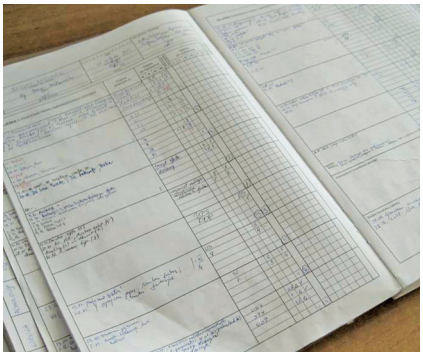
1 Nizovi

spomenik srušenim kućama u Vukovaru

1.1. Brojevne sredine



Često se u običnom životu susrećemo s izrazima *srednja vrijednost*, *prosječna vrijednost* ili *tu je negdje u sredini*. Tako se, primjerice, govori o *prosječnoj starosti* stanovništva, *prosječnoj cijeni* ulja u prodaji ili o *srednjoj ocjeni* iz matematike u nekoj školi.

Kada bismo upitali učenike iz vašeg razreda, što zapravo ti pojmovi znače, vjerojatno bismo dobili različite odgovore. Podatci koje smo spomenuli (starost, cijena i ocjena) izražavaju se brojevima, a na sva pitanja o brojevima, odgovore daje matematika.

Aritmetička sredina

Primjer 1. Brat ima 37, a sestra 45 kuna. Koliki je prosječni iznos kuna koji imaju taj brat i sestra?

Zamislimo da se ukupan zajednički iznos međusobno podijeli tako da svatko od njih dobije jednak iznos kuna. Matematička radnja koju pritom vršimo jest $\frac{37+45}{2}$. Rezultat te radnje je 41. Bitno je zapaziti da je ukupan iznos ostao nepromijenjen, to jest $37+45=41+41$.

Zato kažemo da *prosječni iznos* u ovom slučaju jest 41 kuna.

Primjer 2. U nekoj školi postoje četiri odjela trećeg razreda. Broj učenika u tim odjelima je 31, 28, 29 i 32. Koliki je prosječni broj učenika u ta četiri odjela?

Postupamo isto kao i u prethodnom primjeru, to jest ukupan broj učenika preraspodijelimo u četiri nova odjela, tako da u svakom odjelu bude jednak broj učenika.

Zato računamo ovako:

$$\frac{31+28+29+32}{4}=\frac{120}{4}=30.$$

Kažemo da je prosječan broj učenika u odjelima trećeg razreda te škole jednak 30.

To opet znači da je ukupan broj učenika upravo toliki kao da ih u svakom odjelu ima po 30.

Ovako izračunan prosječan ili srednji broj zove se **aritmetička sredina** navedenih brojeva.

Umjesto brojeva 37 i 45 iz prvog primjera, uzmemo bilo koja dva pozitivna broja x i y i dobijemo:

$$\frac{x+y}{2} = a.$$

Kažemo da je broj a aritmetička sredina brojeva x i y.

Isto je tako broj $\frac{x+y+z}{3}$ aritmetička sredina brojeva x, y i z, odnosno broj $\frac{v+x+y+z}{4}$ je aritmetička sredina brojeva v, x, y i z.

Ako promatramo više brojeva, onda ih označujemo $a_1, a_2, \ldots, a_n$, gdje je n prirodan broj veći od 1.

Zato općenito definiramo:

Aritmetička sredina

Ako za brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vrijedi

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = a$$

kažemo da je broj a **aritmetička sredina** brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Zadatak 1. Aritmetička sredina 5 brojeva je 6. Koliki je zbroj tih brojeva?

Zadatak 2. Aritmetička sredina brojeva x i y je jednaka $y - x$. Koliko je $\frac{y}{x}$?

Najmanji broj skupa $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ označimo s $\min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, a isto tako i najveći broj tog skupa označimo s $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Znamo da elemente skupa možemo napisati u bilo kojem poretku. Zato skup $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ možemo urediti tako da vrijedi $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$.

Primjer 3. Zadan je skup $S = \{1, 7, 9, 12, 16\}$

1) Odredi $\min S$ i $\max S$.

2) Odredi aritmetičku sredinu skupa S.

3) Provjeri da vrijedi: $\min S < a < \max S$.

1) Očito je da vrijedi $\min S = 1$, $\max S = 16$.

2) $a = \dfrac{1+7+9+12+16}{5} = \dfrac{45}{5}$, $\quad a = 9$.

3) Vrijedi $1 < 9 < 16$ ili $\min S < a < \max S$.

Ako su u skupu S svi članovi jednaki, onda je aritmetička sredina tog skupa jednaka tom jednakom elementu.

