7. Analiza

Derivacije za početnike

(o pojmu derivacije na relativno neformalan način)

Matematička analiza vrlo je zahtjevno područje matematike i nije baš lako pisati o njoj na popularan način. Kako god da to napravite, stručnjacima će vaš tekst izgledati previše neozbiljan, a početnicima previše težak. Vjerujem da sam u ovoj knjizi ipak dosta uspješno pomirio ove dvije krajnosti. Stručnjaci će ovdje naći zanimljivih primjera i didaktičkih nadahnuća. Nestručnjacima ovo poslije može biti dobar temelj i priprema za kasnije proučavanje analize iz klasičnih udžbenika.

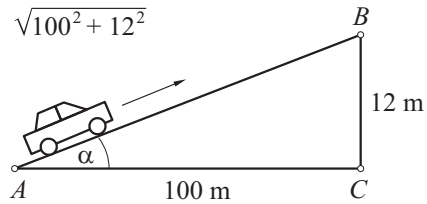
Na pitanje: "Čime se matematička analiza bavi?" najkraći mogući odgovor bio bi ovaj: "Ona se bavi derivacijama i integralima funkcija." A ako tko traži više detalja, rekao bih: "Da bi se mogla baviti spomenutim stvarima, ona se mora prethodno baviti nizovima, redovima, limesima i neprekidnošću." U ovom poglavlju riječ je o derivacijama, u sljedećem o integralima, a potom o nizovima i redovima.

Sve ostaje na razini osnovne analize, dakle uopće ne spominjem funkcije više varijabli, parcijalne derivacije, višestruke i krivuljne integrale, kompleksne funkcije i diferencijalne jednadžbe. Način izlaganja nije (i ne može ni biti) matematički strog, ali sam se nastojao tom principu barem približiti. Pretpostavlja se da čitatelj dobro razumije pojam funkcije i njezina grafa u Kartezijevu koordinatnom sustavu.

Problem brzine rasta funkcije. Uzmimo funkcije $f(x) = x$ i $g(x) = x^2$. Obje za $x = 1$ dobivaju vrijednost 1. To pišemo i ovako: $f(1) = 1$, $g(1) = 1$. Ali kako se ponašaju te funkcije za $x > 1$? Znamo da ako raste vrijednost x, rastu i obje funkcije. Ali ne rastu jednako brzo, jer je $f(3) = 3$, a $g(3) = 9$. Ili $f(5) = 5$, a $g(5) = 25$. Dakle, neke funkcije rastu brže, a neke sporije. Ima ih koje uopće ne rastu ili čak opadaju. Osim ovoga, čak se i jedna te ista funkcija ne mijenja u svim svojim dijelovima jednakom brzinom.

Bilo bi korisno kad bismo mogli brojčano izraziti koliko brzo se zadana funkcija $f(x)$ mijenja u nekoj zadanoj točki x_0. Možemo za početak pogledati koliko je $f(x_0)$ i zatim za usporedbu uzeti neku malo veću točku $x_0 + c$ (gdje je $c > 0$) i pogledati koliko je $f(x_0 + c)$. Tada kažemo da je funkcija porasla, odnosno promijenila se za $f(x_0 + c) - f(x_0)$. Taj se rast dogodio zato što je x_0 porastao za c. Jedan te isti rast možemo nazvati brzim ako se odvijao na kratkom putu c, a sporim ako je put c velik. Želimo li znati ne samo "koliko" se funkcija promijenila nego i "koliko brzo", moramo podijeliti $f(x_0 + c) - f(x_0)$ sa c.

