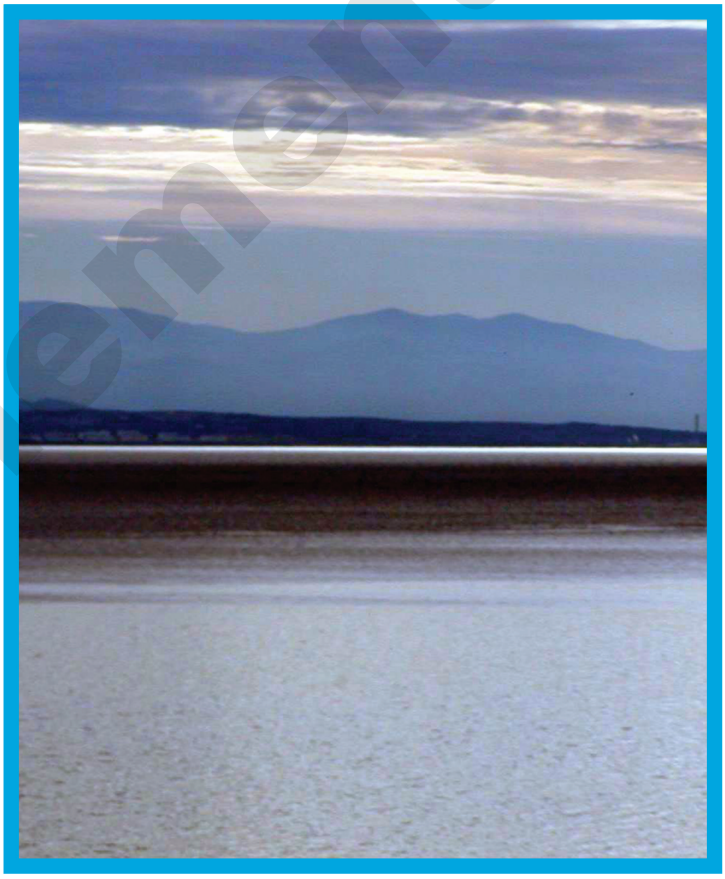
1 Pravac



pravac na obzoru

- Koordinatni sustav u ravnini.....2
- Eksplicitni i implicitni oblik jednadžbe pravca.....9
- Segmentni oblik jednadžbe pravca.....20
- Kut dvaju pravaca. Paralelnost i okomitost pravaca.....24
- Udaljenost točke od pravca. Simetrala kuta.....33

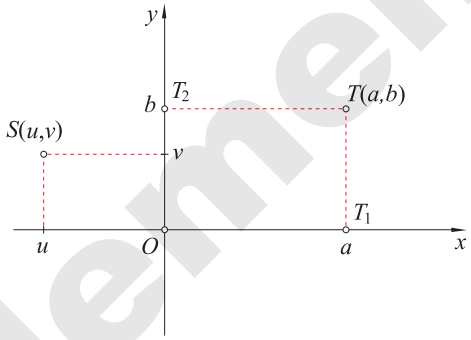
www.element.hr

1.1. Koordinatni sustav u ravnini

U ovom uvodnom poglavlju ponovit ćemo neke teme iz prethodnih razreda.

Koordinate točke

Koordinatni sustav u ravnini sastoji se od dvaju međusobno okomitih brojevnih pravaca, x i y, tako da imaju zajedničko ishodište O. Pravce x i y zovemo **koordinatnim osima**. Pravac x je **os apscisa**, pravac y **os ordinata**. Na ovaj je način određen sustav koji nazivamo **pravokutni koordinatni sustav** ili **Kartezijev sustav**.



Točka T u ravnini zadana je parom **koordinata** (a, b). Na osi apscisa odredimo točku T_1 s koordinatom a, a na osi ordinata točku T_2 s koordinatom b. Tim točkama položimo pravce paralelno koordinatnim osima. Oni se sijeku u točki T koja je pridružena uređenom paru (a, b) dvaju realnih brojeva a i b. Broj a njezina je **apscisa**, a broj b njezina **ordinata**.

Odaberemo li u koordinatnoj ravnini neku točku S, povlačenjem paralela s koordinatnim osima odredit ćemo na njima sjecišta s koordinatama u i v, a uređeni par (u, v) bit će pridružen točki S. Brojevi u i v su apscisa i ordinata točke S.

Udaljenost dviju točaka u ravnini

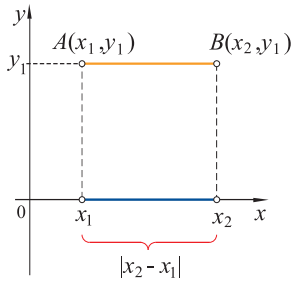
Prisjetimo se formule za računanje udaljenosti dviju točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ u koordinatnoj ravnini.