Zaista, ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = b$, onda vrijedi

$$a = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{\overbrace{b + b + \ldots + b}^{n}}{n} = \frac{b \cdot n}{n} = b,$$

to jest $a = b$.

Primjer 4.

Aritmetička sredina skupa od pet brojeva je jednaka 7. Ako se tomu skupu pridruži još jedan broj, onda je aritmetička sredina novoga skupa veća za 2 od aritmetičke sredine polaznog skupa. Koji je broj pridružen tom broju?

Označimo li zbroj brojeva polaznoga skupa sa S, onda vrijedi $\dfrac{S}{5} = 7$ ili $S = 35$. Broj koji smo pridružili skupu neka je x. Sada vrijedi $\dfrac{S+x}{6} = 9$. Odavde je $x = 54 - S$, $x = 19$.

Primjer 5.

Aritmetička sredina skupa od devet brojeva je 7. Ako se iz toga skupa isključe dva broja, onda je aritmetička sredina novoga skupa veća za 1 od aritmetičke sredine polaznog skupa. Koliki je zbroj isključenih brojeva?

Označimo li zbroj brojeva polaznoga skupa S, onda vrijedi $\dfrac{S}{9} = 7$ ili $S = 63$. Ako je zbroj dvaju isključenih brojeva jednak x, onda vrijedi $\dfrac{S-x}{7} = 8$, odakle je $x = 63 - 56$, $x = 7$.

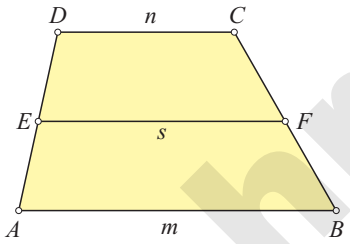
Geometrijska interpretacija aritmetičke sredine dvaju brojeva

Prisjetimo se jednog poučka o trapezu koji znamo još iz osnovne škole. Četverokut kojemu su dvije stranice usporedne zove se **trapez**.

Usporedne stranice trapeza su **osnovice**, a druge dvije su **krakovi**.

Spojnica polovišta krakova trapeza zove se **srednjica** tog trapeza.

Na slici je nacrtan trapez $ABCD$, kojemu su duljine osnovica m i n i pripadna srednjica duljine $|EF| = s$.



Za trapez vrijedi poučak:

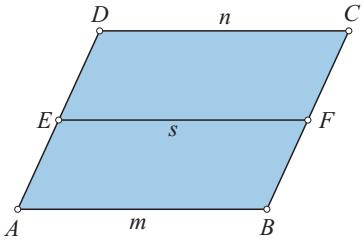
Duljina srednjice trapeza jednaka je poluzbroju duljina osnovica tog trapeza. To se zapisuje

$$s = \frac{m+n}{2}.$$

Kako smo upravo definirali, izraz $\frac{m+n}{2}$ zove se aritmetička sredina brojeva m i n. Zato možemo reći:

> Duljina srednjice trapeza jednaka je aritmetičkoj sredini duljina osnovica trapeza.

S gornje slike vidimo da je $n < s < m$, što je u suglasju s navedenim odnosom aritmetičke sredine dvaju brojeva i tih brojeva.



Ako je $m = n$, tada je trapez paralelogram, kao na slici desno. Vrijedi $n = s = m$.

To nam potvrđuje već izrečenu činjenicu da je aritmetička sredina jednakih brojeva jednaka svakom od tih brojeva.

Geometrijska sredina

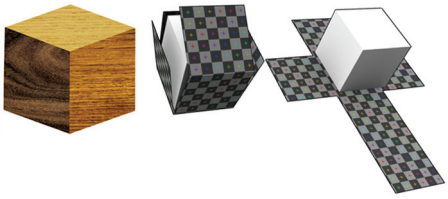
Postavimo dva veoma slična zadatka.

- Opseg trokuta je 42 cm. Kolika je prosječna duljina stranica tog trokuta?
- Obujam kvadra je $27\,000\ \text{cm}^3$. Kolike su prosječne duljine bridova tog kvadra?

U prvom zadatku treba naći trokut jednakih duljina stranica (jednakostraničan trokut) tako da mu opseg bude $42\ \text{cm}$. Ako je x duljina stranice tog trokuta, onda je

$$x = \frac{42}{3}$$

to jest $x = 14\ \text{cm}$. To znači da za svaki trokut opsega 42 postoji samo jedan jednakostraničan trokut jednakog opsega kao i taj trokut.



Drugi zadatak je samo formalno sličan prvome, ali je u biti potpuno različit. Naime, riješimo li taj zadatak istim postupkom, nećemo dobiti zadovoljavajući rezultat.

