UVOD

Obrada rezultata mjerenja i račun pogrešaka

Mjerimo li određenu veličinu nekoliko puta zaredom, ne mijenjajući pri tome mjerni instrument i metodu, dobit ćemo, bez obzira na trud i preciznost, niz različitih vrijednosti koje će oscilirati oko određene prosječne vrijednosti. Svako mjerenje neke fizikalne veličine sa sobom nosi i pogrešku uzrokovanu konačnom preciznošću mjernog instrumenta, subjektivnim stanjem opažača ili promjenama uvjeta mjerenja (temperatura, vlaga, tlak itd.).

Fizikalne veličine možemo mjeriti na dva načina: direktno (primarne veličine) i indirektno (sekundarne veličine). Primjer direktno mjerenih veličina su duljina stola i temperatura. Volumen tijela, površinska napetost, viskoznost i sl. predstavljaju indirektno mjerene veličine. Vrijednost indirektno mjerenih veličina određujemo računski, odnosno iz odgovarajućeg matematičkog izraza.

Cilj svakog mjerenja je određivanje prave vrijednosti nepoznate fizikalne veličine. Kako je spomenuto, pogreške u mjerenjima nije moguće izbjeći tako da dobivena mjerenja nikada neće odgovarati pravoj vrijednosti mjerene veličine. Dakle, potrebno je provesti račun pogrešaka kako bismo ustvrdili mjeru odstupanja naših mjerenja od prave vrijednosti.

1. Vrste pogrešaka

Grube pogreške

Grube pogreške nastaju nepažnjom opažača u izvođenju mjerenja (netočno očitavanje mjernih skala i pogrešno rukovanje mjernim uređajem). Višestrukim mjerenjem određene veličine grube je pogreške vrlo lako prepoznati jer leže daleko izvan područja vrijednosti u kojima se nalaze ostala mjerenja. Takve pogreške odbacujemo i ne uzimamo ih u obzir prilikom obrade rezultata.

Sustavne pogreške

Jedan od glavnih uzroka sustavnih pogrešaka su greške mjernih uređaja (primjerice netočno baždaren termometar koji pri normiranom atmosferskom tlaku u kipućoj vodi pokazuje $105\,^\circ\mathrm{C}$, a u zaleđenoj $5\,^\circ\mathrm{C}$). Drugi primjer sustavne pogreške je mjerenje napona voltmetrom čija kazaljka pri potpuno otvorenim stezaljkama pokazuje vrijednost različitu od nule. Mjerimo li primjerice duljinu neke dužine ravnalom neispravne skale, tada su svi rezultati mjerenja preveliki ili premali. Iz navedenih primjera zaključujemo da sustavne pogreške možemo izbjeći jedino mjereći drugim, provjerenim instrumentom.

Slučajne pogreške

Slučajne pogreške rezultat su nesavršenosti mjernih uređaja (fluktuacije u zadnjoj decimali) i naših osjetila, kao i nekontroliranih vanjskih utjecaja. Utječu na mjerenu veličinu, pa ona više ili manje odstupa od prave vrijednosti. Spomenute fluktuacije približno polovinu mjerenja čine previsokim, a polovinu preniskim. Primjer čestog uzroka slučajnih pogrešaka je pogrešna prosudba opažača pri očitavanju vrijednosti na najmanjem podjeljku skale.

Što je slučajna pogreška manja, za mjerenje kažemo da je preciznije. Veća preciznost podrazumijeva i veću sličnost dobivenih vrijednosti izmjerenih veličina, odnosno manje odstupanje. Bitno je napomenuti da velika preciznost mjerenja ne podrazumijeva nužno i točnost mjerenja. Prilikom mjerenja postoji mogućnost postojanja nama nepoznate sustavne pogreške, pa će dobivena mjerenja biti precizna, ali će odstupati od prave vrijednosti. Za razliku od sustavnih, slučajne pogreške mogu biti obrađene statističkom analizom.

2. Račun pogrešaka za direktno mjerene veličine

Srednja vrijednost i pogreške

Višestrukim mjerenjem fizikalnih veličina dobit ćemo niz različitih vrijednosti zbog ranije spomenutih pogrešaka mjerenja. Kako bismo odredili najvjerojatniju vrijednost tražene veličine, provodimo račun pogrešaka.

