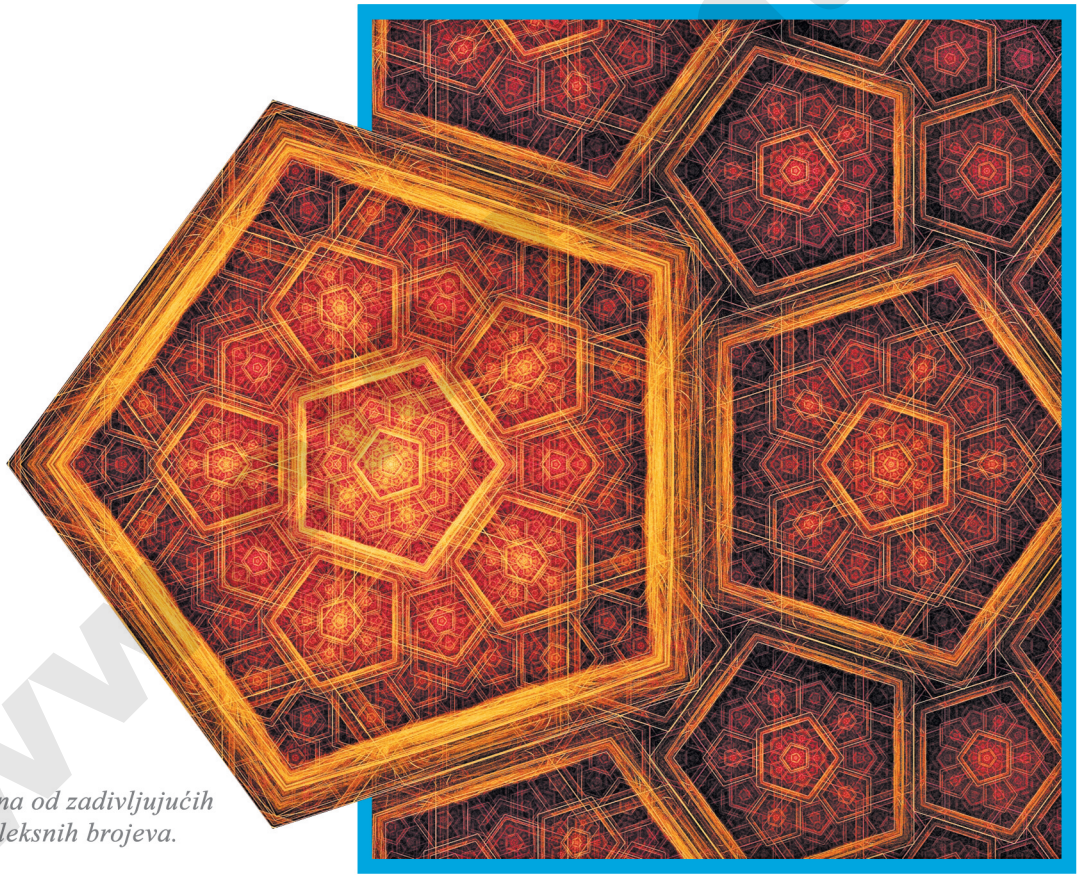
1 Skup kompleksnih brojeva



Fraktali su jedna od zadivljujućih primjena kompleksnih brojeva.

Brojevi su jedno od područja najšireg interesa matematičara i matematičke znanosti. Put od prirodnih do realnih brojeva, koji je trajao tisućljećima, danas svaki školarac prelazi već tijekom svojeg osnovnoškolskog obrazovanja. No je li time taj put i završen? Ili postoji njegov produžetak? Odgovor na posljednje pitanje je potvrdan i upravo će o njemu biti riječi u ovom poglavlju udžbenika. Upoznat ćemo nove, kompleksne brojeve i to tek u jednom malom opsegu. Valja znati kako je uloga kompleksnih brojeva u matematici, ali i u njihovoj stvarnoj primjeni, uistinu velika.

1.1. Kompleksni broj

Tijekom školovanja upoznali smo različite skupove brojeva. Bili su to:

- skup prirodnih brojeva $\mathbf{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$,
- skup cijelih brojeva $\mathbf{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$,
- skup racionalnih brojeva $\mathbf{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\right\}$.

Skup realnih brojeva $\mathbf{R}$ dobijemo združivanjem skupova racionalnih i iracionalnih brojeva. Znamo također da vrijedi

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}.$$

Svaki od skupova $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}$ proširenje je prethodnog, načinjeno zbog potrebe da se omogući provedba određene algebarske operacije. Primjerice, razlika dvaju prirodnih brojeva nije općenito prirodni broj. Stoga se skup $\mathbf{N}$ proširuje negativnim cijelim brojevima i nulom te se tako dobije skup cijelih brojeva $\mathbf{Z}$. Zbog izvedivosti dijeljenja cijelih brojeva skup $\mathbf{Z}$ se proširuje razlomcima, odnosno decimalnim (konačnim ili periodičkim) brojevima čime dobivamo skup racionalnih brojeva $\mathbf{Q}$. Vidjeli smo također da postoje brojevi koje ne možemo zapisati kao razlomke. To su iracionalni brojevi.