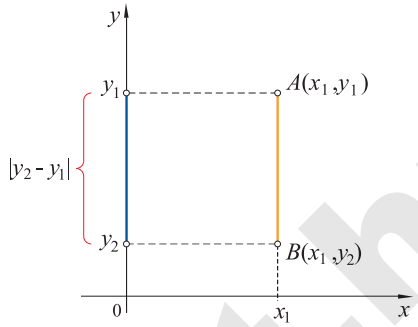
Prve dvije slike pokazuju situaciju kad se neke od koordinata ovih točaka podudaraju.

1. Na slici lijevo podudaraju se ordinate točaka, $y_1 = y_2$. Obje točke leže na pravcu paralelnom s osi apscisa, pa je udaljenost točaka A i B jednaka apsolutnoj vrijednosti razlike njihovih apscisa:

$$|AB| = |x_2 - x_1|.$$

www.element.hr



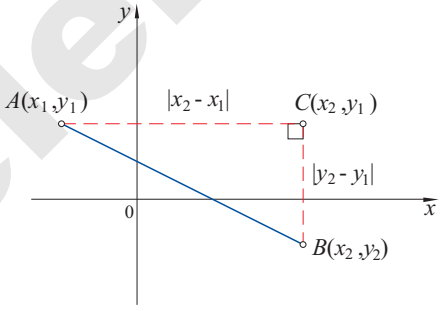


2. Ako je $x_1 = x_2$, onda obje točke leže na pravcu paralelnom s osi ordinata (slika desno). Udaljenost točaka A i B jednaka je apsolutnoj vrijednosti razlike njihovih ordinata:

$$|AB| = |y_2 - y_1|.$$

3. Promotrimo sada opći slučaj. Ucrtajmo po volji odabrane točke $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ u koordinatni sustav. Povlačenjem pravaca paralelnih koordinatnim osima kroz točke A i B odredit ćemo pravokutan trokut ABC. Tada je

$$|AC| = |x_2 - x_1|, \qquad |BC| = |y_2 - y_1|.$$



Udaljenost točaka A i B jest duljina hipotenuze tog pravokutnog trokuta. Prema *Pitagorinom poučku* imamo: $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Oznake za apsolutnu vrijednost zamijenili smo običnim zagradama jer uvijek vrijedi $|a - b|^2 = (a - b)^2$.

Udaljenost dviju točaka

Udaljenost točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ u ravnini iznosi

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

www.element.hr

Primjer 1. Odredimo udaljenost točaka $A(-3,2)$ i $B(1,-2)$.

Koordinate tih točaka uvrstimo u formulu pa imamo:

$$|AB| = \sqrt{(1-(-3))^2+(-2-2)^2} = \sqrt{4^2+(-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

Zadatak 1. Odredi udaljenost točaka A i B ako je

1) $A(-3,5)$, $B(-3,2)$; **2)** $A(-1,-2)$, $B(3,2)$; **3)** $A(-1,-2)$, $B(4,-2)$.

Primjer 2. Odredimo na osi ordinata točku koja je od točke $S(3,1)$ udaljena 5.

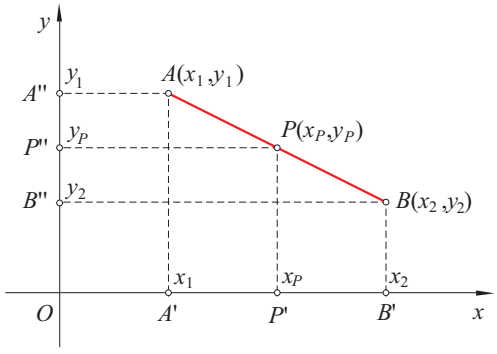
Apscisa svake točke T na osi ordinata jednaka je 0 pa su koordinate točke $T(0,y)$.

Iz $|TS| = 5$ slijedi $\sqrt{3^2+(y-1)^2} = 5$, a odatle je nakon kvadriranja $9+(y-1)^2 = 25$, odnosno $(y-1)^2 = 16$.

Dakle, $|y-1| = 4$, te imamo dva rješenja: točku s ordinatom -3, i točku s ordinatom 5.

Polovište dužine

Neka su $A(x_1,y_1)$ i $B(x_2,y_2)$ rubne točke dužine $\overline{AB}$ i neka je točka P s koordinatama x_P i y_P polovište te dužine.



Pogledajmo sliku. Apscisa točke A' je x_1, a apscisa točke B' je x_2. Točka P raspolavlja dužinu $\overline{AB}$ pa P' raspolavlja dužinu $\overline{A'B'}$. Koordinata polovišta odreska na pravcu je aritmetička sredina koordinata rubnih točaka: $x_P = \dfrac{x_1+x_2}{2}$.

www.element.hr

Na isti način dobivamo i $y_P = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Polovište dužine

Polovište $P(x_P, y_P)$ dužine s rubnim točkama $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ima koordinate

$$x_P = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y_P = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Primjer 3.

Odredimo polovište dužine $\overline{AB}$ ako je $A(-3, 5)$, $B(5, 1)$.

Apscisa polovišta aritmetička je sredina apscisa rubnih točaka dužine, $x_P = \frac{1}{2}(x_A + x_B) = 1$. Jednako vrijedi i za ordinatu: $y_P = \frac{1}{2}(y_A + y_B) = 3$.

