dječak

Danas, kad gotovo u svakom džepu imamo kalkulator (ne zaboravite da ga imate i na svojem mobilnom telefonu) manje je važno računanje "napamet", ali su dosjetke i snalažljivost u računanju vještine koje će uvijek biti na cijeni. Jedna je takva, osobito popularna dosjetka vezana uz ime njemačkog matematičara Carla Friedricha Gaussa (1777.–1855.), često nazivanog *princeps mathematicorum* (lat. princem svih matematičara).

Kad je Gauss bio prvoškolac, njegov je učitelj zadao učenicima da izračunaju zbroj prvih 100 prirodnih brojeva. Želio ih je zaposliti na neko vrijeme kako bi imao malo mira, ali se nemalo iznenadio jer je već nakon minuti-dvije Gauss dojavio da ima rješenje.

Dobio ga je združivši brojeve u parove, prvi s posljednjim ( $1 + 100$ ), drugi s pretposljednjim ( $2 + 99$ ), treći s prepretposljednjim ( $3 + 98$ ) itd. Takvih parova je 50, a zbroj dvaju pribrojnika u svakom paru je isti, iznosi 101. Konačan je rezultat  $50 \cdot 101 = 5050$ .

Opisani se Gaussov postupak može proširiti na zbroj ma koliko prvih prirodnih brojeva te se tako dobije:

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Provjeri ovu jednakost za neke brojeve  $n$ .

Na isti način možemo računati i zbroj prvih  $n$  parnih brojeva. No kad već imamo izvedenu formulu za zbroj prvih  $n$  prirodnih brojeva,  $S(n)$ , možemo postupiti i na ovaj način:

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1).$$

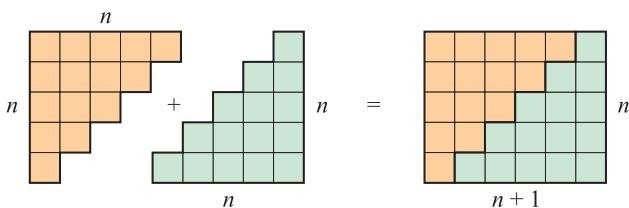
### Riješi zadatke:

1. Izračunaj zbroj prvih  $n$  neparnih prirodnih brojeva.
2. Koliko je  $1 + 4 + 7 + \dots + 100$ ?
3. Koliki je zbroj svih troznamenkastih brojeva koji pri dijeljenju s 5 daju ostatak 3?
4. Zbroj prvih  $n$  prirodnih brojeva jednak je 3003. Koliki je  $n$ ?
5. Broj  $\frac{n(n+1)}{2}$  je prirođan broj za svaki prirodni broj  $n$ . Zašto? Kojom znamenkom može taj broj završavati? Postoji li takav  $n$  za koji je  $1 + 2 + 3 + \dots + n = 5555$ ?

### Bez riječi

Sljedeće sličice ilustriraju Gaussov dosjetku u geometrijskoj izvedbi. Možete li je protumačiti?

Želite li se potanje pozabaviti ovom temom, upućujemo vas na [www.element.hr/plus](http://www.element.hr/plus).



## Zadatci 1.1.

- 1.**
  - 1)** Zapiši prirodni broj koji neposredno slijedi iza prirodnog broja  $n$ .
  - 2)** Zapiši prirodni broj koji neposredno prethodi prirodnom broju  $n - 2$ . Kad zadatak ima rješenje?
  - 3)** Zapiši broj koji je za 2 veći od zbroja brojeva  $m$  i  $n$ .
  - 4)** Zapiši broj koji je dvostruko veći od razlike brojeva  $a$  i  $b$ .
  - 5)** Zapiši broj koji je tri puta manji od umnoška brojeva  $a$  i  $b$ .
- 2.**
  - 1)** Zapiši parni broj koji slijedi iza broja  $2n$ .
  - 2)** Zapiši neparni broj koji prethodi broju  $2n - 1$ . Kada zadatak ima rješenje?
  - 3)** Zapiši broj koji neposredno slijedi iza broja  $2n + 5$ . Je li taj broj paran ili neparan?
  - 4)** Zapiši broj koji neposredno prethodi broju  $n + 3$ . Je li taj broj paran ili neparan?
- 3.** Odredi najveći zajednički djelitelj brojeva:
 