Ako niz od n mjerenja označimo oznakama $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, za očekivati je da nemaju jednake vrijednosti, pa će jedno od tih mjerenja imati najveću, x_M, a jedno najmanju, x_m, vrijednost. Razliku spomenutih vrijednosti nazivamo *područjem rasipanja* mjerenih vrijednosti. Rezultat će biti to bliži traženoj vrijednosti što je područje rasipanja uže, odnosno što su mjerenja međusobno sličnija.

Vrijednost oko koje se nalaze svi rezultati mjerenja nazivamo *srednjom vrijednošću*. Kada su mjerene vrijednosti više ili manje simetrično raspoređene oko neke vrijednosti, kao srednja vrijednost uzima se *aritmetička sredina* svih pojedinačnih mjerenja:

$$x_s = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{1}$$

gdje je i broj mjerenja. Jedan od razloga upotrebljavanja aritmetičke, a ne neke druge sredine kao srednje vrijednosti, je činjenica da je suma kvadrata odstupanja pojedinih mjerenja od aritmetičke sredine najmanja u odnosu na bilo koju drugu vrijednost.

Osim srednje vrijednosti, potrebno je odrediti i područje rasipanja vrijednosti mjerenja oko aritmetičke sredine. Za prikazivanje rezultata mjerenja fizikalnih veličina služit ćemo se *maksimalnom apsolutnom pogreškom* koja određuje područje rasipanja ako napravimo tri do pet mjerenja. Ako je broj mjerenja veći, tada je to područje određeno standardnom pogreškom. U pravilu se izvodi do pet mjerenja, a pogreške mjerenja iskazuju se na sljedeći način.

Maksimalnom apsolutnom pogreškom nazivamo najveće odstupanje pojedinačnih mjerenja od aritmetičke sredine svih mjerenih vrijednosti, bez obzira na predznak. Označimo li maksimalnu apsolutnu pogrešku sa Δx, tada je

$$\Delta x = |x_e - x_s|\,. \tag{2}$$

U gornjoj formuli x_e predstavlja ekstremnu vrijednost (x_m ili x_M, ovisno o tome za koju je od tih vrijednosti odstupanje veće).

S pomoću maksimalne apsolutne pogreške rezultate mjerenja zapisujemo u sljedećem obliku:

$$x = x_s \pm \Delta x \tag{3}$$

Iz takvog zapisa lako je zaključiti da se tražena veličina nalazi unutar intervala $x_s - \Delta x \leqslant x \leqslant x_s + \Delta x$, iz čega slijedi da je veličina intervala jednaka $2\Delta x$, odnosno dvostruko veća od maksimalne apsolutne pogreške. Stoga maksimalno apsolutno odstupanje pokazuje maksimalnu disperziju mjerenih vrijednosti oko aritmetičke sredine. Na taj način možemo biti uvjereni da je standardna pogreška manja od maksimalne apsolutne.

No, apsolutne pogreške ne pružaju jasnu sliku o valjanosti mjerenja. Mjerimo li primjerice duljine od 5 cm i 5000 cm s točnošću od $\pm 0,1$ cm, pogreške se bitno razlikuju. U prvom je slučaju pogreška mjerenja ± 2 %, dok je u drugom $\pm 0,002$ %. Stoga je osim apsolutnog iznosa pogreške potrebno izračunati i *relativnu pogrešku*, omjer maksimalne apsolutne pogreške i aritmetičke sredine:

$$(\Delta x)_r = \frac{\Delta x}{x_s} = \left(\frac{\Delta x}{x_s} \cdot 100\right) \ \% \tag{4}$$

Kako maksimalnu apsolutnu pogrešku izražavamo istim mjernim jedinicama kao i mjerene vrijednosti, tako relativna pogreška nema dimenziju (obično ju izražavamo u postotcima).

Nakon obrade podataka direktno mjerene veličine preostaje nam jedino prikaz rezultata mjerenja:

$$x = (x_s \pm \Delta x) = x_s\left(1 \pm \frac{\Delta x}{x_s} \cdot 100\ \%\right), \tag{5}$$

gdje tražena vrijednost x fizikalne veličine mora biti izražena u odgovarajućim mjernim jedinicama.

PRIMJER 1.

Iz rezultata mjerenja prikazanih u tablici 1 odredite duljinu olovke mjerene mjerilom najmanje podjele skale 1 mm.