Dakle, točka $P(1, 3)$ polovište je dužine $\overline{AB}$.

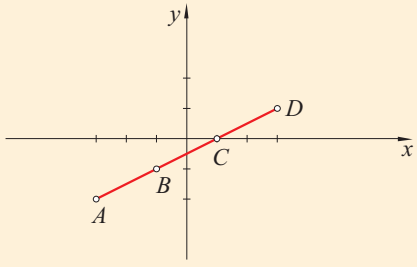
Zadatak 2. Točke $A(-3, -4)$, $B(5, 2)$ i $C(1, 8)$ vrhovi su trokuta ABC. Dokaži da je duljina stranice $\overline{AB}$ dvostruko veća od duljine dužine koja spaja polovišta stranica $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$.

Primjer 4.

Zadana je dužina $\overline{AD}$ s rubnim točkama $A(-3, -2)$, $D(3, 1)$. Točke B i $C(1, 0)$ dijele tu dužinu na tri jednaka dijela. Odredimo koordinate točaka B i C.

Točka B polovište je dužine $\overline{AC}$, što znači da je $x_B = \frac{1}{2}(-3 + x_C)$, te $y_B = \frac{1}{2}(-2 + y_C)$.

Točka C polovište je dužine $\overline{BD}$ pa je $x_C = \frac{1}{2}(x_B + 3)$, $y_C = \frac{1}{2}(y_B + 1)$.



Iz dobivenih veza možemo načiniti dva sustava s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} 2x_B - x_C &= -3 \\ -x_B + 2x_C &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2y_B - y_C &= -2 \\ -y_B + 2y_C &= 1. \end{aligned}$$

Iz prvog sustava dobivamo $x_B = -1$, $x_C = 1$, a iz drugog $y_B = -1$, $y_C = 0$.

www.element.hr

Zadatci 1.1.

1. Nacrtaj trokut ABC, $A(4,-2)$, $B(-3,2)$, $C(0,-4)$. Nacrtaj potom trokut simetričan zadanom s obzirom na os apscisa i odredi koordinate njegovih vrhova.

2. Nacrtaj trokut simetričan trokutu ABC, $A(-3,0)$, $B(0,-5)$, $C(3,3)$ s obzirom na ishodište koordinatnog sustava i odredi koordinate vrhova tog trokuta.

3. Točke $(1,1)$, $(5,1)$ i $(5,-3)$ tri su vrha kvadrata. Odredi koordinate četvrtog vrha i koordinate središta kvadrata.

4. Točke A i B susjedni su vrhovi kvadrata $ABCD$. Odredi vrhove C i D ako je:

1) $A(4,-2)$, $B(4,4)$; **2)** $A(-3,1)$, $B(5,1)$.

5. Točke A i C suprotni su vrhovi kvadrata $ABCD$. Odredi ostale vrhove kvadrata ako je:

1) $A(1,-6)$, $C(1,2)$;
2) $A(-3,2)$, $C(3,-2)$;
3) $A(0,-5)$, $C(5,0)$.

6. Nacrtaj skup svih točaka $T(x,y)$ u ravnini kojima koordinate zadovoljavaju uvjet:

1) $x=-1$; **2)** $y=2$; **3)** $x \leqslant 3$;
4) $y \geqslant -\frac{3}{2}$; **5)** $2x-3>0$; **6)** $3y+5<0$.

7. Odredi skup svih točaka T ravnine kojima koordinate x i y zadovoljavaju uvjet:

1) $x+y>0$; **2)** $x-y \leqslant 0$.

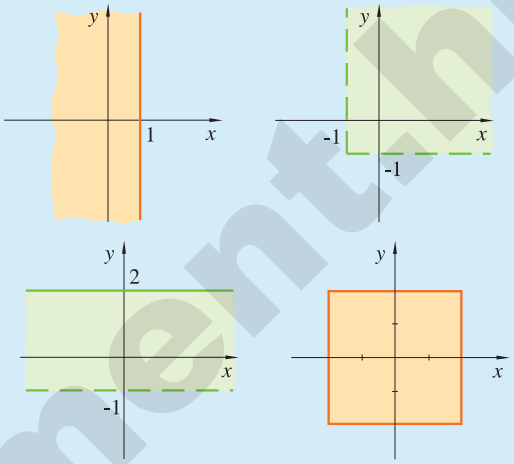
8. Nacrtaj skup svih točaka $T(x,y)$ ravnine za koje je:

1) $|x|<1$; **2)** $|y| \geqslant 2$;
3) $|x+1| \geqslant 2$; **4)** $|y-2| \leqslant 1$.

9. Prikaži grafički skup svih uređenih parova (x,y) realnih brojeva x i y za koje je:

1) $|x| \leqslant 2$ i $|y| \leqslant 2$; **2)** $|x| \leqslant 3$ ili $y \geqslant 1$;
3) $|x+1|>2$ i $|y-1|>3$;
4) $|2x-5| \leqslant 1$ ili $|y+2|>2$;
5) $|x-1|>2$ ili $|y+1|<3$;
6) $|x| \leqslant 3$ i $|y+1| \leqslant 2$.