Izgradnjom skupa realnih brojeva $\mathbf{R}$ opisanim proširenjima nije kraj. Razlog leži u tome što kvadrat niti kojeg realnog broja nije negativan. Primjerice, već odgovor na pitanje: *Za koji realan broj x vrijedi $x^2 = -1$?* glasi: *Ne postoji takav realan broj*. Skup realnih brojeva proširujemo i uvodimo nove, **kompleksne brojeve**. Skup kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$ sadrži sve realne brojeve, svaki je realni broj ujedno i kompleksni broj.

Neka je i zamišljeno rješenje jednadžbe $x^2+1 = 0$, broj sa svojstvom $i^2+1 = 0$. Taj novi broj nazivamo **imaginarnom jedinicom**.

Imaginarna jedinica

Imaginarna jedinica i je broj za koji vrijedi

$$i^2 = -1.$$

Skup kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$ bit će proširenje skupa realnih brojeva $\mathbf{R}$. To znači da skup kompleksnih brojeva sadrži sve realne brojeve kao svoj podskup. Želimo također da u skupu kompleksnih brojeva budu definirane algebarske operacije zbrajanja i množenja. Zbog toga je umnožak bilo kojeg realnog broja y i imaginarne jedinice i kompleksan broj. Takve brojeve nazivamo posebnim imenom: **imaginarni brojevi**.

Brojevi $2i$, $-\frac{4}{7}i$, $\sqrt{3}i$, primjeri su imaginarnih brojeva.

Imaginarni brojevi

Imaginarni broj yi umnožak je realnog broja y i imaginarne jedinice i.

Primjer 1.

Kvadriraj brojeve:

1) 5^2; **2)** $(-5)^2$; **3)** $(5i)^2$; **4)** $(-5i)^2$; **5)** $5i^2$; **6)** $-(5i)^2$.

1) $5^2 = 25$; **2)** $(-5)^2 = 25$; **3)** $(5i)^2 = 5^2 \cdot i^2 = 25 \cdot (-1) = -25$;

4) $(-5i)^2 = (-5)^2 \cdot i^2 = 25 \cdot (-1) = -25$; **5)** $5i^2 = 5 \cdot (-1) = -5$;

6) $-(5i)^2 = -25 \cdot (-1) = 25$.

U podzadatcima 3), 4) i 5) kvadrirali smo imaginarni broj, pa je rezultat negativan broj. A u podzadatku 6)?

Primjer 2.

Zapiši brojeve pomoću imaginarne jedinice:

1) $\sqrt{-25}$; **2)** $-\sqrt{-16}$; **3)** $\sqrt{-5}$; **4)** $\sqrt{-100} - 2\sqrt{-9}$.

1) $\sqrt{-25} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{25} = 5i$; **2)** $-\sqrt{-16} = -\sqrt{-1} \cdot \sqrt{16} = -4i$;

3) $\sqrt{-5} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{5} = i\sqrt{5}$;

Kada tražimo korijen iz negativnog broja, rezultat je imaginaran broj. Ne trebamo stalno pisati $\sqrt{-1}$, već u rezultatu odmah napišemo i:

4) $\sqrt{-100} - 2\sqrt{-9} = 10i - 2 \cdot 3i = 10i - 6i = 4i$.

Zadatak 1. Izračunaj:

1) $4i^2 + (3i)^2 - i^2$;

2) $25 - (5i)^2 + 10i^2$;

3) $\sqrt{-49} + 3\sqrt{-4}$;

4) $2\sqrt{-\frac{25}{16}} - \sqrt{-\frac{1}{4}}$.

Kompleksni broj je zbroj realnog i imaginarnog broja. Kompleksni su brojevi primjerice

$$-1 + 3i,\ \sqrt{3} - i,\ \frac{3}{4} + \frac{1}{2}i \ldots$$

Svaki je realan broj i kompleksan broj jer se može zapisati u obliku $x + 0 \cdot i$. Svaki je imaginarni broj i kompleksni broj jer je $yi = 0 + yi$.

Skup kompleksnih brojeva

Kompleksni broj z je broj oblika

$$z = x + yi.$$

Tu su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x je **realni dio** kompleksnog broja z, a broj y je njegov **imaginarni dio**. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z, \qquad y = \operatorname{Im} z.$$

Zapis $z = x + yi$ zovemo **algebarski** (ili) **standardni prikaz** kompleksnog broja z.

Skup kompleksnih brojeva označavamo s $\mathbf{C}$.

Primjer 3. Odredimo realni i imaginarni dio svakog od kompleksnih brojeva:

1) $z_1 = 3 + 5i$; **2)** $z_2 = -\frac{1}{2} + i$; **3)** $z_3 = -11$; **4)** $z_4 = i\sqrt{3}$.

