6. Dvostruki integral

Diferencijalni i integralni račun za funkcije jedne realne varijable razmatran je u kolegiju Matematika 1. Podsjetimo se da određeni integral funkcije $f > 0$ na intervalu $[a, b]$ predstavlja površinu ispod grafa te funkcije na zadanom intervalu. Do pojma Riemannovog integrala došli smo metodom upisivanja i opisivanja pravokutnika, pa smo pritom definirali donju i gornju Darbouxovu sumu. Donje i gornje Darbouxove sume geometrijski predstavljaju aproksimacije površine lika ispod grafa zadane funkcije. Gornji je Riemannov integral ograničene funkcije f bio infimum skupa svih gornjih Darbouxovih suma, uzimajući sve razdiobe intervala $[a, b]$. Analogno, donji Riemannov integral je supremum skupa svih donjih Darbouxovih suma. Ako su ta dva broja jednaka onda je to Riemannov integral funkcije f na $[a, b]$. Analogno ćemo definirati pojam dvostrukog integrala, a kasnije i trostrukog integrala. Dvostruki integral je integral funkcije dviju varijabli, a područje integracije je dvodimenzionalno, štoviše nalazi se u ravnini. Općenitiji pojam, pojam dvostrukog integrala na nekoj plohi koja nije ravnina, bit će obrađen kasnije u tijeku kolegija. Taj pojam se naziva plošni integral. Diferencijalni račun funkcija više varijabli je proučavan u kolegiju Matematika 2, a s integralnim računom nastavljamo sada. Za pripremu će biti potrebno prisjetiti se nekih osnovnih već uvedenih pojmova, za početak to su grafovi funkcija dviju varijabli koji se nalaze u Dodatku.

6.1. Dvostruki integral na pravokutniku

U literaturi postoje različiti pristupi definiciji dvostrukog integrala, a mi ćemo se ovdje prikloniti strategiji u kojoj se najprije kreće s definicijom dvostrukog integrala na pravokutniku, kao najjednostavnijem području integracije. Uvest ćemo razdiobu zadanog pravokutnika na male pravokutnike. Nakon toga ćemo definirati donju i gornju Darbouxovu sumu za ograničenu funkciju $z = f(x, y)$. Analognim postupkom kao kod jednostrukog integrala doći ćemo do pojma dvostrukog integrala čija je geometrijska interpretacija, za funkciju $f > 0$, volumen cilindričnog tijela nad zadanim pravokutnikom. Tijelo je s gornje strane omeđeno plohom $z = f(x, y)$.

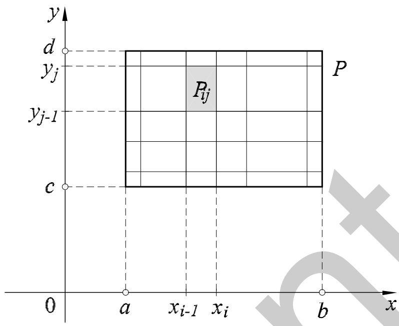
Neka je zadan pravokutnik $P=[a,b]\times[c,d]$, $a<b, c<d$. Uzmimo razdiobu (subdiviziju) segmenta $[a,b]$

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_{m-1}<x_m=b$$

i segmenta $[c,d]$

$$c=y_0<y_1<\ldots<y_{n-1}<y_n=d.$$

Svaki par segmenata $[x_{i-1},x_i],[y_{j-1},y_j]$, pri čemu $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$, određuje pravokutnik $P_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$. Time smo dobili razdiobu pravokutnika P koju ćemo označiti s π, vidi sliku



Površina pravokutnika P_{ij} je

$$(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})=\triangle x_i\,\triangle y_j,$$

a duljina dijagonale $\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_j-y_{j-1})^2}$. Najdulju dijagonalu svih pravokutnika P_{ij} označit ćemo s $\delta(\pi)$ i nazvat ćemo je *dijametrom razdiobe* π.