<b>1)</b> 36 i 45;	<b>2)</b> 105 i 42;
<b>3)</b> 39 i 52;	<b>4)</b> 18 i 126;
<b>5)</b> 125, 400 i 375;	<b>6)</b> 44, 242 i 132.
- 4.** Odredi najmanji zajednički višekratnik brojeva:
 

<b>1)</b> 36 i 24;	<b>2)</b> 22 i 4;	<b>3)</b> 42 i 120;
<b>4)</b> 84 i 105;	<b>5)</b> 16, 24 i 40;	<b>6)</b> 18, 30 i 45.
- 5.** Jana je ubrala 6 bijelih i 15 crvenih ruža. Koliko najviše može složiti jednakih buketa, a da pritom iskoristi sve ruže?
- 6.** Stanko kupuje naranče i limune u trgovini. Naranče su pakirane po 9 komada, a limuni po 4 komada. Ako želi kupiti jednak broj limuna i naranči, koliko paketa mora kupiti?
- 7.** S autobusne stanice autobus za Mikuliće kreće svakih 35 minuta, a autobus za Zaprešić svakih 20 minuta. Oba autobusa polaze svako jutro u 5 sati.
  - 1)** Nakon koliko će minuta opet zajedno krenuti sa stanice?
  - 2)** U koliko će to biti sati?
- 8.**
  - 1)** Zapiši sve cijele brojeve koji su između cijelih brojeva  $k - 1$  i  $k + 5$ .
- 9.** Marko je dvostruko stariji od Filipa, a Filip je 3 godine stariji od Luke. Ako je Luki  $n$  godina, koliko ukupno godina imaju sva trojica?
- 10.** Zamislí neki broj. Dodaj mu 1 pa zbroj pomnoži s 4. Zatim oduzmi 4 pa dobiveni rezultat podijeli s 4. Koji je broj rezultat?
 

Ponovi ovaj postupak nekoliko puta. Što primjećuješ? Obrazloži!
- 11.** Na polici se nalazi šest svezaka *Opća enciklopedije*, poredanih slijeva u desno, jedan do drugog. Svaki svezak ima 515 stranica ne računajući korice.
  - 1)** Koliko ukupno stranica ima *Opća enciklopedija*?
  - 2)** Koliko stranica ima između 313. stranice drugog sveska i 127. stranice petog?
  - 3)** Brojimo li stranice enciklopedije redom te izbrojimo 1784, u kojem svesku i na kojoj stranici smo se zaustavili?
  - 4)** Brojimo li stranice enciklopedije redom, ali otraga prema naprijed te se zaustavimo na broju 3000, u kojem svesku i na kojoj stranici smo se zaustavili?
- 12.** Broj 100 zapiši povezujući računskim operacijama:
 

<b>1)</b> četiri jedinice;	<b>2)</b> četiri trojke;
<b>3)</b> četiri petice.	
- 13.** Ispiši redom brojeve 1 2 3 4 5 6 7 8 9. Poveži te brojeve znakovima + i – (koristeći ih ukupno triput) tako da dobiješ 100.
- 14.** Zapiši broj 100 uporabom svih 10 znamenki i uporabom četiriju osnovnih računskih operacija.
- 15.** Riješi rebus:
 

O	H	O	H	O
+	A	H	A	H
<hr/>				
A	H	A	H	A
- 16.** Odredi četiri uzastopna prirodna broja kojima je zbroj jednak 1258.