Prati redom odgovore i obrazloži ih:

1) $\operatorname{Re} z_1 = 3$, $\operatorname{Im} z_1 = 5$;

2) $\operatorname{Re} z_2 = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} z_2 = 1$;

3) $\operatorname{Re} z_3 = -11$, $\operatorname{Im} z_3 = 0$;

4) $\operatorname{Re} z_4 = 0$, $\operatorname{Im} z_4 = \sqrt{3}$.

Jednakost kompleksnih brojeva

Nakon što smo definirali kompleksne brojeve, prirodno je postaviti pitanje: kada su dva kompleksna broja jednaka? Odgovor je vrlo jednostavan: dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako je realni dio prvoga jednak realnom dijelu drugoga i imaginarni dio prvoga jednak imaginarnom dijelu drugoga.

Jednakost kompleksnih brojeva

Kompleksni brojevi $z_1 = x_1 + y_1 i$ i $z_2 = x_2 + y_2 i$ jednaki su ako i samo ako im se podudaraju realni i imaginarni dijelovi:

$$z_1 = z_2 \text{ ako i samo ako vrijedi } x_1 = x_2 \text{ i } y_1 = y_2.$$

Zaista, iz $x_1 + y_1 i = x_2 + y_2 i$ slijedi $x_1 - x_2 = (y_2 - y_1)i$ pa ukoliko bi bilo $y_1 \neq y_2$ onda bi vrijedilo $i = \dfrac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} \in \mathbf{R}$, što je nemoguće. Zato je $y_1 = y_2$ i onda nužno $x_1 = x_2$.

Primjer 4.

Odredimo realne brojeve a i b iz sljedećih jednakosti kompleksnih brojeva:

1) $a + 3i = -1 + bi$; **2)** $(a-1)x + (a+b)y = 2 + 5i$;
3) $3 - (a-b)i = 2 + (a+b)i$.

1) Kompleksni brojevi s lijeve i s desne strane jednakosti jednaki su ako i samo ako je $a = -1$ i $b = 3$;

2) Kao i u prethodnom primjeru mora biti $a - 1 = 2$ i $a + b = 5$. Dakle, $a = 3$, $b = 2$;

3) Realni dijelovi kompleksnih brojeva na lijevoj i desnoj strani jednakosti različiti su pa onda niti ti brojevi ne mogu biti jednaki niti za koji izbor realnih brojeva a i b.

Zadatak 2. Za koje realne brojeve a i b su kompleksni brojevi z_1 i z_2:

1) $z_1 = (a-b) + (a+b)i$, $z_2 = 1 - 3i$; **2)** $z_1 = 2a - b + (3a - 2b)i$, $z_2 = -i$?

Zadatci 1.1.

1. Kvadriraj brojeve:

1) $(-7)^2$; **2)** $\left(-\frac{5}{9}\right)^2$;

3) $(6i)^2$; **4)** $\left(\frac{3}{7}i\right)^2$;

5) $8i^2$; **6)** $-(9i)^2$;

7) $(-4i)^2$; **8)** $\frac{5}{8}i^2$;

9) $-\left(\frac{1}{2}i\right)^2$; **10)** $(i\sqrt{5})^2$;

11) $\left(i\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2$; **12)** $-\left(-\frac{3}{4}i\right)^2$.

2. Zapiši brojeve pomoću imaginarne jedinice:

1) $\sqrt{-64}$; **2)** $\sqrt{-\frac{16}{25}}$;

3) $\sqrt{-\frac{1}{4}}$; **4)** $\sqrt{-7}$;

5) $-\sqrt{-81}$; **6)** $-\sqrt{-\frac{9}{16}}$;

7) $\sqrt{-0.36}$; **8)** $-\sqrt{-3}$;

9) $-2\sqrt{-144}$; **10)** $3\sqrt{-11}$.

3. Za svaki od brojeva odredi je li realni, imaginarni ili kompleksni broj:

1) $\sqrt{2}$; **2)** $3-2i$;

3) $-\frac{5}{2}i$; **4)** $i-1$;

5) $0.7+0.5i$; **6)** $\frac{3}{5}$;

7) 0; **8)** $6i$;

9) $\sqrt{-4}$; **10)** -4;

11) $1+\sqrt{3}$; **12)** $-i\sqrt{5}$.

4. Sljedeću tablicu prepiši u bilježnicu i popuni:

z	$3-7i$	$-1+i\sqrt{5}$	$0.5i$	$\frac{2}{3}-\frac{1}{4}i$	$2-\sqrt{2}$	$-i$	$\pi+i$
$\operatorname{Re} z$							
$\operatorname{Im} z$							

5. Odredi realni i imaginarni dio svakog od kompleksnih brojeva:

1) $z=5-2i$; **2)** $z=-5i$;

3) $z=-1+i$; **4)** $z=7.5$;

5) $z=i$; **6)** $z=0.5-i$.

6. Odredi realni i imaginarni dio svakog od kompleksnih brojeva:

1) $z=5+2i$; **2)** $z=1-3i$;

3) $z=-\frac{1}{2}i$; **4)** $z=\sqrt{2}$;

5) $z=\frac{2-3i}{3}$; **6)** $z=1-\sqrt{2}+i\sqrt{3}$;

7) $z=0$; **8)** $z=(1-\sqrt{2})i$.