Neka je $f\,:\,P\to\mathbf{R}$, ograničena funkcija na promatranom pravokutniku P, što znači da postoje $m,M\in\mathbf{R}$ takvi da za svaki $(x,y)\in P$ vrijedi

$$m\leqslant f(x,y)\leqslant M.$$

Označimo

$$m_{ij}=\inf_{(x,y)\in P_{ij}}f(x,y)$$
$$M_{ij}=\sup_{(x,y)\in P_{ij}}f(x,y).$$

Iz ograničenosti funkcije f na pravokutniku P slijedi nejednakost $m\leqslant m_{ij}\leqslant M_{ij}\leqslant M$ za svaki $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$. Definirajmo sume koje su nam potrebne za definiciju dvostrukog integrala. Sumu

$$s(\pi)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})$$

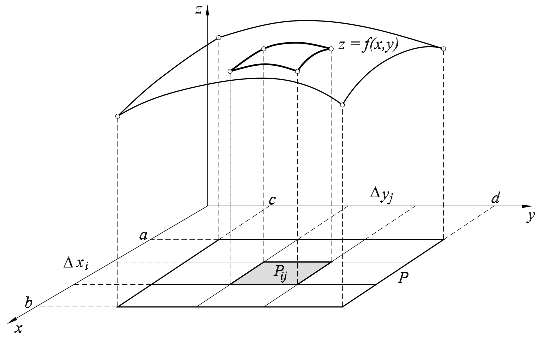
nazivamo *donjom Darbouxovom sumom*, a sumu

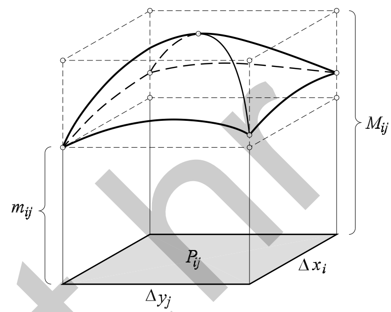
$$S(\pi)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}M_{ij}(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})$$

nazivamo *gornjom Darbouxovom sumom* razdiobe π.

Ako za svaki $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ odaberemo neku točku $(\eta_i, \xi_j) \in P_{ij}$ onda za zadanu razdiobu π možemo definirati *integralnu sumu*

$$S'(\pi) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\eta_i, \xi_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$





Uočimo da sve tri definirane sume predstavljaju volumene. Svaki pribrojnik sume je volumen kvadra nad pravokutnikom P_{ij}, samo su visine kvadara različite. U donjoj su to sumi infimumi od f na svakom P_{ij}, u gornjoj su to supremumi, a u integralnoj sumi visina je vrijednost funkcije f u nekoj točki od P_{ij}.

Jasno je da za ovako definirane sume vrijedi

$$m(b-a)(d-c) \leqslant s(\pi) \leqslant S'(\pi) \leqslant S(\pi) \leqslant M(b-a)(d-c).$$

Ako postojećoj razdiobi π dodamo barem jednu točku pri dijeljenju segmenta $[a, b]$ ili $[c, d]$, tada ćemo dobiti razdiobu pravokutnika P koja je finija od π. Jasno je da je donja Darbouxova suma nove razdiobe veća od $s(\pi)$, a gornja suma nove razdiobe je manja od $S(\pi)$.

Vrijedi i tvrdnja da je svaka donja Darbouxova suma manja od bilo koje gornje Darbouxove sume. Preciznije rečeno: ako su π_1 i π_2 bilo koje dvije razdiobe pravokutnika P, onda je $s(\pi_1) \leqslant S(\pi_2)$ i $s(\pi_2) \leqslant S(\pi_1)$. Ove nejednakosti dokazujemo uvođenjem nove razbiobe π koja nastaje kad se na intervalu $[a, b]$ uzme unija diobenih točaka razdioba π_1 i π_2, isto tako na intervalu $[c, d]$. Razdioba π je finija od razdioba π_1 i π_2, pa vrijedi

$$s(\pi_1) \leqslant s(\pi) \leqslant S(\pi) \leqslant S(\pi_2)$$

i

$$s(\pi_2) \leqslant s(\pi) \leqslant S(\pi) \leqslant S(\pi_1).$$

Neka je A skup donjih Darbouxovih suma po svim razdiobama pravokutnika P, na isti način definiramo skup B kao skup svih gornjih Darbouxovih suma. Iz gornjih nejednakosti slijedi da je skup A omeđen odozgo, a skup B omeđen odozdo. Prema tome postoji supremum skupa A i infimum skupa B koje označavamo

$$I_*(f, P) = \sup A$$
$$I^*(f, P) = \inf B.$$

i nazivamo *donjim i gornjim Riemannovim integralom* funkcije f na pravokutniku P. Iz upravo dokazanih nejednakosti slijedi $I_*(f, P) \leqslant I^*(f, P)$.