17. Zbroj pet uzastopnih parnih prirodnih brojeva je 6 080. Koji su to brojevi?

18. Koja je posljednja znamenka umnoška  $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots \cdot 99$ ?

19. S koliko nula završava umnožak  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots \cdot 33$ ?

20. Koja je posljednja znamenka umnoška prvih stotinu prostih brojeva?

21. Prepiši, pa umjesto kvadratiča upiši broj tako da dobiješ točne jednakosti:

1)  $-11 + \square = -24$ ;

2)  $\square - (-45) = 13$ ;

3)  $23 + \square = -1$ ;

4)  $\square + (-17) = -34$ ;

5)  $33 - (-44) = \square$ ;

6)  $-75 - 28 = \square$ ;

7)  $-61 + \square = 77$ ;

8)  $\square - (-111) = -205$ .

22. Izračunaj:

1)  $-5 \cdot (2 - 11) - 4 \cdot (3 - 12)$ ;

2)  $2 \cdot (-3) - 4 \cdot (-5) + (-6) \cdot (-7)$ ;

3)  $(-12) \cdot (-11) - (-10) \cdot (-15)$ ;

4)  $-12 \cdot (-3) - 5 \cdot 14 - 11$ .

23. Izračunaj:

1)  $-12 + 12 \cdot 12 - 12 : 12$ ;

2)  $12 + 12 \cdot (12 - 12) : 12$ ;

3)  $(-12 + 12) \cdot 12 - 12 : (-12)$ ;

4)  $(12 + 12) \cdot (-12 - 12) : (-12)$ ;

5)  $-12 + (-12 \cdot 12 - 12) : 12$ ;

6)  $12 - 12 \cdot (12 - 12 : 12)$ ;

7)  $(-12 + 12 \cdot (-12) - 12) : (-12)$ .

24. Izračunaj:

1)  $5+5\cdot\{5+5\cdot[15:3-5\cdot(20:4-5)-5]:5\}$ ;

2)  $20 - 2 \cdot [15 - 50 : (10 \cdot 3 - 5) - 3]$ ;

3)  $40 : 8 - [16 + 4 : (28 - 4 \cdot 7) \cdot 2 - 8]$ ;

4)  $12 : 4 + 2 \cdot (13 - 7) : 3 - [4 - (27 : 3 - 9)]$ ;

5)  $-5 + [4 \cdot (-2 + 8 : (-4)) - 1]$ ;

6)  $[12 : (-11 - 20 : 2) - 7] + 9 \cdot (-3)$ .

25. Izračunaj:

1)  $4 - \{-1 + [-5 + 4 - (-3 - 1) + 2] - 1\} + (-2 + 3)$ ;

2)  $17 - \{(2 - 17) - [5 - 9 + (10 - 11) + 12] - 10\} + (-4 - 33)$ ;

3)  $-2 - [-2 + (-2 - 2 + 2) + 2] - (2 + 2 - 2)$ ;

4)  $-1 - \{-1 - [-1 - (-1 - 1) + 1] + 1\} + 1$ ;

5)  $7 \cdot (-4) + [-4 - (36:6+14) - 81:9] : (-11)$ ;

6)  $-58 - [64 \cdot (-4 + 2 \cdot 2) - 6] + 255 : 5$ .

26. Prepiši izraz i postavi zagrade tako da dobiješ traženi rezultat:

1)  $16 : 4 + 4 - 2 = 0$ ;

2)  $5 + 15 \cdot 4 - 10 = 70$ ;

3)  $14 : 2 \cdot 1 + 5 = 42$ ;

4)  $16 - 12 : 4 + 3 : 3 = 2$ ;

5)  $100 : 10 \cdot 10 + 100 = 101$ .

27. Ana na tekućem računu ima 500 kuna. U knjižari je karticom tekućeg računa platila 10 bilježnica po 3 kn, 3 olovke po 2 kn i 7 knjiga po 70 kn. Koliko joj je stanje na računu nakon toga?