10. Zapiši uvjete kojima je određen pojedini skup točaka istaknut u koordinatnoj ravnini:



11. Odredi udaljenost $|AB|$ točaka A i B ako je:

1) $A(1,2)$, $B(4,6)$; **2)** $A(-3,5)$, $B(5,-1)$;
3) $A(1,-2)$, $B(-1,2)$; **4)** $A(-3,0)$, $B(0,-4)$;
5) $A(-3,1)$, $B(5,5)$; **6)** $A(-11,8)$, $B(9,-7)$.

12. Točke $A(-3,1)$ i $C(2,-4)$ nasuprotni su vrhovi kvadrata. Kolika je površina kvadrata?

13. Dužina $\overline{MN}$, $M(-4,-3)$, $N(2,5)$, promjer je kruga. Kolika je površina kruga?

14. Izračunaj površinu jednakostraničnog trokuta kojem su točke $A(0,5)$ i $B(2,1)$ dva vrha.

15. Koristeći se *obratom Pitagorina poučka* dokaži da je trokut ABC pravokutan ako je:

1) $A(2,2)$, $B(6,4)$, $C(5,6)$;
2) $A(5,3)$, $B(4,6)$, $C(-4,0)$.

U kojem se vrhu nalazi pravi kut?

16. Točke $A(4,3)$, $B(5,1)$, $C(3,0)$ vrhovi su jednakokračnog pravokutnog trokuta. Provjeri!

17. Točke $A(-3,-2)$, $B(2,0)$, $C(1,4)$ i $D(-4,2)$ vrhovi su paralelograma. Provjeri! Kolike su duljine dijagonala tog paralelograma?

www.element.hr

18. Točke $A(-2,-1)$, $B(1,0)$, $C(2,3)$ i $D(-1,2)$ vrhovi su romba. Provjeri te odredi površinu romba.

19. Četverokut $ABCD$ je pravokutnik. Provjeri to i odredi površinu pravokutnika ako je:

1) $A(-3,0)$, $B(3,-6)$, $C(6,-3)$, $D(0,3)$;

2) $A(-2,1)$, $B(0,-3)$, $C(8,1)$, $D(6,5)$.

20. Odredi na osi apscisa točku koja je od točke $A(3,6)$ udaljena 10.

21. Na osi ordinata odredi točku koja je od točke $A(3,2)$ udaljena 5.

22. Odredi na osi apscisa točku koja je jednako udaljena od točaka:

1) $A(-1,1)$ i $B(5,3)$; **2)** $A(-3,-2)$ i $B(1,4)$.

23. Odredi na osi ordinata točku koja je jednako udaljena od točaka:

1) $A(-3,-1)$ i $B(5,1)$; **2)** $A(3,3)$ i $B(5,-1)$.

24. Odredi točku $T(x,x)$ koja je jednako udaljena od točaka $A(5,-2)$ i $B(6,5)$.

25. Dane su točke $M(-2,-5)$ i $N(2,-2)$. Odredi na osi ordinata točku T tako da kut $\sphericalangle MTN$ bude pravi.

26. Dane su točke $M(4,-2)$ i $N(7,2)$. Odredi na osi apscisa točku T tako da kut $\sphericalangle MTN$ bude pravi.

— ◆ —

27. Odredi polovište dužine $\overline{AB}$ ako je:

1) $A(-3,-3)$, $B(7,5)$; **2)** $A(-4,1)$, $B(3,-1)$.

28. Točka A krajnja je točka dužine $\overline{AB}$, a točka P je njeno polovište. Odredi koordinate točke B ako je:

1) $A(1,5)$, $P(4,3)$;

2) $A(-2,1)$, $P(2,\frac{5}{2})$;

3) $A(-4,4)$, $P(0,-2)$;

4) $A(5,3.5)$, $P(1,2)$;

29. Odredi koordinate točaka koje su simetrične točkama $A(-4,0)$, $B(1,-3)$, $C(3,4)$ i $D(-1,5)$ s obzirom na točku $S(-1,1)$.

30. Točkama B i C dužina $\overline{AD}$ podijeljena je na tri jednaka dijela. Odredi koordinate točaka:

1) C i D, ako je $A(-3,2)$, $B(0,1)$;

2) A i C, ako je $B(2,-3)$, $D(5,4)$;

3) A i D, ako je $B(2,-1)$, $C(3,1)$.

31. Točkama B, C i D dužina $\overline{AE}$ podijeljena je na četiri jednaka dijela.

1) Ako je $B(-3,3)$ i $D(1,-1)$, odredi koordinate točaka A, C i E;

2) ako je $C(-1,2)$ i $E(3,6)$, odredi koordinate točaka A, B i D;

3) ako je $D(10,0)$ i $E(12,1)$, odredi koordinate točaka A, B i C.