Zaista, ako zadani obujam podijelimo s 3, dobit ćemo brid kvadra duljine $27\,000 : 3 = 9000$. Obujam novog kvadra je $9000 \cdot 9000 \cdot 9000 = 729\,000\,000\,000\ \text{cm}^3$, što očito nije rješenje zadatka.

Pokušajmo odgovoriti zašto ova dva zadatka nismo mogli riješiti istim postupkom.

Opseg trokuta duljina stranica a, b i c je jednak $a + b + c$, a obujam kvadra duljina bridova a, b i c je jednak abc.

U prvom zadatku treba odrediti x tako da bude $a + b + c = 3x$, to jest $x = \dfrac{a+b+c}{3}$.

U drugom zadatku treba odrediti y tako da bude $abc = yyy = y^3$. Odavde je

$$y^3 = 27\,000, \quad y^3 = 3^3 \cdot 10^3,$$

to jest $y = 30\ \text{cm}$.

U ovom zadatku trebalo je naći kvadar kojemu su bridovi jednake duljine, to jest kocku, i kojemu je obujam jednak obujmu zadanog kvadra $27\,000\ \text{cm}^3$.

Zaista, za $y = 30\ \text{cm}$ dobije se $y^3 = 27\,000\ \text{cm}^3$.

Sada možemo problem poopćiti onako kako smo to učinili u razmatranju o aritmetičkoj sredini.

- Za dva pozitivna realna broja x i y treba odrediti broj g tako da je $xy = gg$ ili $g = \sqrt{xy}$.
- Za tri pozitivna realna broja x, y i z treba odrediti broj g tako da je $xyz = g^3$ ili $g = \sqrt[3]{xyz}$.

- Za n pozitivnih brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n$ treba odrediti broj g tako da je $x_1 x_2 \ldots x_n = g^n$ ili

$$g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

Geometrijska sredina

Broj g definiran formulom

$$g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

zove se **geometrijska sredina** n pozitivnih realnih brojeva.

Primjer 6.

Za zadane brojeve:

1) 8 i 12; **2)** 1 i 100; **3)** 16, 3 i 36;

4) 1, 1 i 27; **5)** $\sqrt{7}, \frac{1}{\sqrt{7}}, \sqrt{3}-\sqrt{2}, \sqrt{3}+\sqrt{2}$

izračunaj geometrijsku sredinu.

1) $g=\sqrt{8\cdot 12}=\sqrt{8\cdot 2\cdot 9}=\sqrt{16\cdot 9}=\sqrt{(4\cdot 3)^2}=\sqrt{12^2},\ g=12.$

2) $g=\sqrt{1\cdot 100}=\sqrt{100},\ g=10.$

3) $g=\sqrt[3]{16\cdot 3\cdot 36}=\sqrt[3]{4\cdot 4\cdot 3\cdot 4\cdot 3\cdot 3}=\sqrt[3]{4^3\cdot 3^3},\ g=12.$

4) $g=\sqrt[3]{1\cdot 1\cdot 27}=\sqrt[3]{27},\ g=3.$

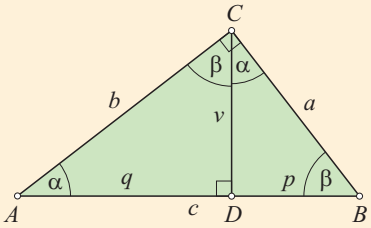
5) $g=\sqrt[4]{\sqrt{7}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}}\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=1.$

Zadatak 3. Odredi y tako da je geometrijska sredina skupa $\{x, y\}$ bude jednaka $2x$.

Riješimo sada jedan primjer iz geometrije.

Primjer 7.

U pravokutnom trokutu ABC duljina kateta a i b i duljine hipotenuze c povučena je visina iz vrha pravog kuta $v=|CD|$, kao na slici. Označimo $|AD|=q$ i $|BD|=p$. Izrazite visinu (v) s pomoću odrezaka (p i q) što ih ta visina određuje na hipotenuzi trokuta.



Trokut ABC je pravokutan s pravim kutom pri vrhu C zbog čega za šiljaste kutove α i β trokuta vrijedi $\alpha+\beta=90°$. Zbog toga je $\sphericalangle CAD=\sphericalangle BCD=\alpha$. Iz istog je razloga $\sphericalangle ACD=\sphericalangle CBD=\beta$.

Vidimo da se pravokutni trokuti ABC, ACD i CBD podudaraju u svim trima kutovima. To je (više negoli) dovoljno da su ti trokuti slični.