7. Odredi realne brojeve a i b iz jednakosti:

1) $a+4i=-2+bi$;

2) $a+i=1+bi$;

3) $2a-b+3i=a+2b-3i$;

4) $1-(a-b)i=1+(a+b)i$;

5) $a-b+5i=1+(a+b)i$;

6) $-1+(2a+b)i=1-(a-2b)i$.

8. Odredi realne brojeve x i y iz jednakosti:

1) $x+(y-1)i=-1+3i$;

2) $2x+y-yi=1+i$;

3) $x-y+(x+y)i=2+4i$;

4) $x-2y+(2x-y)i=3i$;

5) $2x-3y+(x-y)i=-1$;

6) $2x-3y+(x+y)i=x+2y+(3x+1)i$.

9. Gdje je greška u računu:

$$1=\sqrt{1}=\sqrt{(-1)\cdot(-1)}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$$
$$=i\cdot i=-1?$$

1.2. Zbrajanje i množenje kompleksnih brojeva

Zbroj, razlika i umnožak kompleksnih brojeva

Ako su $z_1 = x_1 + y_1 i$ i $z_2 = x_2 + y_2 i$ bilo koja dva kompleksna broja, tada njihov zbroj, razliku i umnožak definiramo na sljedeći način:

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)i,$$
$$z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + (y_1 - y_2)i,$$
$$z_1 \cdot z_2 = x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i.$$

Operacije zbrajanja i množenja u skupu $\mathbf{C}$ imaju svojstva komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti množenja prema zbrajanju. Naime, za svaka tri kompleksna broja z_1, z_2 i z_3 vrijedi:

- **svojstvo komutativnosti**

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \qquad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1;$$

- **svojstvo asocijativnosti**

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, \qquad z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3;$$

- **svojstvo distributivnosti množenja prema zbrajanju kompleksnih brojeva**

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$$

Primjer 1. Dani su kompleksni brojevi $z = -2 + 3i$, $w = 1 - 4i$. Izračunajmo $z + w$, $z - w$ i $z \cdot w$.

$$z + w = -2 + 3i + 1 - 4i = -1 - i;$$

$$z - w = -2 + 3i - (1 - 4i) = -3 + 7i;$$

$$z \cdot w = (-2 + 3i)(1 - 4i) = -2 + 8i + 3i - 12i^2 = -2 + 11i + 12 = 10 + 11i.$$

Zadatak 1. Za kompleksne brojeve $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = 3 - i$, $z_3 = -1 + 2i$ izračunaj

1) $z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1$; **2)** $(z_1 - z_2) \cdot (z_2 - z_3) \cdot (z_3 - z_1)$.

Potencije imaginarne jedinice

Pri množenju više kompleksnih brojeva pojavit će se potencije imaginarne jedinice. Izračunajmo, primjerice:

$$(2-3i)^3 = 8 - 36i + 54i^2 - 27i^3.$$

Koliko je i^3?

Možemo računati: $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$.

Onda je konačno $(2-3i)^3 = 8 - 36i - 54 + 27i = -46 - 9i$.

Izračunajmo vrijednosti prvih nekoliko potencija imaginarne jedinice prirodnim brojem. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&i^2 = -1,\\
&i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i,\\
&i^4 = i^3 \cdot i = (-i) \cdot i = -i^2 = 1,\\
&i^5 = i^4 \cdot i = i;\\
&i^6 = i^4 \cdot i^2 = i^2 = -1.
\end{aligned}$$

Uočavamo da dalje i ne moramo računati jer se vrijednosti potencija periodički ponavljaju. Pritom se uzastopce izmjenjuju četiri vrijednosti: i, -1, $-i$, 1.

Za određivanje vrijednosti potencije i^n, gdje je n prirodni broj, dovoljno je pogledati koliki je ostatak pri dijeljenju broja n s 4. Tada je vrijednost potencije jednaka i^r, gdje je r ostatak pri dijeljenju n s 4. Evo zašto.

Prirodni broj n može se zapisati u obliku $4k + r$, gdje je k količnik, a r ostatak pri dijeljenju broja n s 4. Broj r je jedan od brojeva $0, 1, 2$ ili 3.

Zato možemo pisati:

$$i^n = i^{4k+r} = i^{4k} \cdot i^r = (i^4)^k \cdot i^r = 1^k \cdot i^r = i^r.$$

Potencije imaginarne jedinice

Neka je k prirodni broj. Tada za potencije imaginarne jedinice i vrijedi:

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i.$$

Primjer 2.

Izračunajmo:

1) i^{12}; **2)** i^{123}; **3)** i^{1234}; **4)** $i^{12\,345}$.

1) Broj 12 djeljiv je s 4, pa je $i^{12} = 1$.

2) Pri dijeljenju s 4 broj 123 daje ostatak 3 (jer je $123 = 4 \cdot 30 + 3$) te je $i^{123} = i^{4 \cdot 30 + 3} = (i^4)^{30} \cdot i^3 = 1^{30} \cdot i^3 = i^3 = -i$.