Riemannov integral

Definicija 1. Ograničena funkcija $f : P \to \mathbf{R}$ je *integrabilna u Riemannovom smislu na pravokutniku* P ako je

$$I_*(f, P) = I^*(f, P),$$

pri čemu se taj broj zove *Riemannov integral funkcije* f *na pravokutniku* P i označava

$$\iint_P f(x, y)\, dxdy.$$

Može se pisati i

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\, dxdy.$$

Teorem koji govori o nužnom i dovoljnom uvjetu integrabilnosti funkcija dviju varijabli analogan je teoremu za funkcije jedne varijable.

Teorem 1. (Nuždan i dovoljan uvjet integrabilnosti) *Omeđena funkcija* $f : P \to \mathbf{R}$*,* $P = [a, b] \times [c, d]$*, je integrabilna na* P *ako i samo ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji razdioba* π *pravokutnika* P *takva da je* $S(\pi) - s(\pi) < \varepsilon$.

Dokaz. Dokažimo najprije da iz integrabilnost od f slijedi da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji razdioba π takva da je $S(\pi) - s(\pi) < \varepsilon$. Integrabilnost funkcije f znači jednakost gornjeg i donjeg integrala $I_*(f, P) = I^*(f, P)$. Iz definicije supremuma skupa svih donjih suma slijedi da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji razdioba π_1 takva da je

$$I_*(f, P) - s(\pi_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Iz definicije infimuma skupa svih gornjih suma slijedi da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji razdioba π_2 takva da je

$$S(\pi_2) - I^*(f, P) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Neka je π razdioba dobivena uzimanjem unije diobenih točke razdioba π_1 i π_2 na intervalu $[a, b]$, isto tako na intervalu $[c, d]$. Razdioba π je finija od razdioba π_1 i π_2, pa vrijedi

$$\begin{aligned} s(\pi_1) &\leqslant s(\pi) \\ S(\pi) &\leqslant S(\pi_2). \end{aligned}$$

Prema tome, koristeći gornje nejednakosti imamo

$$S(\pi) - s(\pi) \leqslant S(\pi_2) - s(\pi_1) = S(\pi_2) - I^*(f, P) + I_*(f, P) - s(\pi_1) < \varepsilon.$$

Da bismo dokazali dovoljnost krećemo od tvrdnje da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji razdioba π takva da je

$$S(\pi) - s(\pi) < \varepsilon,$$

što povlači

$$I^*(f, P) - I_*(f, P) \leqslant S(\pi) - s(\pi) < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Prema tome $I^*(f, P) - I_*(f, P) = 0$, pa je f integrabilna funkcija. ■

Upravo dokazani teorem kaže da omeđena funkcija ima dvostruki integral na pravokutniku ako i samo ako se razlika između gornje i donje Darbouxove sume može učiniti po volji malom, uz uvjet da su stranice pravokutnika već dovoljno male. To znači da funkcija ima male oscilacije pri čemu oscilacijom funkcije f na P_{ij} zovemo razliku $M_{ij} - m_{ij}$. Prisjetimo se Dirichletove funkcije koja za svaku racionalnu vrijednost argumenta ima vrijednost 1, a za iracionalnu 0. To je klasičan primjer ograničene funkcije jedne varijable koja nije integrabilna upravo zbog velikih oscilacija. Analogno ćemo definirati ograničenu funkciju dviju varijabli koja nije integrabilna.

Primjer 1. Neka je $P = [0,1] \times [0,1]$. Definiramo

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{ako su } x \text{ i } y \text{ racionalni brojevi} \\ 0 & \text{ako } x \text{ ili } y \text{ nije racionalan broj.} \end{cases}$$

Za svaku razdiobu π je $m_{ij} = 0$, $M_{ij} = 1$ za svaki i, j, pa je prema tome $s(\pi) = 0$, a $S(\pi) = 1$ bez obzira koju razdiobu uzeli. Donji integral $I_*(f,P) = 0$, a gornji $I^*(f,P) = 1$, pa zaključujemo da funkcija nije integrabilna.