Iz sličnih trokuta ACD i BCD imamo $v:q=p:v$, odakle je $v^2=pq$ ili $v=\sqrt{pq}$.

Vidimo da je broj v geometrijska sredina brojeva p i q.

Ovo možemo izreći ovako:

Visina pravokutnog trokuta iz vrha pravog kuta je geometrijska sredina duljina odrezaka što ih ta visina određuje na hipotenuzi.

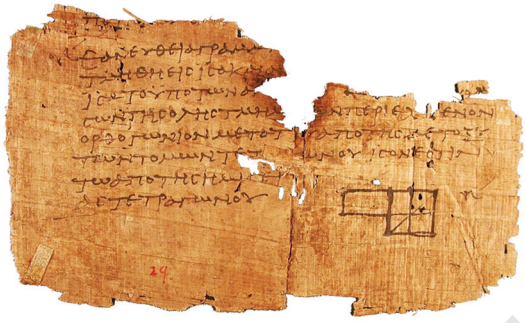
Iz sličnih trokuta CBD i ABC imamo $p : a = a : c$ ili $a^2 = cp$, odnosno $a = \sqrt{cp}$. Isto je tako $b = \sqrt{cq}$.

Kateti duljine a odgovara odrezak na hipotenuzi duljine p. Kateti duljine b odgovara odrezak na hipotenuzi duljine q.

Zato ove dvije formule možemo izreći zajedničkom tvrdnjom:

> Duljina katete pravokutnog trokuta jest geometrijska sredina duljine hipotenuze i odgovarajućeg odreska na hipotenuzu.

Ove tri formule, odnosno ove dvije tvrdnje čine poznati poučak za pravokutni trokut, *Euklidov poučak*.



jedan od papirusa iz Euklidovih Elemenata

Euklid, veliki grčki matematičar živio je oko 340. do oko 287. godine prije Krista. U svom djelu *Elementi* sabrao je sva dotad poznata znanja iz matematike.

Zanimljivo je da iz Euklidova poučka neposredno slijedi još poznatiji poučak za pravokutan trokut.

Pođimo od Euklidova poučka:

$$a^2 + b^2 = cp + cq = c(p + q) = c \cdot c.$$

Očito je $p + q = c$ zbog čega je

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Ovo je, kako znamo, tvrdnja najpoznatijeg poučka u povijesti matematike, *Pitagorina poučka*.

Promatrajmo izraz $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2$ gdje su x i y $(x > y)$ pozitivni brojevi.

Znamo da je kvadrat svakoga realnog broja nenegativan, zbog čega je $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geqslant 0$ i gdje vrijedi jednakost ako i samo ako je $x = y$.

Odavde se dobije $(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} \geqslant 0$ ili $x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$, a odavde

Nejednakost aritmetičke i geometrijske sredine

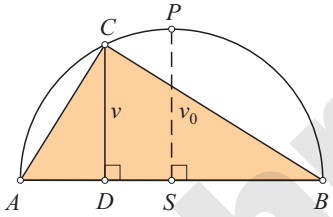
Relacija

$$\frac{x + y}{2} \geqslant \sqrt{xy}.$$

zove se **nejednakost aritmetičke i geometrijske sredine**. Relacija se može iskazati i riječima:

Aritmetička sredina dvaju pozitivnih realnih brojeva je veća od ili jednaka geometrijskoj sredini tih brojeva. Te su sredine jednake ako i samo ako su ti brojevi međusobno jednaki.

Neka je nacrtana polukružnica nad promjerom $\overline{AB}$. Središte te polukružnice označimo S.



Neka je P točka polukružnice, tako da je SP okomito na AB. Označimo $|SP| = v_0 = \frac{|AB|}{2}$, $|AD| = x$, $|BD| = y$.

Neka je C bilo koja točka na polukružnici, različita od A, B i P. Točka D je nožište okomice iz C na AB i označimo $|CD| = v$.

Prema Talesovu poučku, trokut ABC je pravokutan s pravim kutom pri vrhu C.

Očito vrijedi $|CD| \leqslant |PS|$ ili $v \leqslant v_0$.

Dužina $\overline{CD}$ je visina pravokutnog trokuta ABC. Zato je

$$v = \sqrt{xy}.$$

Isto je tako

$$v_0 = \frac{|AB|}{2} = \frac{x+y}{2},$$

to jest nejednakost $v \leqslant v_0$ prelazi u

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2},$$

što je već dokazana nejednakost aritmetičke i geometrijske sredine.

Pokazali smo da ta nejednakost vrijedi za sredine dvaju brojeva.

Može se pokazati da to vrijedi i općenito, to jest i za sredine više brojeva.