3) Ostatak pri dijeljenju nekog višeznamenkastog broja s 4 jednak je ostatku što ga pri dijeljenju s 4 daje njegov dvoznamenkasti završetak. Naime, svaki se prirodni broj n s trima ili više znamenki može zapisati u obliku $n = 100t + \overline{uv}$, gdje je t prirodni broj, a $\overline{uv}$ dvoznamenkasti završetak od n.
Broj $100t$ djeljiv je s 4. Stoga na pitanje o djeljivosti broja n s 4 odgovor nalazimo promatrajući dvoznamenkasti broj $\overline{uv}$.
Budući da je $1234 = 12 \cdot 100 + 34$, imamo $i^{1234} = i^{34} = i^2 = -1$.

4) $i^{12345} = i^{45} = i$.

Zadatak 2. Izračunaj:

1) i^{313}; **2)** $i^{54\,321}$; **3)** $(i^{123})^{123}$.

Primjer 3.

Izračunajmo: $1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots + i^{1001}$.

Vidjeli smo da se pri uzastopnim potencijama imaginarne jedinice u jednom periodu pojavljuju četiri vrijednosti: i, -1, $-i$, 1. Njihov zbroj je jednak nuli.

U našem zadatku imamo 1002 pribrojnika. Kad ih od početka razvrstamo po četiri, dobit ćemo 250 skupina po 4 pribrojnika i još dva pribrojnika na kraju.

U svakoj od tih 250 skupina imamo zbroj $1 + i - 1 - i = 0$, a na kraju još ostaje $i^{1000} + i^{1001}$.

Ukupan zbroj svih 1002 pribrojnika onda je jednak $i^{1000} + i^{1001} = 1 + i$.

Primijetite kako smo grupiranje mogli provesti od kraja prema početku. Tako bi nam nakon poništavanja ostala prva dva člana zbroja. Rezultat je, naravno, isti.

Zadatak 3. Izračunaj:

1) $1 + i^3 + i^5 + \ldots + i^{553} + i^{555}$; **2)** $i^2 \cdot i^4 \cdot i^6 \cdot \ldots \cdot i^{442} \cdot i^{444}$.

Primjer 4.

Vrijednosti potencija nekih "posebnih" kompleksnih brojeva vrlo su jednostavne. Navedimo dva primjera koji to pokazuju.

Dokaži da za svaki prirodni broj n vrijede jednakosti:

1) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = i^n$; **2)** $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{3n} = (-1)^n$.

1) Kako je $z^{2n} = (z^2)^n$, za svaki kompleksni broj z, onda imamo:

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = \left(\frac{1+2i+i^2}{2}\right)^n = \left(\frac{2i}{2}\right)^n = i^n.$$

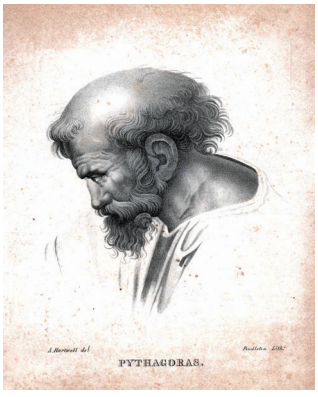
2) I u ovom primjeru postupit ćemo slično kao i u prethodnom. Primijenit ćemo jednakost $z^{3n} = (z^3)^n$:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{3n} = \left(\frac{1}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{8}i+\frac{9}{8}i^2+\frac{3\sqrt{3}}{8}i^3\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{8}i-\frac{9}{8}-\frac{3\sqrt{3}}{8}i\right)^n = (-1)^n.$$

Kutak plus

PITAGORA I KOMPLEKSNI BROJEVI



Određivanje *Pitagorinih trojki brojeva*, trojki prirodnih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu $a^2+b^2=c^2$, jedan je od davnih problema teorije brojeva. Taj je problem riješen i to, slično Pitagorinu poučku, na čitav niz različitih načina. Zanimljivo je da se uz pomoć kompleksnih brojeva može pronaći po volji mnogo *Pitagorinih trojki*.

Uzmimo, primjerice, kompleksni broj $z=-3+2i$ pa ga kvadrirajmo. Tako ćemo dobiti:

$$z^2 = 9-12i+4i^2 = 9-12i-4 = 5-12i.$$

Apsolutne vrijednosti realnog i imaginarnog dijela kompleksnog broja $5-12i$ duljine su kateta pravokutnog trokuta. Naime, vrijedi: $5^2+12^2=13^2$.

Provjerimo da to vrijedi i općenito, za svaki kompleksni broj $z=x+yi$, $x, y \in \mathbf{N}$.

$$z^2 = x^2-y^2+2xyi.$$

Tada je $\|x^2-y^2\| = a$, $2\|xy\| = b$ pa ćemo imati:

$$a^2+b^2 = (x^2-y^2)^2+4x^2y^2 = (x^2+y^2)^2 = c^2.$$

I sada iz jednakosti $a=|x^2-y^2|$, $b=2xy$, $c=x^2+y^2$ za svaki $x, y \in \mathbf{N}$, $x \neq y$, dobijemo jednu *Pitagorinu trojku brojeva*.