Jednu klasu integrabilnih funkcija na pravokutniku čine neprekinute funkcije.

Teorem 2. *Ako je* $f : P \to \mathbf{R}$ *neprekinuta na* $P = [a,b] \times [c,d]$ *onda je i integrabilna na* P.

Dokaz. Budući da je funkcija f neprekinuta na zatvorenom pravokutniku P, f je na P i jednoliko (uniformno) neprekinuta. Podsjetimo se da jednolika neprekinutost funkcije na P znači da

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall T_1 \in P\ \forall T_2 \in P\ \left(\|T_1 - T_2\| < \delta \implies |f(T_1) - f(T_2)| < \varepsilon \right),$$

tj. za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve točke $T_1(x_1,y_1)$, $T_2(x_2,y_2) \in P$ vrijedi

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta \implies |f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \varepsilon.$$

Uzmimo $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)}$, pa u skladu s gornjom definicijom postoji $\delta > 0$ takav da za bilo koje dvije točke iz P vrijedi

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta \implies |f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)} = \varepsilon_1.$$

Za taj δ biramo razdiobu π takvu da je dijametar te razdiobe $\delta(\pi) < \delta$. U takvoj razdiobi se svaki pravokutnik P_{ij} može obuhvatiti nekim krugom polumjera $\delta/2$. Budući da gornja implikacija vrijedi za svake dvije točke iz P, onda svakako vrijedi i ako uzmemo točku u kojoj se ostvaruje minimum funkcije f na P_{ij} i točku u kojoj se ostvaruje maksimum funkcije f na P_{ij}. Prema tome $0 \leqslant M_{ij} - m_{ij} < \varepsilon_1$, a iz toga dalje slijedi

$$\begin{aligned} S(\pi) - s(\pi) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \big(M_{ij} - m_{ij}\big)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ &\leqslant \varepsilon_1 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \varepsilon_1 (b-a)(d-c) = \varepsilon, \end{aligned}$$

što po prethodnom teoremu daje integrabilnost funkcije f. ∎

Uz uvjete Teorema 2. iz $s(\pi) \leqslant S'(\pi) \leqslant S(\pi)$ odmah slijedi da integralna suma $S'(\pi)$ ima isti limes kao $S(\pi)$ i $s(\pi)$ kada $\delta(\pi) \to 0$. Zorno je zapisati sljedeću jednakost jer u njoj vidimo kako iz sume $S'(\pi)$ nastaje integral

$$\lim_{\delta(\pi)\to 0} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\eta_i, \xi_j) \triangle x_i \triangle y_j = \iint_P f(x,y)\, dxdy.$$

Ovdje se vidi i razlog zašto dvostruki integral označavamo s izduženim slovom S.

Sljedeći teorem, koji se obično naziva Fubinijev teorem, omogućava nam računanje dvostrukog integrala pomoću jednostrukog.

Teorem 3. *Ako postoji dvostruki integral funkcije $f : P \to \mathbf{R}$ na $P = [a,b] \times [c,d]$ onda je*

$$\iint_P f(x,y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy.$$

Dokaz. Uzmimo razdiobu pravokutnika P kao na početku poglavlja, neka je

$$P_{ij} = \{(x,y) |\, x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i,\ y_{j-1} \leqslant y \leqslant y_j\}, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n.$$

Vrijedi

$$m_{ij} \leqslant f(x,y) \leqslant M_{ij}, \text{ za svaki } \quad (x,y) \in P_{ij}$$

pri čemu su

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \inf_{(x,y)\in P_{ij}} f(x,y) \\ M_{ij} &= \sup_{(x,y)\in P_{ij}} f(x,y). \end{aligned}$$

Za bilo koji učvršćeni $x_i' \in [x_{i-1}, x_i]$ integriranjem gornje nejednakosti dobivamo

$$m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leqslant \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x_i', y)\, dy \leqslant M_{ij}(y_j - y_{j-1}),$$

što nakon zbrajanja po j uz oznaku $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ daje

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij} \Delta y_j \leqslant \int_c^d f(x_i', y)\, dy \leqslant \sum_{j=1}^{n} M_{ij} \Delta y_j.$$