32. Točkama B, C i D dužina $\overline{AE}$ podijeljena je na četiri sukladna dijela. Ako su zadane točke $A(-7,5)$ i $C(-3,3)$, odredi koordinate točaka B, D i E.

33. Dužina $\overline{MN}$, $M(1,5)$, $N(7,3)$, promjer je kružnice. U kojoj je točki središte kružnice? Kolika je duljina polumjera?

34. Odredi središte kružnice kojoj je promjer dužina $\overline{AB}$, $A(-4,-2)$, $B(4,4)$. Kolika je površina kruga omeđenog tom kružnicom?

35. Točke $A(-1,-4)$ i $B(6,-3)$ dva su vrha paralelograma $ABCD$, a točka $S(3,-1)$ sjecište je dijagonala. **1)** Odredi koordinate vrhova C i D paralelograma. **2)** Kolike su duljine dijagonala paralelograma?

36. Točke $A_1(2,-3)$, $B_1(6,-6)$, $C_1(6,0)$ polovišta su stranica trokuta. Odredi koordinate vrhova trokuta.

37. Vrhovi trokuta su u točkama $A(2,4)$, $B(4,-1)$ i $C(-2,0)$. Odredi duljinu težišnice iz vrha C trokuta. (*Težišnica trokuta je dužina koja spaja vrh trokuta i polovište suprotne stranice.*)

38. Vrhovi trokuta su u točkama: $A(-2,2)$, $B(3,-2)$, i $C(2,6)$. Odredi duljine težišnica trokuta.

www.element.hr

Kutak plus

PICKOVA FORMULA

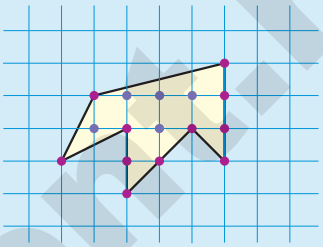
Ako je u kvadratnoj mreži smješten mnogokut čiji su svi vrhovi u točkama — sjecištima pravaca te mreže, tada se površina tog mnogokuta može izračunati po **Pickovoj formuli**[1].

Neka je u broj točaka unutar mnogokuta, a r broj točaka na rubu mnogokuta. Tada je površina mnogokuta jednaka

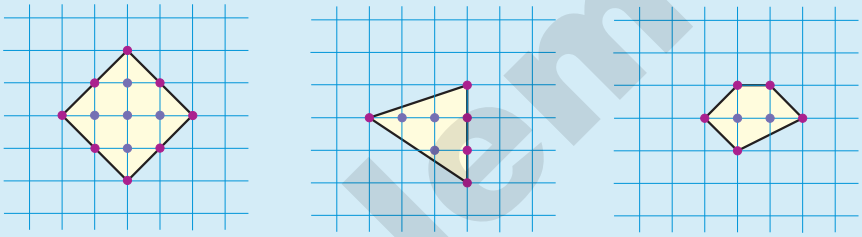
$$P = u + \frac{1}{2}r - 1$$

kvadratnih jedinica. Kvadratna jedinica je površina najmanjeg kvadrata mreže.

Površina sedmerokuta na slici je jednaka $P = 5 + \frac{11}{2} - 1 = 9.5$ kv. jed.



Na slici su nacrtana još tri mnogokuta smještena tako da su im svi vrhovi u točkama kvadratične mreže. Izračunajmo im površinu.



Za prvi od njih, kvadrat, imamo da je $u = 5$, $r = 8$ te je $P = 5 + \frac{1}{2} \cdot 8 - 1 = 8$.

Lako se uvjeriti u točnost rezultata. Povučemo li dijagonale kvadrata dobit ćemo četiri sukladna pravokutna trokuta koji se mogu složiti u dva kvadrata, svaki sa stranicom duljine 2. Tako je površina jednaka $2 \cdot 4 = 8$ kv. jed.

Površina trokuta iznosi $P = 3 + \frac{1}{2} \cdot 5 - 1 = \frac{9}{2}$, a površina šesterokuta je jednaka $P = 2 + \frac{1}{2} \cdot 5 - 1 = \frac{7}{2} = 3.5$ kv. jed.

Koristeći se Pickovom formulom možemo približno odrediti površinu nekog područja na zemljopisnoj karti. Na prozirni papir nacrtamo kvadratičnu mrežu te njome pokrijemo područje kojem želimo odrediti površinu. Zatim na papiru iscrtamo mnogokut s vrhovima u točkama mreže nastojeći što bolje pokriti to područje.

Slijedi određivanje brojeva u i r te računanje površine **Pickovom formulom**.

[1] Georg Alexander Pick, austrijski matematičar, rođen u Beču 1859., umro (najvjerojatnije 1943.) u nacističkom koncentracijskom logoru u Theresienstadtu. Svoj teorem, o kojem je ovdje riječ, objavio je 1899. godine

www.element.hr

1.2. Eksplicitni i implicitni oblik jednadžbe pravca

Pravac

Linearna jednadžba s dvije nepoznanice, oblika $Ax + By + C = 0$ ima beskonačno mnogo rješenja. Ta su rješenja uređeni parovi realnih brojeva (x, y). Ako ih prikažemo u koordinatnom sustavu, sve će te točke pripadati istom pravcu pa za jednadžbu $Ax + By + C = 0$ kažemo još da je jednadžba pravca.