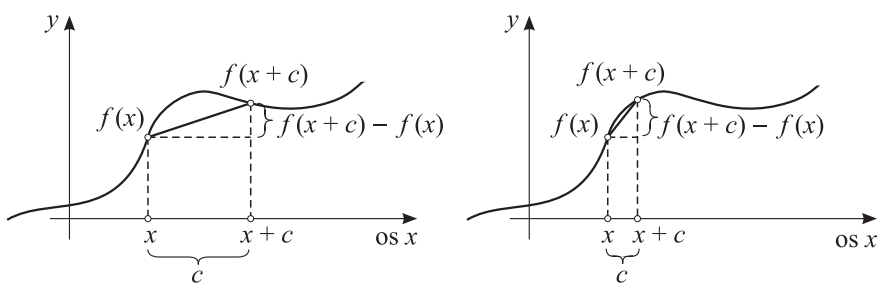
Nagib ceste. Primjer za ovo imamo u prometu. Vjerojatno ste zapazili prometni znak koji kaže da cesta ima uspon za određeni broj postotaka. Na sljedećoj slici je znak za $12\ \%$, a pored njega je i objašnjenje. To je kao da nakon $100\,\mathrm{m}$ vožnje po horizontali $\overline{AC}$ najednom skočite u zrak $12\,\mathrm{m}$ po dužini $\overline{CB}$. Ili da se postepeno penjete po hipotenuzi $\overline{AB}$ pravokutnog trokuta s osnovicom 100 m i visinom 12 m. Može se reći i da se penjete po kraku kuta α čiji je tangens jednak $12/100$ ili $0,12$. Što je kut uspona veći, tj. uspon strmiji, to ćete se u tih $100\,\mathrm{m}$ više popeti. (Da je kut bio okomit, uspon bi bio "beskonačno posto".) Zato je logično što strminu uspona prikazujemo ovim omjerom.



Dakle, izrazili smo brzinu promjene neke funkcije $f(x)$ uz uvjet da je veličina x porasla za vrijednost c, i to kao omjer $\dfrac{f(x_0+c)-f(x_0)}{c}$. No moguće je i da se funkcija za različite vrijednosti x iz intervala $[x_0, x_0+c]$ mijenjala nejednolikom brzinom. Ovaj je omjer zapravo tek *prosječna* brzina promjene na zadanom intervalu. Ili, geometrijski rečeno, prosječan nagib funkcije na tom intervalu.

Brzina promjene u zadanoj točki. Što to znači kad proučavamo funkciju f "u točki x"? To znači da gledamo vrijednost funkcije kad nezavisna varijabla ima vrijednost x. Ili, geometrijski, da gledamo onu točku grafa funkcije koja na x-osi ima vrijednost x.

Kako bismo izračunali brzinu mijenjanja funkcije baš u onom trenutku dok smo bili u točki x? Rješenje zvuči jednostavno, a ipak u njemu leži čitava tajna matematičke analize. Sastoji se u tome da uzimamo što je moguće manji c i potražimo granični slučaj (limes). To se vidi i na sljedećoj slici, gdje je ista funkcija nacrtana dva puta:



Na desnom crtežu c je manji nego na lijevom. Vidi se da pri smanjivanju broja c dužina kroz točke $(x, f(x))$ i $(x+c, f(x+c))$ sve bolje prianja uz graf funkcije, a onda i omjer $\dfrac{f(x+c)-f(x)}{c}$ sve bolje prikazuje nagib (strminu) funkcije! Kad c teži u nulu, spomenuta dužina teži prema tangenti na funkciju u točki $(x, f(x))$, a spomenuti omjer teži k nagibu (strmini) te tangente. Ako ta granična vrijednost od tog omjera postoji, zovemo je prvom derivacijom. Točnije rečeno, prvom derivacijom funkcije f, i to u točki x. Ta granična vrijednost (limes) postoji uglavnom za sve funkcije zadane uobičajenim formulama (potencije, korijeni, trigonometrijske i arcus-funkcije, eksponencijalne i logaritamske te razne kombinacije spomenutih funkcija). Šaljivo rečeno, ona postoji za sve "poštene" funkcije. Gotovo sve funkcije koje u praksi srećemo zaista su derivabilne, tako da njih doživljavamo kao normalne, a one druge kao rijetke izuzetke.