28. Računamo:  $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \dots$ . Ako imamo konačan broj pribrojnika, recimo  $n$ , koliki je rezultat ovog zbrajanja?

29. Najviša ikad izmjerena temperatura zraka na Zemlji zabilježena je u Libiji 13.9.1922. Iznosila je  $57.8^{\circ}\text{C}$  ili  $136^{\circ}\text{F}$ . Najniža je izmjerena na Antarktici (*Vostok Station*) 12.1.1983., kada je termometar pokazivao  $-89.2^{\circ}\text{C}$  ili  $-128.6^{\circ}\text{F}$ . Kolika je razlika između najniže i najviše temperature ikad izmjerene na Zemlji?

U Hrvatskoj je dosad najviša izmjerena temperatura iznosila  $42.8^{\circ}\text{C}$  ili  $109^{\circ}\text{F}$ , a izmjerena je 5.8.1998. u Pločama. Najniža temperatura izmjerena je u Čakovcu 3.2.1929., a bilo je  $-35.5^{\circ}\text{C}$  ili  $-31.5^{\circ}\text{F}$ .

Kolika je razlika između najviše i najniže izmjerene temperature u Hrvatskoj?

30. Arhimed je živio od 287. g. pr. Kr. do 212. g. pr. Kr. To bismo jednostavnije mogli zapisati: Arhimed je "živio" od -287. do -212. g. Koliko je godina poživio Arhimed? Odgovori na isto pitanje za sljedeće matematičare:

Tales je "živio" od -620. do -540. godine.

Vitruvije je "živio" od -75. do 15. godine.

Heron je živio od 10. do 70. godine.

## 1.2. Racionalni brojevi

Zbroj i razlika svakih dvaju cijelih brojeva cijeli je broj. I umnožak svakih dvaju cijelih brojeva je cijeli broj. No količnik dvaju cijelih brojeva općenito nije cijeli broj. Skup cijelih brojeva nije zatvoren s obzirom na dijeljenje. Ta činjenica nameće potrebu za proširenjem skupa cijelih brojeva. Tako dobivamo skup **racionalnih brojeva**.

Racionalni su brojevi količnici cijelih brojeva. Možemo ih zapisivati u obliku razlomaka. Evo nekoliko primjera racionalnih brojeva:

$$1 : 2 = \frac{1}{2}, \quad -3 : 4 = \frac{-3}{4}, \quad 111 : 25 = \frac{111}{25}, \quad 7 : (-33) = \frac{7}{-33}.$$

Dijeljenje s nulom nije izvedivo pa u nazivniku razlomka ne smije biti nula.

Svaki je cijeli broj ujedno i racionalan. Obrazloži!

## Skup racionalnih brojeva

Količnik  $m : n$  dvaju cijelih brojeva  $m$  i  $n$  ( $n \neq 0$ ) jest **racionalan broj**. Racionalan broj  $m : n$  zapisujemo u obliku razlomka  $\frac{m}{n}$ . Broj  $m$  je brojnik, a broj  $n$  nazivnik razlomka.

Skup racionalnih brojeva označavamo s  **$\mathbf{Q}$** :

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0 \right\}$$

Provđemo li razlomkom zadano dijeljenje, dobit ćemo racionalan broj zapisan u **decimalnom obliku**. Tako je primjerice

$$\frac{3}{10} = 0.3, \quad \frac{17}{8} = 2.125, \quad \frac{315}{32} = 9.84375, \quad \frac{-17}{25} = -0.68.$$