Zadatci 1.2.

1. Izračunaj $z+w$, $z-w$ i $z\cdot w$ ako je:

1) $z=-\frac{1}{2}+i$, $w=1-\frac{1}{3}i$;
2) $z=-2+3i$, $w=2+i$;
3) $z=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}i$, $w=\frac{3}{4}+\frac{1}{3}i$;
4) $z=-7+5i$, $w=8+11i$;
5) $z=-8-3i$, $w=4+5i$;
6) $z=-6+5i$, $w=-5+6i$.

2. Izračunaj $z+w$, $z-w$, $z\cdot w$, z^2 i w^2 ako je:

1) $z=1-2i$, $w=3-i$;
2) $z=-3+5i$, $w=4-7i$;
3) $z=11-5i$, $w=-7-i$.

Izračunaj:

3. **1)** $(1+i)^2$; **2)** $(1-2i)^2$; **3)** $(2-i)^2$;
4) $(1+2i)^3$; **5)** $(3+2i)^3$; **6)** $(i+2)^3$;
7) $(1-i)^4$; **8)** $(2+i)^4$.

4. **1)** $(1-i\sqrt{2})(\sqrt{2}-i)$;
2) $(\sqrt{3}-i)(1+i\sqrt{3})$;
3) $(\sqrt{2}-i)(\sqrt{3}+2i)-(\sqrt{3}+i)(\sqrt{2}-i)$.

5. **1)** $(1-i)(2-i)(3-i)$;
2) $(1+i)(1+2i)(1+3i)$;
3) $\left(\frac{1}{2}-i\right)(1+2i)\left(1-\frac{1}{2}i\right)(2+i)$.

6. Izračunaj vrijednost brojevnog izraza $z^2-z\cdot w+w^2$ ako je:
1) $z=1-2i$, $w=3+i$;
2) $z=\sqrt{2}-i$, $w=\sqrt{2}+i$.

7. Dani su kompleksni brojevi $z=-5+8i$ i $w=7-11i$. Odredi realni i imaginarni dio brojeva
1) z^2-w^2; **2)** $(z-w)^2$; **3)** z^2+w^2.

8. Brojevi $z_1=3+4i$ i $z_2=3-4i$ rješenja su jednadžbe $z^2-6z+25=0$. Provjeri.

9. Brojevi $z_1=2-3i$ i $z_2=2+3i$ rješenja su jednadžbe $z^2-4z+13=0$. Provjeri.

10. Odredi realne brojeve x i y iz jednakosti:
1) $(1-i)x+(1+i)y=i$;
2) $(2-3i)x-(1+4i)y=3+i$;
3) $(x+y)(2-i)+(x-y)(1+3i)=2+3i$.

11. Riješi sustave jednadžbi:

1) $\begin{cases} z+2w=1+i, \\ 3z+iw=2-3i; \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} 2z+w=7i, \\ zi+w=-1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (1-i)z-iw=5-4i, \\ (1+i)z-(1-2i)w=8-i. \end{cases}$

12. Izračunaj:
1) i^{77}; **2)** i^{1359}; **3)** i^{2468}
4) i^{325}; **5)** i^{510}; **6)** i^{707}.

13. Koliko je:
1) $i+i^3+i^5+i^7+i^9+\ldots+i^{33}$;
2) $i^2+i^4+i^6+i^8+i^{10}+\ldots+i^{30}$;
3) $i^{102}-i^{104}+i^{106}-i^{108}+\ldots+i^{122}$;
4) $i^{101}-i^{103}+i^{105}-i^{107}+\ldots+i^{121}$;
5) $1+i^3+i^6+i^9+i^{12}+i^{15}$;
6) $i^{111}+i^{222}+i^{333}+\ldots+i^{999}$?

Izračunaj:

14. **1)** $(i^{106}+i^{26})^6$; **2)** $(i^{12}-1)^{12}$;
3) $\left(\frac{1+i^{207}}{i^{208}}\right)^2$; **4)** $\left(\frac{i^{21}+2i^{15}}{i^{444}}\right)^3$.

15. **1)** $(1-i)^5$; **2)** $(1+i)^8$;
3) $(\sqrt{3}-i)^6$; **4)** $(1+i\sqrt{3})^9$.

16. Koliko je
1) $(1-i)(1+i)(1+i^2)(1+i^4)(1+i^8)(1+i^{16})$;
2) $(1-i^3)(1+i^3)(1+i^6)(1+i^{12})(1+i^{24})$?

17. Izračunaj:
1) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^4$; **2)** $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^6$.

1.3. Dijeljenje kompleksnih brojeva

Umnožak dvaju kompleksnih brojeva kompleksni je broj. No onda je i količnik $\frac{z_1}{z_2}$ dvaju kompleksnih brojeva z_1 i z_2 (uz uvjet $z_2 \neq 0$) kompleksan broj. Kako odrediti taj količnik? Kako provesti dijeljenje dvaju kompleksnih brojeva?