Napominjem da isti limes treba vrijediti i za približavanje s lijeve strane $c < 0$, inače derivacija u točki x ne postoji.

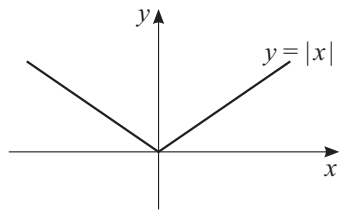
Derivacija čitave funkcije. Iz prethodne priče vidi se da prva derivacija funkcije $f(x)$ *u točki* x nije ništa drugo nego lokalna brzina promjene te funkcije. Tj., promjena same funkcije u odnosu na promjenu varijable x. A kad je nacrtan graf te funkcije, onda derivacija dobiva i geometrijsko značenje: to je strmina (nagib) tog grafa u x. Kad kažemo "nagib grafa", mislimo na nagib tangente u toj točki x.

Dakle, ako poznajemo funkciju $f(x)$, mi uz pomoć granične vrijednosti (limesa) od omjera $\dfrac{f(x+c)-f(x)}{c}$ dobijemo njezinu brzinu mijenjanja. Ali ponavljam, to je brzina koja vrijedi samo u x. Kad bismo *svim ostalim* točkama x dodijelili brzine koje *za njih* vrijede, dobili bismo jednu novu funkciju. Ona se zove *prva derivacija funkcije* f (ali sada više ne ističemo ono "u točki x"). Bilo bi dobro kad bismo je mogli izraziti nekim pravilom f'. Pogledajmo primjer: $f(x) = x^2$. Tada gledamo omjer

$$\frac{(x+c)^2 - x^2}{c} = \frac{x^2 + 2cx + c^2 - x^2}{c} = 2x + c\,.$$

Pustimo da c teži u 0, pa dobijemo $2x$. Znači, koji god x odabrali, limes je jednak $2x$, i možemo pisati $f'(x) = 2x$. Kažemo ukratko: derivacija od x^2 je $2x$.

U šiljku nema derivacije. Izraz $\dfrac{f(x+c)-f(x)}{c}$ zovemo *diferencijalnim kvocijentom*. Onda je derivacija limes diferencijalnog kvocijenta kada c teži u 0. Za 99 % funkcija koje možete sresti u praksi taj limes je jednak bez obzira na to približava li se izraz $(x+c)$ vrijednosti x s desne ili lijeve strane, tj. je li $c < 0$ (lijevo) ili $c > 0$ (desno). Zato se na to obično i ne obaziremo. Pogledajmo sada jedan primjer gdje to ipak nije nevažno!



Funkcija $f(x) = |x|$ (apsolutna vrijednost ili modul od x) kao da je sastavljena od dvije funkcije: za brojeve $x \geqslant 0$ to je funkcija $f(x) = x$, a za brojeve $x < 0$ to je $f(x) = -x$. Dakle, dva pravca. Pogledajmo pažljivije onaj pozitivni dio! Kolika je derivacija od $f(x) = x$? Računamo diferencijalni kvocijent: $\dfrac{(x+c)-x}{c} = 1$. On je konstantan i iznosi 1 za svaki x i za svaki c. Stoga je i limes takvog kvocijenta kad c teži u 0 jednak 1, a to bi trebala biti prva derivacija. Za negativne x imamo međutim funkciju $f(x) = -x$. Tu je kvocijent $\dfrac{-(x+c)-(-x)}{c} = -1$. Dakle, u točki $x = 0$ prva bi derivacija bila 1 kad bismo gledali limes zdesna, odnosno -1 kad bismo gledali limes slijeva. Kako jedinstveni limes ne postoji, zaključak je da funkcija $|x|$ u $x = 0$ nije derivabilna!