Svi navedeni primjeri konačni su decimalni brojevi. Postoje i beskonačni decimalni racionalni brojevi:

$$\frac{3}{7} = 3 : 7 = 0.\overline{428571}$$

Valja uočiti kako se u decimalnom zapisu svakog od triju navedenih brojeva uzastopce ponavlja skupina znamenki. U prvom primjeru to su znamenke 428571, u drugom je to znamenka 3, a u trećem su to znamenke 90. Kažemo da su ovakvi brojevi **periodički**. Skupinu znamenki koja se uzastopce ponavlja zovemo **period**. Ovakve brojeve zapisujemo tako da navedemo sve znamenke jednog perioda,

a nad prvu i posljednju znamenku stavimo točku. To je, naravno, više načelno nego praktično izvedivo rješenje jer period može ponekad biti toliko velik da ga nema smisla navoditi. Brojeve koji su odabrani za primjere zapisujemo:

$$0.\dot{4}2857\ddot{1}, \quad 0.\dot{3}, \quad -0.\dot{9}\ddot{0}.$$

Zbog čega pri decimalnom zapisu racionalnog broja dolazi do ponavljanja skupine znamenki? Odgovor na ovo pitanje bit će sasvim jasan provedete li pisano dijeljenje (ne dijeljenje džepnim računalom ili bilo kakvim sličnim pomagalom) brojnika i nazivnika u danom razlomku:

$$\begin{array}{r} 26 : 111 = 0.234 \\ 260 \\ 380 \\ 470 \\ 26 \end{array}$$

U ovom trenutku došli smo do početne pozicije. Ako nastavimo dijeljenje, u količniku će se ponavljati niz znamenki 234.

Bez obzira je li decimalni zapis nekog racionalnog broja konačan ili beskonačan, taj je zapis *potpuno poznat* i može se odrediti bilo koja njegova znamenka.

### Primjer 1.

Koja je znamenka na 1001. mjestu iza decimalne točke u decimalnom zapisu broja  $\frac{3}{7}$ ?

Vidjeli smo da je  $\frac{3}{7} = 0.\dot{4}2857\ddot{1}$ , tj. uzastopce se ponavlja skupina od 6 znamenki.

Podijelimo li 1001 sa 6, dobit ćemo količnik 166 i ostatak 5. Stoga će se skupina od 6 navedenih znamenki izrediti 166 puta i potom će slijediti još pet znamenki. Zaključujemo da je 1001. po redu znamenka 7.

$$\frac{3}{7} = 0.\textcolor{red}{4}\textcolor{blue}{2}\textcolor{green}{8}\textcolor{orange}{5}\textcolor{brown}{7}\textcolor{teal}{1}\textcolor{red}{4}\textcolor{blue}{2}\textcolor{green}{8}\textcolor{orange}{5}\textcolor{brown}{7}\textcolor{teal}{1}\textcolor{red}{4}\textcolor{blue}{2}\textcolor{green}{8}\textcolor{orange}{5}\textcolor{brown}{7}\textcolor{teal}{1}\dots$$

### Zadatak 1.

Koja je znamenka u broju

$$0.123456789101112131415\dots$$

na 77. mjestu iza decimalne točke? Je li taj broj racionalan? Obrazloži!

## Jednakost racionalnih brojeva

Prirodno se nameće pitanje: Kad su dva racionalna broja (razlomka) jednakia?

### Jednakost racionalnih brojeva

Racionalni brojevi (razlomci)  $\frac{a}{b}$  i  $\frac{c}{d}$  jednaki su ako i samo ako je umnožak  $a \cdot d$  jednak umnošku  $b \cdot c$ :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \cdot d = b \cdot c$$

### Primjer 2.

Obrazložimo jednakosti:

$$1) \frac{2}{3} = \frac{6}{9}; \quad 2) \frac{-45}{-108} = \frac{5}{12}; \quad 3) \frac{-4}{7} = \frac{-20}{35}.$$

1)  $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$  jer je  $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$ .

2)  $\frac{-45}{-108} = \frac{5}{12}$  jer je  $-45 \cdot 12 = 5 \cdot (-108)$ .

3)  $\frac{-4}{7} = \frac{-20}{35}$  jer je  $(-4) \cdot 35 = (-20) \cdot 7$ .