Pomnožimo te nejednakosti s $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ i sumirajmo ih po i

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} \left(\int_c^d f(x_i', y)\, dy \right) \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j.$$

Uz oznaku

$$I(x_i') = \int_c^d f(x_i', y)\, dy$$

izraz s integralom u prethodnoj nejednakosti možemo shvatiti kao integralnu sumu funkcije $I(x)$ na intervalu $[a,b]$. Ostala dva izraza u nejednakosti su donja i gornja

Darbouxova suma funkcije f na pravokutniku P. Budući da integral po pretpostavci teorema postoji, to znači da razlika Darbouxovih suma $S(\pi) - s(\pi)$ teži nuli kad $\delta(\pi) \to 0$, pa iz

$$s(\pi) \leqslant \sum_{i=1}^{m} I(x_i')\Delta x_i \leqslant S(\pi)$$

slijedi

$$\int_a^b I(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \iint_P f(x,y)\,dxdy.$$

Drugi izraz iz iskaza teorema dobije se ako se krene s integracijom po x. ■

Uočimo da u slučaju kad je podintegralna funkcija $f(x,y) = 1$, iznos dvostrukog integrala po pravokutniku P je upravo površina $\mu(P)$ tog pravokutnika:

$$\iint_P dxdy = \mu(P).$$

Primjer 2. Izračunajmo dvostruki integral

$$\iint_P \sin(x+y)\,dxdy,$$

ako je područje P omeđeno pravcima $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, y = 0, y = \pi$.

Integral ćemo računati u oba poretka. Ako najprije računamo integral po y onda imamo

$$\begin{aligned}\iint_P \sin(x+y)\,dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\pi} \sin(x+y)\,dy \right) dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y)\Big|_{y=0}^{\pi} dx \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(x+\pi) - \cos x\right)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 2,\end{aligned}$$

a ako računamo u drugom poretku onda imamo

$$\begin{aligned}\iint_P \sin(x+y)\,dxdy &= \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\,dx \right) dy = -\int_0^{\pi} \cos(x+y)\Big|_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} dy \\ &= -\int_0^{\pi} \left(\cos(\frac{\pi}{2}+y) - \cos y\right)\,dy = \int_0^{\pi} \left(\sin y + \cos y\right)\,dy = 2.\end{aligned}$$

Primjer 3. Izračunajmo dvostruki integral

$$\iint_P x^2y\,dxdy,$$

ako je područje P omeđeno pravcima $x = 2$, $x = 4$, $y = 3$, $y = 4$. Računamo

$$\begin{aligned}\iint_P x^2y\,dxdy &= \int_2^4 \left(\int_3^4 x^2y\,dy \right) dx = \int_2^4 x^2 \left(\int_3^4 y\,dy \right) dx \\ &= \int_2^4 \left(x^2 \frac{y^2}{2}\Big|_{y=3}^{4} \right) dx = \frac{7}{2}\int_2^4 x^2 dx = \frac{196}{3}.\end{aligned}$$

Uočimo da je u ovom slučaju zadani dvostruki integral jednak umnošku jednostrukih integrala tako da vrijedi

$$\iint_P x^2 y\, dxdy = \int_2^4 x^2 dx \cdot \int_3^4 y\, dy,$$

dok se u prethodnom primjeru dvostruki integral ne može svesti na umnožak jednostrukih.

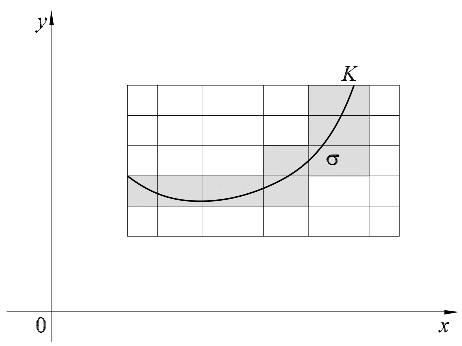
6.2. Dvostruki integral na omeđenom skupu