Općenito funkcije nisu derivabilne u točkama u kojima njihov graf ima "šiljak". U šiljku funkcija uostalom nema ni tangentu jer pravaca koji funkciju tamo dodiruju ima beskonačno mnogo. A za funkciju koja je svuda derivabilna ponekad se kaže da je "svuda glatka". Zato u jednom od dosadnih matematičkih viceva dvojica matematičara promatraju neku djevojku punu ženskih oblina i jedan kaže: "Ovoj maloj svugdje možeš povući tangentu!"

Rast ili pad funkcije. Sada slijedi najvažnija primjena derivacije – određivanje kada funkcija raste, kada pada, a kada ima minimalne i maksimalne vrijednosti!

Pogledajmo pažljivo omjer $\dfrac{f(x+c)-f(x)}{c}$ za funkciju strogo rastuću u okolini od x. Neka varijabla raste, tj. nazivnik je $c > 0$. Onda je i broj $f(x+c) > f(x)$, pa je i brojnik pozitivan, dakle i cijeli razlomak. Derivacija je, kao limes niza pozitivnih brojeva, također pozitivna, ili u rijetkom slučaju eventualno iznosi 0. Ako je $c < 0$, promatramo funkciju lijevo od x. Tada je brojnik negativan, ali je takav i nazivnik, pa je omjer opet pozitivan.

Za strogo padajuće funkcije dotični je omjer, po istoj logici, uvijek negativan, pa niz negativnih brojeva ima kao svoj limes opet negativan broj, ili u rijetkom slučaju limes iznosi 0.

Dakle, za zadanu funkciju f nađemo njezinu prvu derivaciju f' u obliku nove funkcije. U tu novu funkciju uvrstimo željenu vrijednost varijable x i ako je rezultat pozitivan, funkcija f u točki x raste (kao i u njezinoj najbližoj okolini). Ako je rezultat negativan, funkcija f pada!

Ekstremi funkcije. Ekstremima zovemo minimume i maksimume koje jedna funkcija eventualno ima. Zapravo mislimo na "lokalne" minimume i maksimume. Ako je $x = 5$ lokalni minimum, to znači da je za x lijevo od 5 (ali u bliskoj okolini!) funkcija $f(x)$ veća od $f(5)$ i opada prema $f(5)$. Desno ona raste i

tamo je ona veća od $f(5)$. Naravno, u nekoj manjoj ili većoj okolini. Ali izvan te okoline funkcija se može ponašati proizvoljno. Može čak imati i novih minimuma, većih ili manjih od ovog.

Zanimljivo je da s pomoću derivacije funkcije možemo otkriti ima li funkcija lokalnih minimuma i maksimuma, kao i to gdje se oni nalaze.

Evo kako se to radi! Ako je u x_0 lokalni minimum, znači da prije x_0 (za $x < x_0$, tj. lijevo) funkcija ima veće vrijednosti negoli u x_0, dok poslije x_0 (za $x > x_0$, tj. desno) funkcija ima također vrijednosti veće negoli u x_0. Znači, s lijeve strane od x_0 funkcija pada, a desno je rastuća. Ponavljam, moguće je da se ovaj rast ili pad poslije promijeni, ali u nekoj manjoj ili većoj okolini od x_0 funkcija se ponaša ovako kako smo rekli! Prema razmatranjima u prethodnom odlomku, derivacija je za točke lijevo od x_0 negativna, a desno pozitivna. Pa ako je funkcija nekakva "normalna", tj. ima derivaciju i u x_0 i ova se mijenja kontinuirano (bez skokova), očekuje se da u točki x_0 bude jednaka 0. Naime, jedino se preko nule može iz negativnih brojeva kontinuirano prijeći u pozitivne!

Slično razmatranje vrijedi i ako je u x_0 maksimum.

Stacionarne točke. U točkama x gdje vrijedi $f'(x) > 0$ funkcija raste, a za $f'(x) < 0$ ona opada. Ako je $f'(x) = 0$, onda takav x zovemo *stacionarna točka funkcije* f. Funkcija u takvom x može imati lokalni ekstrem. Ali ponekad ovu jednadžbu zadovoljavaju i neke druge točke koje nisu ekstremi, kao što ćemo vidjeti poslije.