Tablica 1. Rezultati mjerenja duljine olovke.

i	$L/\,\mathrm{mm}$
1	136, 4
2	136, 1
3	136, 3
4	136, 6
5	136, 3

Koristeći (1) i (4), za aritmetičku sredinu i relativnu pogrešku dobivamo vrijednosti $L_s = 136,34\ \mathrm{mm}$, odnosno $\dfrac{\Delta L}{L_S} = 0,19\ \%$, pa je konačan rezultat $L = 136,34\,(1 \pm 0,19\ \%)\ \mathrm{mm}$.

3. Račun pogrešaka za indirektno određene veličine

U mjerenjima je vrlo često potrebno odrediti indirektno mjerene veličine koje su izrazom povezane s direktno mjerljivim veličinama. Neki od primjera indirektno mjerenih veličina su otpor (koji određujemo direktnim mjerenjem napona voltmetrom i jakosti struje ampermetrom) i volumen tijela (koji određujemo direktnim mjerenjem širine, duljine i visine).

Kako se radi o izvedenoj veličini, odnosno o funkciji oblika $y = f(x)$, pogrešku funkcije određujemo s pomoću pogreške veličine x. U tablici 2 prikazano je nekoliko najčešćih funkcijskih ovisnosti i pripadajuće pogreške. Direktno mjerene veličine su označene sa A i B.

Tablica 2. Najčešće funkcijske ovisnosti i pripadajuće pogreške

Funkcija	Relativna pogreška
$y = A + B$	$\dfrac{\Delta A + \Delta B}{A_S + B_S}$
$y = A - B$	$\dfrac{\Delta A + \Delta B}{A_S - B_S}$
$y = A \cdot B$	$\dfrac{\Delta A}{A_S} + \dfrac{\Delta B}{B_S}$
$y = \dfrac{A}{B}$	$\dfrac{\Delta A}{A_S} + \dfrac{\Delta B}{B_S}$
$Y = A^2$	$2 \cdot \dfrac{\Delta A}{A_S}$
$y = A^n$	$n \cdot \dfrac{\Delta A}{A_S}$
$y = \sqrt{A}$	$\dfrac{\Delta A}{2A_S}$

PRIMJER 2.

Određujemo li pogrešku funkcije y, čija je ovisnost o dvjema direktno mjerenim veličinama A i B dana relacijom $y = 0,7 \cdot 10^{-3} \cdot \dfrac{A}{B}$, za koje su rezultati mjerenja $A = 3,25 \cdot (1 \pm 0,07\ \%)$ i $B = 8,53 \cdot (1 \pm 1,9\ \%)$, tada je pogreška funkcije y prema tablici 2 jednaka zbroju pogrešaka veličina A i B, odnosno 1,97 %, pa je konačan rezultat $y = 0,26 \cdot 10^{-3}(1 \pm 1,97\ \%)$.

PRIMJER 3.

Mjeren je promjer žice mikrometarskim vijkom, a rezultati mjerenja prikazani su u tablici 3. Potrebno je izračunati površinu poprečnog presjeka žice.

Tablica 3. Rezultati mjerenja promjera žice.

i	$d/\,\mathrm{mm}$
1	$0,36$
2	$0,35$
3	$0,36$

Iz podataka u tablici 3 dobivamo redom: $d_s = 0,357\ \mathrm{mm}$, $\Delta d = 0,007\ \mathrm{mm}$, te relativna pogreška 1,96 %. Rezultat mjerenja zapisujemo u obliku $d = (0,357 \pm 0,007)\ \mathrm{mm}$ ili $d = 0,357(1 \pm 1,96\ \%)\ \mathrm{mm}$. Površina poprečnog presjeka i promjer žice povezani su relacijom $S = \dfrac{d^2\pi}{4}$. Ovdje je bitno napomenuti da nije ispravno računati površinu za sva mjerenja promjera, dovoljno je u prethodnu relaciju uvrstiti aritmetičku sredinu promjera žice, odnosno $S_s = \dfrac{d_s^2\pi}{4} = 0,1\ \mathrm{mm}^2$. Ako pogledamo tablicu 2, vidimo da je pogreška za površinu dvostruko veća od pogreške za promjer žice, pa konačan rezultat zapisujemo u obliku $S = 0,1(1 \pm 3,92\ \%)\ \mathrm{mm}^2$.

4. Grafički prikaz rezultata mjerenja

Rezultate mjerenja često je potrebno grafički prikazati na milimetarskom papiru, pri čemu se prikazuje ovisnost jedne fizikalne veličine o drugoj (koristeći podatke mjerenja veličine y za različite vrijednosti veličine x). Tako dobivene vrijednosti potom se upisuju u pravokutni koordinatni sustav. Točke određene parom vrijednosti (x, y) daju u ravnini kontinuiranu krivulju. Iz grafičkog je prikaza odmah vidljivo odstupa li pojedinačno mjerenje znatno od ostalih. Ako takvo odstupanje postoji, navedeno je mjerenje potrebno ponoviti.