Konjugirano kompleksni brojevi

Najprije uvedimo jedan novi pojam.

Ako je $z = x + yi$ bilo koji kompleksni broj, onda broj $\overline{z} = x - yi$ zovemo **konjugirano kompleksni broj broja z.**

Par kompleksnih brojeva z i $\overline{z}$ nazivamo **parom konjugirano kompleksnih brojeva**. To je, dakle, par čiji su realni dijelovi jednaki, a imaginarni dijelovi suprotni su realni brojevi.

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva pozitivan je realni broj.

Lako je provjeriti ovu tvrdnju:

$$(x + yi)(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2.$$

Primjer 1. Odredimo broj $\overline{z}$ za svaki od danih brojeva z te izračunajmo $z \cdot \overline{z}$:

1) $z = -3 + 4i$; **2)** $z = \sqrt{2} - i$; **3)** $z = -0.7i$; **4)** $z = 5$.

1) Konjugirani broj broja $z = -3 + 4i$ je broj $\overline{z} = -3 - 4i$ te je

$$z \cdot \overline{z} = (-3 + 4i)(-3 - 4i) = (-3)^2 - (4i)^2 = 9 - (-16)$$
$$= 9 + 16 = 25.$$

2) Analogno prethodnom primjeru je $\overline{z} = \sqrt{2} + i$ pa je

$$z \cdot \overline{z} = (\sqrt{2} - i)(\sqrt{2} + i) = 3.$$

3) Broj $z = -0.7i$ je imaginarni broj, njegov konjugirani broj je $\overline{z} = 0.7i$, te je $z \cdot \overline{z} = -0.7i \cdot 0.7i = 0.49$.

4) Broj $z = 5$ je realan broj. Takvi su brojevi sami sebi konjugirani te je $z \cdot \overline{z} = 5^2 = 25$.

Konjugirano kompleksni brojevi

Brojevi $z = x + yi$ i $\overline{z} = x - yi$ čine par konjugirano kompleksnih brojeva.

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva realan je i pozitivan broj:

$$(x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2.$$

Dijeljenje kompleksnih brojeva

Činjenicu da je $z \cdot \overline{z}$ realan broj iskoristit ćemo pri dijeljenju kompleksnih brojeva. Bit će to postupak analogan onome koji smo provodili pri racionalizaciji nazivnika razlomka uz primjenu identiteta

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b, \quad a \geqslant 0, \quad b \geqslant 0.$$

Neka je, primjerice, $z_1 = 4 + 3i$, $z_2 = 1 + 2i$. Koliko je $z_1 : z_2$?

Zapišimo dijeljenje u obliku razlomka i razlomak proširimo brojem $1-2i$, brojem koji je konjugiran broju $1 + 2i$. Tada imamo:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4 + 3i}{1 + 2i} = \frac{(4 + 3i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{10 - 5i}{5} = 2 - i.$$

Isti postupak provodimo i pri dijeljenju bilo kojih dvaju kompleksnih brojeva.

Dijeljenje kompleksnih brojeva

Dva se kompleksna broja $z_1 = x_1 + y_1 i$ i $z_2 = x_2 + y_2 i$ dijele na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} \cdot \frac{x_2 - y_2 i}{x_2 - y_2 i} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + (x_2 y_1 - x_1 y_2) i}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.\end{aligned}$$

Zadatak 1. Za svaka dva kompleksna broja z_1 i z_2 ($z_2 \neq 0$) vrijedi jednakost:

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

Provjeri!

Zadatak 2. Ako je $z_1 = -1 + i$, $z_2 = 3 + i$, $z_3 = 1 + 2i$, izračunaj:

1) $\dfrac{z_3}{z_1 \cdot z_2}$; **2)** $\dfrac{z_2}{z_1 \cdot z_3}$; **3)** $\dfrac{z_1}{z_2 \cdot z_3}$.

Zadatci 1.3.

1. Za svaki od danih kompleksnih brojeva odredi njegov konjugirani kompleksni broj:

1) $z = 1 + 10i$; **2)** $z = -5 + 4i$;
3) $z = -1 - i$; **4)** $z = 2 + 9i$;
5) $z = 7 + 4i$; **6)** $z = 1 - i$.

2. Za svaki od danih kompleksnih brojeva z odredi njegov kompleksno konjugirani broj $\overline{z}$:

1) $z = -1 + 3i$; **2)** $z = 1 + \sqrt{22}$;
3) $z = \dfrac{1-\sqrt{2}}{3}i$; **4)** $z = 1-(\sqrt{2}-\sqrt{3})i$;
5) $z = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}i$.

3. Za svaki kompleksni broj z iz zadatka 1. izračunaj $z \cdot \overline{z}$.

4. Za koje su realne brojeve m i n kompleksni brojevi $z = 2m + n + mi$ i $w = m - (n-3)i$ međusobno kompleksno konjugirani?