Primijetimo da vrijedi  $\frac{-2}{5} = \frac{2}{-5}$  jer je  $(-2) \cdot (-5) = 5 \cdot 2$ . Oba broja, i  $\frac{-2}{5}$  i  $\frac{2}{-5}$  zapisujemo kao  $-\frac{2}{5}$ , te su takvi brojevi negativni racionalni brojevi:

$$\frac{-2}{5} = \frac{2}{-5} = -\frac{2}{5}.$$



**Zadatak 2.** Odredi broj  $x$  tako da vrijedi:

$$1) \frac{15}{x} = \frac{35}{42}; \quad 2) \frac{5}{12} = \frac{20}{x+1}; \quad 3) -\frac{3}{8} = \frac{12}{x}.$$

## Kraćenje i proširivanje razlomaka

Za svaki racionalni broj  $\frac{a}{b}$  i svaki broj  $m$  različit od nule vrijedi:

$$\frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{a}{b}.$$

Ovu jednakost lako je provjeriti. Ona izravno slijedi iz definicije jednakosti razlomaka i svojstava množenja cijelih brojeva:

$$(a \cdot m) \cdot b = a \cdot (b \cdot m).$$

### Proširivanje i kraćenje razlomka

proširivanje



$$\frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{a}{b}$$



kraćenje

Istaknuta jednakost možemo čitati dvostrano. Čitamo li je zdesna u lijevo, tada je riječ o **proširivanju razlomka**, a čitamo li je slijeva u desno, tada govorimo o **kraćenju razlomka**.

### Primjer 3.

Svaki se racionalni broj može kraćenjem dovesti na oblik u kojem brojnik i nazivnik *nemaju zajedničkih djelitelja*.

$$\frac{4}{6} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{3}, \quad -\frac{21}{28} = -\frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7} = -\frac{3}{4}.$$

Od dvaju razlomaka, čiji su nazivnici jednaki prirodni brojevi, veći je onaj koji ima veći brojnik. Tako se proširivanje razlomaka može koristiti i za usporedbu razlomaka.

### Primjer 4.

Koji je broj veći,  $x = \frac{3}{8}$  ili  $y = \frac{4}{11}$ ?

Da bismo ih mogli usporediti, brojeve svodimo na zajednički nazivnik:

$$x = \frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 11}{8 \cdot 11} = \frac{33}{88}, \quad y = \frac{4}{11} = \frac{4 \cdot 8}{11 \cdot 8} = \frac{32}{88}.$$

Vidimo da je  $x > y$ .

**Zadatak 3.** Poredaj po veličini brojeve:  $\frac{4}{5}, \frac{14}{15}, \frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{23}{30}$ .

## Operacije s racionalnim brojevima

Pri zbrajanju racionalnih brojeva razlomke svodimo na zajednički nazivnik. U tu svrhu možemo uzeti umnožak nazivnika kao zajednički nazivnik:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Računajući ovako uvijek ćemo dobiti ispravan rezultat, ali brojnik i nazivnik dobivenog razlomka vrlo često će se moći skratiti:

$$\frac{5}{6} + \frac{3}{8} = \frac{5 \cdot 8 + 3 \cdot 6}{6 \cdot 8} = \frac{58}{48} = \frac{29}{24}.$$

Jednostavniji se račun dobiva ako za zajednički nazivnik odaberemo *najmanji zajednički višekratnik* nazivnika. U ovom primjeru za zajednički nazivnik možemo uzeti  $V(6, 8) = 24$ :

$$\frac{5}{6} + \frac{3}{8} = \frac{5 \cdot 4 + 3 \cdot 3}{24} = \frac{29}{24}.$$

Oduzimanje racionalnih brojeva vršimo na analogan način.