Pravac

Pravac je skup svih točaka (x, y) u ravnini čije koordinate zadovoljavaju jednadžbu

$$Ax + By + C = 0,$$

pri čemu je barem jedan od koeficijenata A, B različit od nule. Ova se jednadžba naziva **implicitni oblik jednadžbe pravca**.

Kako se crta pravac zadan nekom linearnom jednadžbom?

Dovoljno je odrediti dvije točke koje leže na tom pravcu, uzimajući po volji dvije vrijednosti za nepoznanicu x ili za nepoznanicu y.

Primjer 1.

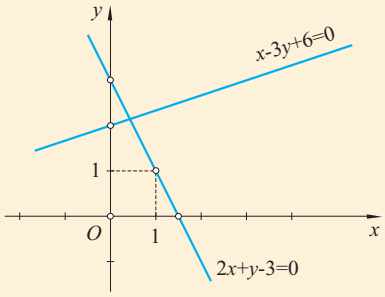
Nacrtajmo u istom koordinatnom sustavu pravce određene jednadžbama

1) $2x + y - 3 = 0$;

2) $x - 3y + 6 = 0$.

1) Stavimo li $x = 0$, dobivamo $y = 3$. Za $x = 1$ dobivamo $y = 1$. Točke $(0, 3)$ i $(1, 1)$ leže na pravcu.

2) Stavimo li $y = 2$, dobivamo $x = 0$. Za $y = 3$ dobivamo $x = 3$. Pravac prolazi točkama $(0, 2)$ i $(3, 3)$.



Zadatak 1. Nacrtaj pravac čija je jednadžba:

1) $2x + 3y - 6 = 0$; **2)** $x + 3y - 6 = 0$.

www.element.hr

Pravci paralelni s koordinatnim osima

Ako je u općoj jednadžbi pravca $A = 0$, onda ona glasi

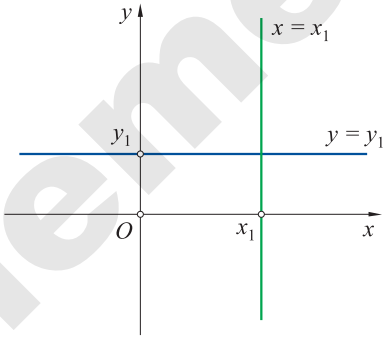
$$By + C = 0.$$

Tu jednadžbu zadovoljavaju sve točke (x, y) ravnine za koje vrijedi $y = -\frac{C}{B}$. Te se točke nalaze na pravcu paralelnom s osi apscisa.

Ako je u općoj jednadžbi $B = 0$, onda ona glasi

$$Ax + C = 0.$$

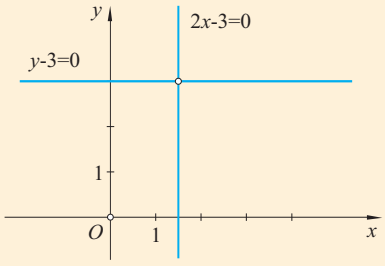
Tu jednadžbu zadovoljavaju sve točke (x, y) ravnine za koje vrijedi $x = -\frac{C}{A}$. Te se točke nalaze na vertikalnom pravcu koji prolazi točkom na Ox-osi s apscisom $-\frac{C}{A}$.



Primjer 2. Nacrtajmo u istom koordinatnom sustavu pravce određene jednadžbama

1) $2x - 3 = 0$;

2) $y - 3 = 0$.



Zadatak 2. Nacrtaj pravce zadane jednadžbama:

1) $3x + 8 = 0$;

2) $4x - 3y + 6 = 0$;

3) $x + 4y - 8 = 0$;

4) $y + 5 = 0$.

www.element.hr

Eksplicitni oblik jednadžbe pravca

Ako je $B \neq 0$, jednadžbu $Ax + By + C = 0$ dijeljenjem s koeficijentom B prevodimo u

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Stavimo li $k = -\frac{A}{B}$ i $l = -\frac{C}{B}$, dobit ćemo jednadžbu pravca u obliku $y = kx + l$.

Eksplicitni oblik jednadžbe pravca

Ako pravac nije paralelan s osi ordinata, njegova se jednadžba može napisati u obliku

$$y = kx + l.$$

Tu jednadžbu zovemo **eksplicitni oblik** jednadžbe pravca.

Koeficijent k u eksplicitnoj jednadžbi pravca zovemo **nagib** ili **koeficijent smjera**.

Koeficijent l nazivamo **odsječak** na osi ordinata.

Koeficijent smjera k može biti bilo koji realan broj. Ako je $k = 0$, tad jednadžba pravca glasi $y = l$ i on je paralelan s osi apscisa.