5. Odredi $\overline{z}$ ako je:

1) $z = (2-i)(1+2i)$;
2) $z = (\sqrt{3}-i)(1+i\sqrt{3})$;
3) $z = (1+i)(2-i)(3+i)(4-i)$.

Izračunaj:

6. **1)** $\dfrac{3-i}{1+i}$; **2)** $\dfrac{1+2i}{1-i}$; **3)** $\dfrac{-4i}{\sqrt{3}+i}$;
4) $\dfrac{1-7i}{3-i}$; **5)** $\dfrac{1-i}{1+i}$; **6)** $\dfrac{5-4i}{3+2i}$.

7. **1)** $\dfrac{1}{1+i}$; **2)** $\dfrac{2}{1-2i}$;
3) $\dfrac{1+3i}{i}$; **4)** $\dfrac{i}{3-i}$.

8. **1)** $\operatorname{Re} z$ ako je $z = \dfrac{1+i}{(2+i)(1-3i)}$;
2) $\operatorname{Im} z$ ako je $z = \dfrac{1-i}{(3-i)(1+2i)}$.

9. Izračunaj vrijednost brojevnog izraza $\dfrac{z\overline{w} - \overline{z}w}{z^2 - w^2}$ ako je:

1) $z = -1 + 2i$, $w = 2 - 3i$;
2) $z = 1 - i\sqrt{2}$, $w = \sqrt{2} - i$.

10. Koliko je $\operatorname{Re} z$ ako je $z = \dfrac{i^{357}}{(1-2i)(3+i)}$?

11. Koliko je $\operatorname{Im} z$ ako je $z = \dfrac{i^{246}}{(1+2i)(3-i)}$?

12. Odredi realne brojeve a i b iz jednakosti:

1) $\dfrac{a+bi}{2-3i} = 1 + 4i$; **2)** $\dfrac{3+5i}{a+bi} = 1 - i$.

13. Odredi kompleksni broj z iz jednakosti

1) $z(2-3i) + \overline{z}(3-2i) = 4 - 4i$;
2) $z(2+i) - \overline{z}(1-3i) = -3 - 2i$.

14. Izračunaj:

1) $\left(\dfrac{i^{55}-i^{66}}{i^{77}+i^{88}}\right)^{99}$; **2)** $\left(i^{101} + \dfrac{i^{202}}{i^{303}}\right)^{404}$;
3) $\left(\dfrac{i^{55}-1}{1+i^{55}}\right)^{55}$; **4)** $\left(\dfrac{i^{33}-1}{i^{55}-1}\right)^{77}$;
5) $\left(\dfrac{i^{77}-1}{i^{55}-1}\right)^{33}$; **6)** $\left(i^{123} - \dfrac{i^{456}}{i^{789}}\right)^{100}$.

15. Koliko je

1) $\dfrac{1}{i} + \dfrac{1}{i^2} + \dfrac{1}{i^3} + \ldots + \dfrac{1}{i^{100}}$;
2) $\left(1 - \dfrac{1}{i} + \dfrac{1}{i^2} - \dfrac{i}{1^3} + \ldots - \dfrac{1}{i^{35}}\right)^{35}$;
3) $\left(1 + \dfrac{1}{i^3} + \dfrac{1}{i^5} + \dfrac{1}{i^7} + \ldots + \dfrac{1}{i^{101}}\right)^{101}$?

16. Izračunaj:

1) $\left(\dfrac{1+i+i^2+\ldots+i^{10}}{i^{11}+i^{12}+\ldots+i^{20}}\right)^{10}$;
2) $\left(\dfrac{1-i+i^2-i^3+\ldots+i^{10}}{1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{10}}\right)^{10}$.

1.4. Kompleksna ravnina

Modul kompleksnog broja

U prvom smo se razredu upoznali s pojmom apsolutne vrijednosti ili modula realnog broja x. Prisjetimo se:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Modul pozitivnog realnog broja (i nule) sam je taj broj. Modul negativnog broja jest njemu suprotan broj. Imali smo i sljedeću jednakost:

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Sada definiramo **modul kompleksnog broja** $z = x + yi$ kao broj

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Skup realnih brojeva podskup je skupa kompleksnih brojeva i ovom je definicijom obuhvaćena i ranija definicija modula realnog broja.

Primjer 1. Odredimo modul svakog od danih kompleksnih brojeva:

1) $z = 3 + 4i$; **2)** $z = 2 - 3i$; **3)** $z = 4i$; **4)** $z = -7$.

Promotri definiciju modula kompleksnog broja i obrazloži rješenje zadatka.

1) $|z| = |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$;

2) $|z| = |2 - 3i| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$;

3) $|z| = |4i| = |0 + 4i| = \sqrt{0^2 + 4^2} = \sqrt{16} = 4$;

4) $|z| = |-7| = |-7 + 0 \cdot i| = \sqrt{(-7)^2 + 0^2} = \sqrt{49} = 7$.

Zadatak 1. Sljedeću tablicu prepiši u bilježnicu i popuni:

z	$4 + 3i$	$2 - i$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$	$-11i$	$1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}i$
$\lvert z\rvert$						