Harmonijska sredina

Upoznali smo se s pojmovima koje smo nazvali aritmetička i geometrijska sredina. Sada ćemo definirati još jedan matematički pojam koji ćemo nazvati **harmonijska sredina** dvaju ili više brojeva. Također ćemo pokazati da ta nova sredina ima nekih poveznica sa sredinama koje smo upravo upoznali. Počnimo s jednim uvodnim primjerom.

Primjer 8. Za brojeve $a = \frac{1}{3}$ i $b = \frac{1}{5}$, izračunajmo broj $h = \frac{2ab}{a+b}$.

$$h = \frac{2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}} = \frac{\frac{2}{3 \cdot 5}}{\frac{3+5}{3 \cdot 5}} = \frac{2}{8},\ h = \frac{1}{4}.$$

Kažemo da je broj $\frac{1}{4}$ harmonijska sredina brojeva $a = \frac{1}{3}$ i $b = \frac{1}{5}$.

Harmonijska sredina

Harmonijska sredina dvaju brojeva x i y je broj

$$h = \frac{2xy}{x+y}.$$

Uočimo jednu formalnu vezu:

Aritmetička sredina brojeva 3 i 5 jest broj 4. Harmonijska sredina brojeva $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{5}$ jest broj $\frac{1}{4}$. Može se dokazati da vrijedi općenito:

Ako je aritmetička sredina dvaju pozitivnih brojeva x i y jednaka a, onda je harmonijska sredina brojeva $\frac{1}{x}$ i $\frac{1}{y}$ jednaka $\frac{1}{a}$.

Pokažimo da postoji još jedna veza između ovih sredina dvaju pozitivnih brojeva.

Za brojeve x i y vrijedi:

$$a = \frac{x+y}{2}, \quad g = \sqrt{xy}, \quad h = \frac{2xy}{x+y}.$$

Odavde je

$$h = \frac{\sqrt{xy} \cdot \sqrt{xy}}{\frac{x+y}{2}}, \quad \text{ili} \quad h = \frac{g^2}{a}.$$

Iz ovih veza možemo izvući još jedan važan zaključak.

Budući da je $g \leqslant a$, slijedi da je $\frac{g}{a} \leqslant 1$, a odavde je $\frac{g}{a} \cdot g \leqslant g$ ili $h \leqslant g$.

Vrijedi proširena nejednakost ovih triju nejednakosti:

$$h \leqslant g \leqslant a.$$

Formulu $h = \frac{g^2}{a}$, možemo preoblikovati ovako $g^2 = ha$ ili $g = \sqrt{ha}$.

Ovu posljednju formulu možemo iskazati ovako:

Veza harmonijske, geometrijske i aritmetičke sredine

Ako su h, g i a harmonijska, geometrijska i aritmetička sredina dvaju pozitivnih brojeva, onda je broj g geometrijska sredina brojeva h i a:

$$g = \sqrt{ha}.$$

Primjer 9. Za brojeve $x = 2$ i $y = 32$, izračunaj harmonijsku i aritmetičku sredinu, a odatle, bez posebnog računanja izračunaj geometrijsku sredinu tih brojeva.

$h = \frac{2xy}{x+y} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 32}{2+32} = \frac{64}{17}$, $a = \frac{2+32}{2} = 17$. Koristimo formulu $g = \sqrt{ha} = \sqrt{17 \cdot \frac{64}{17}} = \sqrt{64}$, $g = 8$. Naravno da smo do istog rezultata mogli doći izravnim računanjem geometrijske sredine brojeva 2 i 32.

Zadatak 4. Aritmetička sredina brojeva x i $\frac{1}{y}$ je jednaka a. Kolika je harmonijska sredina brojeva y i $\frac{1}{x}$?

Zadatak 5. Odredi harmonijsku sredinu prirodnih brojeva x i y, ako je $x - y = \frac{2}{35}$, $x^2 + 1 = \frac{26}{25}$.

Mali matematički rječnik

Aritmetička sredina. Trapez. Srednjica trapeza. Geometrijska sredina. Harmonijska sredina. Nejednakost sredina.

Oznake: $\min S$, $\max S$, $a = \frac{x+y}{2}$, $g = \sqrt{xy}$, $h = \frac{2xy}{x+y}$.