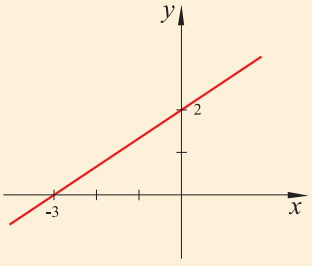
Stavimo li u eksplicitnu jednadžbu pravca $x = 0$, dobit ćemo $y = k \cdot 0 + l = l$. To znači da pravac prolazi točkom $(0, l)$ na osi ordinata. Zato se l naziva *odsječak na osi ordinata*. Ako je $l = 0$, pravac prolazi ishodištem.

Primjer 3. Dan je pravac $2x - 3y + 6 = 0$. Odredi nagib tog pravca i njegov odsječak na osi y.

Jednadžba danog pravca u eksplicitnom obliku glasi

$$y = \frac{2}{3}x + 2.$$

Odatle odmah čitamo nagib $k = \frac{2}{3}$, a odsječak pravca na osi y jednak je $l = 2$.



www.element.hr

Koeficijent smjera i jednadžbe pravca

Kako glasi jednadžba pravca koji prolazi točkom $A(x_1, y_1)$ i ima zadani koeficijent smjera k? Napišimo njegovu eksplicitnu jednadžbu:

$$y = kx + l.$$

Točka A leži na pravcu pa njezine koordinate zadovoljavaju tu jednadžbu:

$$y_1 = kx_1 + l.$$

Oduzimanjem ovih dviju jednadžbi dobivamo:

$$y - y_1 = k(x - x_1), \qquad (1)$$

i to je tražena jednadžba.

Znamo također da je pravac određen dvjema svojim točkama. Da bismo odredili jednadžbu pravca koji prolazi točkama $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, možemo iskoristiti jednadžbu (1), jer taj pravac prolazi točkom A. Koeficijent k odredit ćemo iz uvjeta da i druga točka B leži na pravcu:

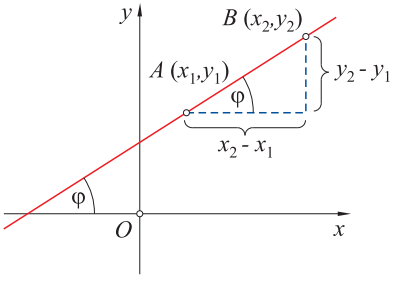
$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1) \implies k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Tražena jednadžba glasi

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Pogledajmo koje je geometrijsko značenje koeficijenta smjera k. Označimo s φ kut koji pravac zatvara s pozitivnim dijelom osi apscisa. Taj kut uvijek možemo izabrati u granicama $0° \leqslant \varphi < 180°$. Iz pravokutnog trokuta na slici vidimo da vrijedi

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



Prema tome, koeficijent smjera pravca jednak je tangensu priklonog kuta φ.

Primjer 4. Odredimo nagib pravca koji prolazi točkama A i B, ako je

1) $A(-1, 2)$, $B(3, 4)$; **2)** $A(-2, 3)$, $B(2, -1)$.

1) Uvrštavanjem koordinata točaka A i B u $k = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ imamo

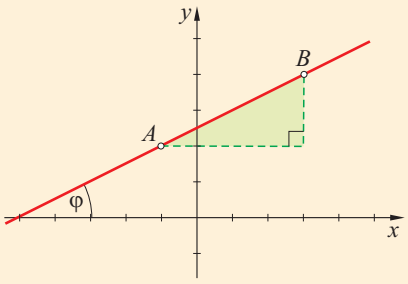
$$k = \frac{4 - 2}{3 - (-1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

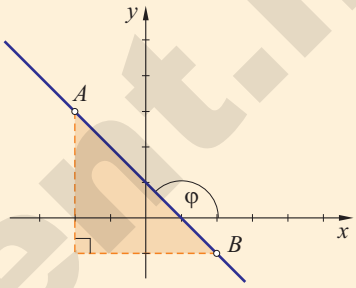
www.element.hr

2) Analogno je i u ovom primjeru:

$$k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-3}{2-(-2)} = \frac{-4}{4} = -1.$$

Uočimo da je pravac u prvom primjeru rastući, njegov je nagib pozitivan broj. Drugi je pravac padajući, nagib mu je negativan broj.





U prvom je primjeru $k = \frac{1}{2} = \operatorname{tg}\varphi$. Pravac je prema pozitivnom smjeru osi x priklonjen pod kutom od $26°34'$.

U drugom primjeru je $k = -1 = \operatorname{tg}\varphi$. Pravac s pozitivnim smjerom osi x zatvara kut od $135°$.

Zadatak 3. Koliki kut s pozitivnim smjerom osi x zatvara pravac koji prolazi točkama $A(-1,-4)$, $B(7,2)$?