### Zbrajanje i oduzimanje racionalnih brojeva

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

Prisjetimo se još definicije umnoška i količnika racionalnih brojeva:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Posebno, primijetimo da vrijedi

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = 1.$$

Broj  $\frac{b}{a}$  nazivamo **recipročnim brojem** broja  $\frac{a}{b}$  i označavamo s

$$\frac{b}{a} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-1}.$$

Dakle, recipročni broj zadanoг racionalnог broja ima zamijenjen brojnik i nazivnik. Primijetimo da je

$$\frac{b}{a} = 1 : \frac{a}{b}.$$

Dijeljenje racionalnih brojeva zato se svodi na množenje recipročnim brojem:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

### Množenje i dijeljenje racionalnih brojeva

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Količnik dvaju razlomaka može se zapisati u obliku dvojnog razlomka:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}.$$

Pritom  $a$  i  $d$  nazivamo vanjskim, a  $b$  i  $c$  unutarnjim članovima dvojnog razlomka. Ovo pamtimo kao pravilo: *razlomci se dijele tako da se prvi razlomak pomnoži recipročnim razlomkom drugog.*

#### Povijesni kutak



#### ARITHMETIKA HORVATSZKA – prvi udžbenik matematike na hrvatskom jeziku



**Arithmetika horvatzka**, svećenika Mihalja Šiloboda-Bolšića (Podgrađe pod Okićem 1724. – Sv. Nedelja 1787.) mali je priručnik pisan kajkavskim narječjem i tiskan u Zagrebu 1758. g. Od četiriju većih dijelova, prva tri se bave brojevima i operacijama s njima dok četvrti sadrži praktične račune vezane uz trgovinu, dugovanja, troškove i sl. Knjižica je u puku bila vrlo popularna pa se u ono doba nevježi u računanju govorilo „neka se primi Šiloboda”, a ako je netko bio vješt u računu pohvalili bi ga da „računa kao Šilobod”.

Knjižica je sadržavala i nekoliko zagonetki. Jednu od njih, u izvornom obliku vidite na slici dolje. Tu je odmah dano i rješenje. Pokušajte ovu zagonetku pročitati s razumijevanjem.

##### Od treb Zajczew.

D Vá Otczi, y dvá Szini vlovilisz negdà  
trí zajcze, y vßzakogaje dopal jeden  
zajecz. Povech: kák tó more biti?

Moralje biti Otecz, Szin, y Szina Szín  
tó jefzr vnuk. Tér tak dva Otczi, y dvá  
szini, y vßzakomu jeden zajecz. Odkudà  
velé diaki.

Dodajmo još kako je godine 1766. franjevac Mate Zoričić, objavio svoju **Aritmetiku**, knjižicu vrlo sličnu Šilobodovoј. Obje aritmetike namijenjene su širokom puku koji je u računu bio potpuno neuk što je, kako piše Zoričić, glavno zlo i uzrok siromaštva i bijede u narodu.