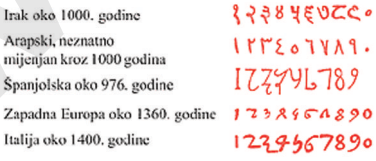
Povijesni kutak

PRVI BROJEVI

Potreba za računanjem razvila se iz svakodnevnoga života i javlja se u samim početcima ljudske povijesti. To potvrđuju i razni crteži (urezi) na kostima, u stijenama, ili špiljama koje su služile kao skrovišta ljudi u zori povijesti uljudbe.

kosti s urezima

Poznato je da su sve drevne civilizacije; babilonska, sumerska, egipatska, kineska, indijska, a da ne spominjemo grčku i arapsku, imale, svaka za svoje vrijeme i potrebe, razvijenu matematiku, a posebno geometriju. Naravno, taj razvoj nije bio moguć bez, poslužimo se današnjim rječnikom, tehnike računanja.



primjeri različitih znakova za brojeve i mijenjanje njihovih oblika

Ali, prije samoga računanja, ljudi su morali usvojiti pojam **broja** koji je ostao sve do naših dana jednim od najvažnijih matematičkih pojmova, uopće. Ne samo to, trebalo je ovladati zapisom toga važnoga matematičkog pojma.

Zadatci 1.1.

1. Zadani su skupovi $P = \{2, 4, 8\}$ i $Q = \{2, 4, x\}$ Odredi x tako da geometrijska sredina skupa P bude jednaka aritmetičkoj sredini skupa Q.

2. Zadani su skupovi $P = \{4, 9, 12, x\}$ i $Q = \{4, 9, 12, 48\}$. Odredi x tako da geometrijska sredina skupa Q bude jednaka aritmetičkoj sredini skupa P.

3. Aritmetička sredina brojeva x i y je jednaka 7. Kolika je harmonijska sredina brojeva $\frac{1}{x}$ i $\frac{1}{y}$?

4. Harmonijska sredina brojeva $\frac{1}{x}$ i $\frac{1}{y}$ je jednaka 5. Kolika je aritmetička sredina brojeva x i y?

5. Zadani su skupovi $S_1 = \{3, 17\}$ i $S_2 = \{6, 10\}$. Neka je a_1 aritmetička sredina skupa S_1, a_2 aritmetička sredina skupa S_2 i a aritmetička sredina skupa $S = S_1 \cup S_2$. Izračunajte:

1) aritmetičku sredinu brojeva a_1 i a_2;

2) aritmetičku sredinu skupa S.

6. Pokaži da tvrdnja iz prethodnog zadatka vrijedi za bilo koja dva dvočlana skupa.

7. Vrijedi li tvrdnja iz zadatka 5 za skupove $S_1 = \{5, 3\}$ i $S_2 = \{1, 3, 11\}$?

8. Neka su zadani tročlani skupovi S_1 i S_2 kojima su aritmetičke sredine a_1 i a_2. Neka je dalje $S = S_1 \cup S_2$ i a aritmetička sredina skupa S. Dokaži da je aritmetička sredina brojeva a_1 i a_2 jednaka aritmetičkoj sredini skupa S.

9. Dokaži da za realne brojeve x i y vrijedi $(x + y)^2 \leqslant 2(x^2 + y^2)$.

10. Dokaži da nejednakost analogna onoj u zadatku 9 vrijedi i za tri broja.

11. Aritmetička sredina skupa od četiriju članova je jednaka 7. Kolika je aritmetička sredina novog skupa koji nastaje ako se promatranom skupu pripoji broj 27?

12. Zadan je kompleksan broj $z_1 = 3 + 2i$. Izračunaj $z_2 = z_1^2$ i $z_3 = z_1^3$. Izračunaj $|z_1|$, $|z_2|$, i $|z_3|$. Pokaži da je $|z_2|$ geometrijska sredina brojeva $|z_1|$ i $|z_3|$.

13. Zadani su parovi realnih brojeva:

1) $(2, 18)$ i $(3, x)$; **2)** $(1, 100)$ i $(25, x)$;

3) $(\sqrt{3}, 4\sqrt{3})$ i $(x, 2)$.

Odredi x tako da ti parovi imaju jednake geometrijske sredine.

14. Riješi prethodni zadatak bez izračunavanja geometrijske sredine jednoga od zadanih parova.

15. Geometrijska sredina brojeva u i v je jednaka dvostrukoj geometrijskoj sredini brojeva x i y. Izračunaj $\frac{uv}{xy}$.

16. Riješi jednadžbu $x + \frac{1}{x} = \frac{7}{4}$ gdje je x realan broj.

17. Dokaži nejednakost $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$, $x > 0$ s pomoću nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine.