Kod grafičkog prikaza je vrlo bitno odrediti skale na koordinatnim osima, pri čemu valja voditi brigu o međusobnom razmaku točaka (skale na osima ne moraju biti jednake i ne moraju počinjati od nule). Također je potrebno na koordinatnim osima označiti naziv ili simbol veličine i pripadajuće mjerne jedinice.

U slučaju linearne ovisnosti dviju veličina, gotovo je nemoguće postići da pravac prolazi svim točkama. Stoga je potrebno pronaći i ucrtati onaj pravac od kojega će točke najmanje odstupati. Za ucrtavanje pravca kroz eksperimentalno dobivene točke potrebno je ponajprije odrediti njegovu jednadžbu, za što koristimo *metodu najmanjih kvadrata*. Ona postavlja kriterij da zbroj kvadrata odstupanja eksperimentalnih točaka od traženog pravca bude minimalan. Općenito je pravac zadan jednadžbom $y = ax + b$, gdje su a i b, koeficijent smjera pravca i odsječak na osi y, dani sljedećim relacijama:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n x_s y_s}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n(x_s)^2} \tag{6}$$

$$b = y_s - a\,x_s \tag{7}$$

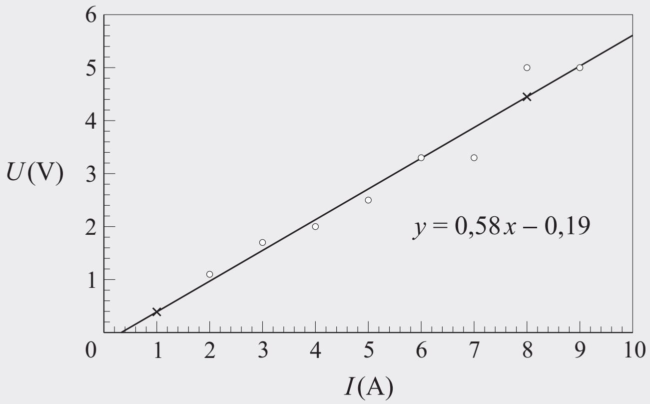
PRIMJER 4.

Grafički prikažite ovisnost napona o struji koristeći rezultate mjerenja iz tablice 4.

Tablica 4. Rezultati mjerenja ovisnosti napona o struji. Uz izmjerene veličine u tablici su navedene i veličine potrebne za metodu najmanjih kvadrata.

n	$\frac{x_i}{(I/\mathrm{A})}$	$\frac{y_i}{(U/\mathrm{V})}$	x_i^2	$x_i y_i$
1	2	1,1	4	2,2
2	3	1,7	9	5,1
3	4	2,0	16	8,0
4	5	2,5	25	12,5
5	6	3,3	36	19,8
6	7	3,3	49	23,1
7	8	5,0	64	40,0
8	9	5,0	81	45,0
	$x_s = 5,5$	$y_s = 2,99$	$\Sigma x_i^2 = 284$	$\Sigma x_i y_i = 155,7$

Uvrštavajući podatke iz tablice 4 u (6) i (7), dobivamo jednadžbu pravca: $y = 0,58\,x - 0,19$. Dobiveni pravac ne povlačimo proizvoljno kroz eksperimentalno dobivene točke, nego za dvije po volji odabrane vrijednosti x računamo pripadne y-koordinate i kroz dobiveni par vrijednosti (x, y) povlačimo pravac kao što je prikazano na slici 1.



Slika 1. Grafički prikaz ovisnosti napona o struji. Simbolom ○ prikazane su izmjerene vrijednosti, a simbolom × vrijednosti izračunane iz pravca.

Vježba 1.