Jednadžba pravca

Pravac koji prolazi točkom $A(x_1, y_1)$ i ima poznati koeficijent smjera k ima jednadžbu

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Ako on prolazi i točkom $B(x_2, y_2)$, tada koeficijent smjera glasi

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Jednadžba pravca koji prolazi točkama $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ glasi

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

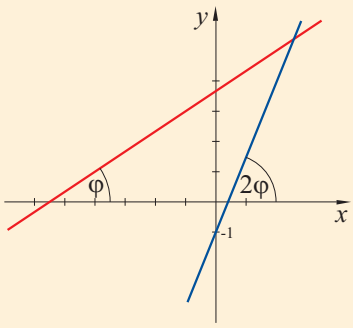
Za koeficijent smjera vrijedi

$$k = \operatorname{tg}\varphi,$$

gdje je φ kut koji pravac zatvara s pozitivnim dijelom osi apscisa.

www.element.hr

Primjer 5. Odredimo jednadžbu pravca koji os ordinata siječe u točki $B(0,-1)$, a s osi x zatvara dvostruko veći kut nego pravac $2x-3y+11=0$.



Pravac siječe os y u točki B. To znači da je $l=-1$.

Kako je nagib pravca jednak tangensu kuta što ga pravac zatvara s (pozitivnim smjerom) osi x, onda iz $\operatorname{tg} 2\varphi = \dfrac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi}$ uvrštavajući $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{2}{3}$ dobijemo $\operatorname{tg} 2\varphi = \dfrac{12}{5}$.

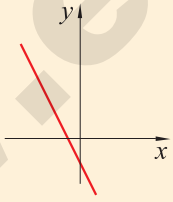
Jednadžba traženog pravca glasi: $y = \dfrac{12}{5}x - 1$.

Zadatak 4. Kako glasi jednadžba pravca koji je simetričan pravcu što prolazi točkama $M(4,0)$, $N(0,-2)$ s obzirom na:

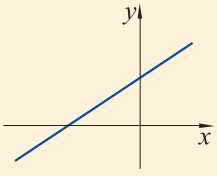
1) os apscisa; **2)** os ordinata; **3)** ishodište koordinatnog sustava?

Primjer 6. Koji od nacrtanih pravaca ispunjava sljedeće uvjete: pravac p ima pozitivan nagib, a os y siječe u točki s negativnom ordinatom?

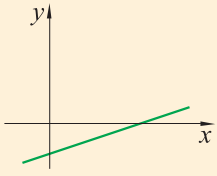
1)



2)

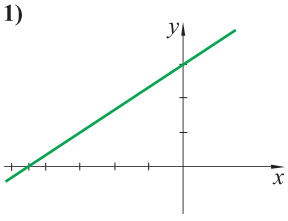


3)

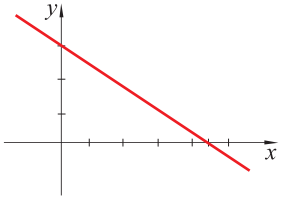


Zadatak 5. Jednom od nacrtanih pravaca pripada jednadžba $2x+3y-9=0$. Kojem?

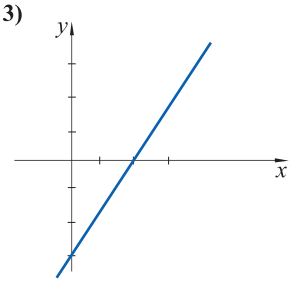
1)



2)



3)



www.element.hr

Presjek dvaju pravaca

Dva pravca koja nisu paralelna sijeku se u jednoj točki. Ako su njihove implicitne jednadžbe

$$p_1 \ \ldots \ A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad p_2 \ \ldots \ A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

onda su koordinatne presječne točke rješenja sustava jednadžbi:

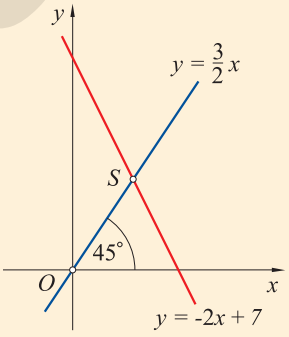
$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Primjer 7. Odredimo jednadžbu pravca koji prolazi sjecištem pravaca $3x - 2y = 0$ i $2x + y - 7 = 0$, a s pozitivnim dijelom osi apscisa zatvara kut $45°$.

Jednadžbu pravca potražit ćemo u obliku

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Ovdje je k koeficijent smjera pravca, a (x_1, y_1) bilo koja njegova točka. Koeficijent smjera jednak je tangensu zadanog kuta, $k = \operatorname{tg} 45° = 1$. Točku (x_1, y_1) dobit ćemo kao presjek zadanih pravaca.



Trebamo riješiti sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 0, \\ 2x + y - 7 &= 0. \end{aligned}$$

Množenjem druge jednadžbe s 2 i zbrajanjem obiju dobivamo $7x - 14 = 0$ pa je $x = 2$, a onda i $y = 3$. Presječna točka je $S(2, 3)$. Jednadžba traženog pravca glasi

$$y - 3 = 1 \cdot (x - 2),$$

odnosno, $y = x + 1$.

www.element.hr