18. Izračunaj najmanju vrijednost izraza
$$u + 2v + 3x + 4y + \frac{1}{u} + \frac{1}{2v} + \frac{1}{3x} + \frac{1}{4y}.$$

19. Umnošci $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8$ i $2 \cdot 4 \cdot 8$ su jednaki. Smijemo li odatle zaključiti da su i geometrijske sredine skupova $\{1, 2, 4, 8\}$ i $\{2, 4, 8\}$ jednake?

20. Izračunaj harmonijsku sredinu (h) brojeva $\frac{2}{5}$ i $\frac{2}{11}$.

1) Odredi x tako da aritmetička sredina brojeva $\frac{1}{6}$ i x bude jednaka h.

2) Odredi y tako da geometrijska sredina brojeva $\frac{1}{6}$ i y bude jednaka h.

21. Izračunaj harmonijsku sredinu brojeva $\frac{1}{7}$ i $\frac{1}{13}$. Zadatak riješi na dva načina.

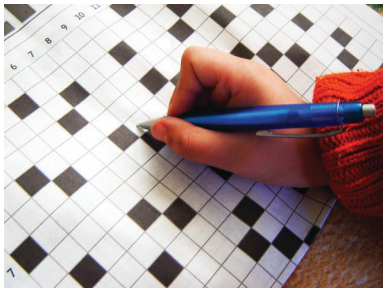
22. Zadane su dvije dužine duljina x i y. Konstruiraj dužinu duljine a tako da je broj a aritmetička sredina brojeva x i y.

23. Zadane su dvije dužine duljina x i y. Konstruiraj dužinu duljine a tako da je broj a geometrijska sredina brojeva x i y.

24. Zadana je dužina $\overline{DB}$. Konstruiraj dužinu duljine $\sqrt{|DB|}$.

1.2. Aritmetički niz

Uvodno o nizovima



Upoznat ćemo jedan od najvažnijih matematičkih pojmova koji zovemo **niz** ili **slijed**.

Često se u enigmatskim ili zabavnim rubrikama novina i časopisa može naići na ovakve probleme.

Nastavi niz brojeva:

1) $2, 6, 12, 20, 30 \ldots$ **2)** $2, 5, 10, 17, 26 \ldots$ **3)** $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{6}, \frac{11}{30}, \frac{41}{330} \ldots$

U pravilu svaki je niz povezan s nizom prirodnih brojeva; $1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots$

U prvom primjeru imamo: $1 \cdot 2 = 2$, $2 \cdot 3 = 6$, $3 \cdot 4 = 12$ $\ldots$ Već vidimo da se niz nastavlja brojevima $42, 56 \ldots$

U drugom primjeru, članove niza dobit ćemo tako da se ispišu redom kvadrati svih prirodnih brojeva i svakom od tih kvadrata pribroji 1. Zato se niz nastavlja brojevima $37, 50, 65 \ldots$

U trećem primjeru svi su brojevi razlomci, prvi je razlomak je $\frac{1}{2}$, a svaki se sljedeći razlomak dobiva iz prethodnog, tako da se za brojnik novog razlomka uzme zbroj, a za nazivnik umnožak brojnika i nazivnika prethodnog razlomka.

Iako se često pojavljuju, ovakvi zadatci nisu sa strogoga matematičkog stajališta potpuno korektni, jer uz ovo opisano rješenje, postoji još beskonačno mnogo drugih rješenja. U ovakvim zadatcima treba postaviti dodatne uvjete koji bi osiguravali jednoznačnost rješenja.

Primjer 1. Zadani su brojevi $1, 4 \ldots$ Nastavi ispisivati niz tako da svaki broj (osim prvoga) bude aritmetička sredina dvaju susjednih brojeva.

Prema postavljenim uvjetima, broj 4 mora biti aritmetička sredina broja 1 i prvoga upisanog broja, to jest broja 7 jer je $\frac{1+7}{2} = 4$. Isto tako, broj 7 mora biti aritmetička sredina broja 4 i drugoga upisanog broja. Taj drugi upisani broj jest 10 jer je $\frac{4+10}{2} = 7$. Ovaj postupak možemo stalno ponavljati i lako zaključimo da ćemo dobiti:

$$1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 \ldots$$

Ovako ispisani brojevi čine **niz** ili **slijed**.

Svaki broj koji bismo u ovom postupku upisali zove se član niza.

Vidimo da u postupku ispisivanja članova možemo iza svakog člana dopisati još jedan član. Zato kažemo da niz ima **beskonačno mnogo** članova.

Ponekad, iz praktičnih razloga, promatramo nizove koji imaju konačan broj članova, primjerice niz od 17, od 21 789 ili pak niz od pet milijuna članova. Svaki takav niz zove se **konačni niz** ili **slog**. Ako se radi o konačnom nizu, to uvijek treba naglasiti. Ako se kaže samo **niz**, onda se podrazumijeva da se radi o beskonačnom nizu.