Gustoća tekućine

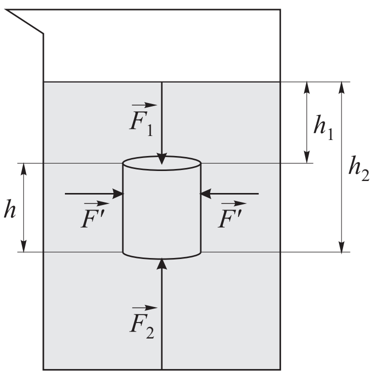
Gustoća, ρ, jedna je od osnovnih karakteristika tvari. Pri određenoj temperaturi i tlaku definira se kao omjer mase tvari, m i njezina volumena, V:

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{1.1}$$

Jedinica za gustoću u međunarodnom sustavu jedinica je $\mathrm{kg/m^3}$. U praksi se često koriste i druge jedinice kao primjerice $\mathrm{g/cm^3}$, $\mathrm{kg/l}$, $\mathrm{g/dl}$ i dr.

Gustoća tvari ovisi o temperaturi, te je neophodno znati pri kojoj je temperaturi određena. Općenito, gustoća raste snižavanjem temperature, dok povišavanjem temperature pada. Iz izraza (1.1) se vidi da je za određivanje gustoće tijela potrebno poznavati volumen i masu tijela. Masu tijela određujemo vaganjem. Volumen geometrijski pravilnih tijela određuje se mjerenjem njegovih dimenzija, dok se kod geometrijski nepravilnih tijela koristi sila uzgona. Sila uzgona na tijelo uronjeno u tekućinu ovisi o gustoći tekućine, pa to svojstvo koristimo za određivanje volumena uronjenog tijela ili gustoće tekućine, ovisno o tome koja od tih veličina je unaprijed poznata, tako da onu drugu određujemo iz mjerenja.

Uzgon je sila koja djeluje na tijela uronjena u tekućine ili plinove i usmjerena je vertikalno uvis. Uzgon nastaje zbog djelovanja razlike hidrostatskih tlakova na gornju i donju plohu tijela.



Slika 1.1. Shematski prikaz sila kojima tekućina djeluje na uronjeno tijelo

Razmotrimo sile koje djeluju na tijelo uronjeno u tekućinu. Neka tijelo ima oblik valjka s bazom površine A i visine h. Na tijelo uronjeno u tekućinu djeluje sila hidrostatskog tlaka na sve plohe tijela. Na svakom mjestu sila je okomita na površinu tijela (slika 1.1). Sile koje djeluju sa strane međusobno se poništavaju jer su jednakog iznosa, a suprotnog smjera, budući da hidrostatski tlak ovisi samo o dubini na koju je površina smještena. Stoga bočne sile ne doprinose ukupnoj sili na uronjeno tijelo.

Sila koja djeluje na gornju bazu, F_1, može se izračunati s pomoću izraza za hidrostatski tlak:

$$F_1 = p_1 A = h_1 \rho_t g A \tag{1.2}$$

dok je sila na donju bazu jednaka:

$$F_2 = p_2 A = h_2 \rho_t g A \tag{1.3}$$

gdje je ρ_t gustoća tekućine, a g ubrzanje sile teže.

Uzgon, U, predstavlja zbroj tih dviju sila, odnosno ukupnu silu kojom tekućina djeluje na tijelo:

$$\vec{U} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \tag{1.4}$$

Budući da sile imaju suprotan smjer, iznos uzgona jednak je njihovoj razlici:

$$\begin{aligned} U &= F_2 - F_1 \\ U &= h_2 \rho_t g A - h_1 \rho_t g A \\ U &= \rho_t g A (h_2 - h_1) \\ U &= \rho_t g A h \end{aligned} \tag{1.5}$$

Gornji izraz možemo pojednostavniti uzimajući u obzir da je umnožak $A \cdot h$ jednak volumenu valjka, te izraz pišemo u obliku:

$$U = \rho_t g V \tag{1.6}$$

Iz izraza (1.6) slijedi da sila uzgona ne ovisi o obliku tijela, nego je ovisna o volumenu tijela.

Navedeni produkt predstavlja i težinu tekućine koja ima isti volumen kao uronjeno tijelo, što je zapravo težina tekućine koju tijelo istisne kad ga uronimo. Stoga možemo reći da je uzgon na uronjeno tijelo iznosom jednak težini tekućine koju tijelo istisne kada ga uronimo. To je poznati Arhimedov zakon.

Uzgon koji djeluje na tijela uronjena u plinove po iznosu je oko tisuću puta manji zbog manjih gustoća plinova.

U ovoj vježbi određujemo gustoću tekućine, ρ_t, s pomoću formule izvedene iz jednadžbe (1.6):

$$\rho_t = \frac{U}{V \cdot g} \tag{1.7}$$

Za izravno mjerenje bilo bi potrebno poznavanje volumena uronjenog tijela.