U prethodnom smo poglavlju definirali pojam dvostrukog integrala na pravokutniku i dokazali neke osnovne teoreme. Naravno, nećemo uvijek integrirati samo po pravokutniku, pa je potrebno proširiti definiciju za slučaj kad integriramo po nekom omeđenom podskupu ravnine. Ideja je jednostavna, pretpostavimo da želimo integrirati neku neprekinutu funkciju f na omeđenom skupu $D \subset \mathbf{R}^2$. Skup D možemo upisati u neki pravokutnik P, a funkciju f zamijenimo funkcijom $\tilde{f}$ koja se na D podudara s funkcijom f, a na $P \setminus D$ je nula. U ovom poglavlju ćemo pojasniti jednakost traženog integrala funkcije f na D i integrala funkcije $\tilde{f}$ na P. Ta jednakost nije očita jer ovako definirana funkcija $\tilde{f}$ može imati prekide na rubu od D. Navedimo najprije teorem koji će nam omogućiti definiciju dvostrukog integrala na D pomoću dvostrukog integrala na pravokutniku.

Teorem 4. *Neka je $f : P \to \mathbf{R}$, $P = [a,b] \times [c,d]$, omeđena funkcija neprekinuta na P osim u točkama neke krivulje K koja se sastoji od konačno mnogo grafova neprekinutih funkcija. Onda je funkcija f integrabilna na P.*

Nećemo navoditi dokaz, nego ćemo samo iznijeti ideju dokaza. Nakon uvođenja razdiobe pravokutnika P na male pravokutnike P_{ij}, uočimo one P_{ij} koji sijeku krivulju K i taj skup nazovimo σ. Znamo da je neprekinuta funkcija integrabilna tj. da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji razdioba π takva da je

$$S(\pi) - s(\pi) < \varepsilon.$$



Treba provjeriti da doprinos pravokutnika iz σ neće poremetiti gornji uvjet. Razlika maksimuma i minimuma funkcije na σ je omeđena, ali je ukupna površina od σ mala, pa dobivamo da će funkcija f i dalje biti integrabilna.

Definicija 2. Neka je $D \subset \mathbf{R}^2$ područje omeđeno zatvorenom krivuljom K koja se sastoji od konačno mnogo grafova neprekinutih funkcija. Neka krivulja K nema samopresijecanja (jednostavno zatvorena krivulja) i neka paralele s osi x i s os y sijeku K u najviše dvije točke. Neka je funkcija $f : D \to \mathbf{R}$, $D \subset P$, $P = [a,b] \times [c,d]$ neprekinuta na D i neka je $\tilde{f} : P \to \mathbf{R}$ definirana s

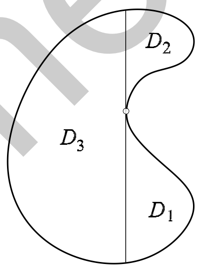
$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \in P \setminus D. \end{cases}$$

Definiramo *dvostruki integral na* D jednakošću

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_P \tilde{f}(x,y)\,dxdy.$$

Po prethodnom teoremu znamo da integral po P postoji i ne ovisi o izboru pravokutnika P.

Napomena. Ako imamo područje čiji rub paralele s osi x ili osi y sijeku više od dva puta, onda područje dijelimo na više područja kao na slici.



Napomena. Vjerojatno se netko zapitao da li smo dvostruki integral mogli odmah definirati na području D bez definicije na pravokutniku. Da, mogli smo odmah napraviti razdiobu skupa D na pravokutnike P_{ij} kao na sljedećoj slici. Pri tome bismo morali imati dvije razdiobe, jednu upisanu u D, čiji su pravokutnici na slici sive boje i jednu opisanu, čiji su pravokutnici deblje uokvireni na slici. Treba se uvjeriti da skup svih donjih i skup svih gornjih suma ima isti supremum, odnosno infimum bez obzira na to da li promatramo sve "vanjske" ili sve "unutarnje" razdiobe. "Vanjska" razdioba se razlikuje od "unutarnje" po tome što ima pravokutnike koji sijeku rub od D. U gornjoj sumi doprinos tih pravokutnika ne prelazi Mp, pri čemu je M gornja međa funkcije na D, a p je zbroj površina pravokutnika koji s rubom od D imaju barem jednu točku zajedničku. Kad dijametar razdiobe teži nuli, tada i taj doprinos ide u nulu. Slično je i s donjom sumom, pa možemo zaključiti da doprinos na rubu ne mijenja vrijednost integrala.