Zadatak 1. Odredi x i y, tako da brojevi $3x-1$, $2x+3$, $7x+1$, $2y-3x$ budu uzastopni članovi aritmetičkoga niza.

Treba razlikovati pojam niza i pojam skupa.

Tako, primjerice, kažemo da su skupovi $\{1, 4, 7, 10, 13, 16\}$ i $\{4, 1, 10, 7, 16, 13\}$ jednaki, jer u ispisivanju članova skupa nije bitan uređaj, to jest poredak članova skupa.

Kod nizova, poredak članova jest bitan. Tako su nizovi $1, 4, 7, 10, 13, 16\ldots$ i $4, 1, 10, 7, 16, 13\ldots$ različiti, a isto tako su i konačni nizovi $1, 4, 7, 10, 13, 16$ i $4, 1, 10, 7, 16, 13$ međusobno različiti.

Spomenuli smo da je u zapisu članova niza bitan poredak. Zato članove niza posebno imenujemo.

Tako u nizu $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\ldots$ broj 1 je **prvi**, broj 4 je **drugi**, a broj 49 je **sedmi** član tog niza.

Često se, pogotovu u teorijskim razmatranjima nizova, umjesto ispisivanja konkretnih članova niza, niz zapisuje ovako: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \ldots$

Prirodni brojevi $1, 2, 3, \ldots, n\ldots$ u zapisu članova niza zovu se **indeksi** tih članova, to jest kazuju redni broj mjesta na kojem se taj član nalazi.

Član a_n, $n \in \mathbf{N}$ zove se opći član niza. Niz, kao cjelinu, označujemo (a_n). Ako promatramo dva ili više nizova, moramo ih označiti različitim oznakama. Tako nizovi (b_n) ili (c_n) znače $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n \ldots$, odnosno $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n \ldots$

U samom uvodu spomenuli smo niz $2, 5, 10, 17, 26, 37\ldots$ i utvrdili da se članovi tog niza dobiju tako da se kvadrati prirodnih brojeva u prirodnom poretku uvećaju za 1.

To znači: ako se u formulu $a_n = n^2 + 1$ uvrste redom prirodni brojevi $1, 2, 3\ldots$, dobit ćemo članove tog niza.

Zato kažemo da je $a_n = n^2 + 1$ **formula za opći član** tog niza.

Primjer 2. Ispišite po nekoliko članova niza kojemu je zadan opći član niza formulom i odredite tisućiti član niza.

1) $a_n = 17n - 34$; **2)** $a_n = \dfrac{5n+3}{3n-1}$;

3) $a_n = n^2 - 3n + 5$; **4)** $a_n = |1-n| - n$.

Stavljajući u zadanu formulu za $n = 1, 2, 3, 4, 5$ i potom $n = 1000$, dobit ćemo pet početnih članova, kao i tisućiti član niza.

1) $-17, 0, 17, 34$, $a_{1000} = 17\,000 - 34 = 16\,966$;

2) $\dfrac{8}{2}, \dfrac{13}{5}, \dfrac{18}{8}, \dfrac{23}{11}, \dfrac{28}{14}$ ili $4, \dfrac{13}{5}, \dfrac{9}{4}, \dfrac{23}{11}, 2$, $a_{1000} = \dfrac{5003}{2999}$;

3) $3, 3, 5, 9, 15$, $a_{1000} = 997\,005$;

4) $-1, -1, -1, -1, -1$; $a_{1000} = -1$.

Opći član aritmetičkog niza

Vratimo se još jednom nizu $1, 4, 7, 10, 13, 16\ldots$ Taj niz ima svojstvo da je **razlika** dvaju uzastopnih članova uvijek isti broj.

Lako se provjeri da i nizovi $5, 9, 13, 17, 21, 25\ldots$; $-3, 4, 11, 18, 25, 32, 39\ldots$ i $0.23, 1.24, 2.25, 3.26, 4.27, 5.28\ldots$ imaju to svojstvo.

Aritmetički niz

Niz u kojem je razlika svakog člana (osim prvoga) i njemu prethodnog člana stalan broj zove se **aritmetički niz** ili **aritmetički slijed**.

Označimo s a_n opći član aritmetičkog niza. Onda je razlika dvaju uzastopnih članova jednaka $a_n - a_{n-1}$. Razlika sljedećih dvaju članova je $a_{n+1} - a_n$. Sad iz

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$$

slijedi

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Svaki je član aritmetičkog niza (osim prvog) aritmetička sredina dvaju susjednih članova.