## Zadatci 1.2.

1. Razlomke  $\frac{5}{2}$ ,  $\frac{5}{4}$ ,  $\frac{3}{8}$ ,  $\frac{15}{16}$  prikaži u obliku decimalnog broja.
2. Brojeve 0.5, 0.25, 0.125, 0.75, 0.625 prikaži u obliku razlomka.
3. Poredaj po veličini brojeve:  $\frac{2}{3}$ , 66 %, 0.666, 0.6.
4. Koji su od sljedećih brojeva jednaki broju 2?  
 $\frac{2}{10}$ ,  $\frac{2}{1}$ , 0.2, 2.00,  $\frac{10}{5}$ ,  $\frac{5}{10}$ , 0.5,  $\frac{8}{4}$ ,  $\frac{-2}{-4}$ ,  $\frac{-2}{-1}$ ,  $\frac{124}{62}$ ,  $1\frac{3}{3}$ ,  $\frac{2}{2}$ .
5. Napiši pet brojeva koji se nalaze između brojeva:  
 1)  $\frac{5}{12}$  i  $\frac{9}{12}$ ; 2) 3 i  $3\frac{1}{10}$ ; 3)  $-\frac{7}{9}$  i  $-\frac{8}{9}$ .
6. 1) Ako je  $\frac{1}{3} = 0.\dot{3}$ , koliko je  $\frac{1}{30}$ ?  
 2) Ako je  $\frac{2}{7} = 0.\dot{2}8571\dot{4}$ , koliko je  $2\frac{6}{7}$ ?
7. Odredi period u decimalnom zapisu racionalnog broja:  
 1)  $\frac{5}{6}$ ; 2)  $\frac{3}{11}$ ; 3)  $\frac{5}{13}$ ; 4)  $\frac{6}{7}$ .
8. Koja se znamenka nalazi na 101. mjestu iza decimalne točke u decimalnom zapisu svakog od četiriju brojeva iz prethodnog zadatka?
9. Odredi 303. znamenku u dec. zapisu broja  $\frac{15}{37}$ .
10. Odredi 777. znamenku u dec. zapisu broja  $-\frac{111}{11}$ .
11. Odredi sve cijele brojeve  $n$  za koje je razlomak  $\frac{6}{n+1}$  cijeli broj.
12. Za koje je cijele brojeve  $n$  razlomak  $\frac{6}{n-1}$  cijeli broj?
13. Odredi prirodni broj  $x$  tako da vrijede jednakosti:  
 1)  $\frac{x}{12} = \frac{2}{3}$ ; 2)  $\frac{4}{x} = \frac{2}{5}$ ; 3)  $\frac{3}{7} = \frac{x}{21}$ .
14. U jednoj tvrtki zaposleno je 120 osoba. Četvrtina zaposlenih su žene. Tri petine zaposlenih su mlađi od 40 godina. Koliko je žena zaposleno u tvrtki? Koliko je zaposlenih osoba mlađe od 40 godina? Koji je udio osoba koje imaju 40 i više godina?
15. Dražen je vježbao 1 sat i 15 minuta i od toga je  $\frac{2}{3}$  vremena trčao. Koliko minuta je trčao?
16. Plaća neke osobe iznosi 3480 kuna. Trećinu plaće daje za otplatu kredita, a dvije petine za stanašinu i režije. Koliko kuna daje za kredit, a koliko za stanašinu i režije? Koliko joj ostaje?
17. Poduzeće je u poslovnoj godini ostvarilo dobit od 4 500 000 kuna. Uprava je odlučila desetinu dobiti uložiti u opremu, dvije petine u proširenje pogona, a polovinu dobiti podijeliti dioničarima kroz dividendu. Jesu li raspodijelili cijelu dobit? Koliko će uložiti u proširenje pogona?
18. Marta je  $\frac{1}{3}$  površine zida obojila žuto,  $\frac{1}{4}$  zeleno,  $\frac{3}{8}$  plavo, a preostali  $1\text{ m}^2$  je ostao bijel. Kolika je ukupna površina zida?
19. Otac je oporukom razdijelio nasljedstvo. Najstarijem djetetu ostavio je šestinu imovine, srednjem trećinu imovine, a najmlađem polovinu imovine. Je li razdijelio cijelo nasljedstvo? Tko je dobio najviše? Možemo li znati koliku je vrijednost naslijedilo najstarije dijete?
20. Razred se dogovara o odlasku na izlet. Četvrtina učenika željela bi u Slavoniju, tri sedmine u Međimurje, a devet učenika u Gorski kotar. Koliko učenika ima u razredu? Koje odredište je dobilo najviše glasova?
21. Keopsova piramida je približno  $\frac{25}{54}$  visine Eiffelova tornja u Parizu, koji je 3 puta viši od zagrebačke katedrale. Izračunaj visinu piramide, ako je katedrala visoka 105 m.
22. Ispit iz matematike tri petine učenika napisalo je za pozitivnu ocjenu, a 12 ih je napisalo za nedovoljan. Koliko je učenika napisalo ispit za pozitivnu ocjenu?