Zato su stacionarne točke tek *kandidati* za lokalne ekstreme. Kad smo ih izračunali, moramo njihov karakter provjeriti dodatnim postupcima. Ti postupci uključuju računanje derivacija višeg reda. Ali često nam oni i ne trebaju jer karakter stacionarne točke možemo odrediti iz prirode zadatka ili računanjem vrijednosti funkcije u okolini te točke (metoda "probaj pa vidi!").

U svakom slučaju, lokalne ekstreme tražit ćemo tamo gdje je $f'(x) = 0$.

Ovaj zaključak nalazi bezbrojne primjene u geometriji, fizici, tehnici i drugdje. Nije ni čudo, jer kad god proučavamo neku prirodnu pojavu ili tehničku veličinu, korisno je izraziti je nekom funkcijom. Prirodno je pitati se kada je ta pojava najviše ili najmanje izražena, a to znači da tu funkciju moramo derivirati i derivaciju izjednačiti s nulom! (A ako u nekom x ne postoji derivacija, taj ćemo x zasebno provjeriti uvrštavanjem ili drugim metodama.)

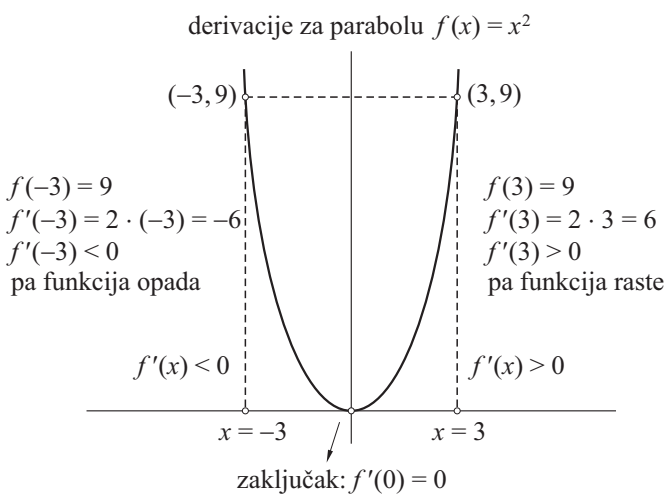
Lokalni ekstremi. Ponovit ćemo što je to lokalni ekstrem. Pogledajmo npr., lokalni maksimum! Ako je x lokalni maksimum funkcije f, to znači da u nekoj okolini od broja x funkcija f poprima samo takve vrijednosti koje su manje od $f(x)$. Pod pojmom *okolina* misli se na brojeve i lijevo i desno od x (obostrana okolina). Ali nije bitno, niti se može odmah znati kolika je ta okolina. Dovoljno je tek da postoji, makar bila sasvim minijaturna. A nekada ona može biti i velika, čak i čitav skup realnih brojeva.

Globalni ekstremi – tri pravila. Kad se traži najveća vrijednost funkcije f na nekom intervalu, segmentu ili uopće na bilo kakvom podskupu realnih brojeva, to znači da se traži *globalni* maksimum. Tada se stvar komplicira. Može funkcija imati i više lokalnih maksimuma, ali odabrat ćemo samo jedan, onaj u kojem je $f(x)$ najveći.

U ovom poslu najprije nalazimo stacionarne točke i ispitamo ih. No ponekad, premda vrlo rijetko, dogodi se i to da funkcija u nekom broju x uopće nema prvu derivaciju, pa taj x nije mogao biti stacionaran. Ali lokalni maksimum ipak može biti i u njemu, pa ga moramo pojedinačno provjeriti! Sjetite se funkcije $f(x) = |x|$ i njezinog šiljka u $x = 0$. U traženju najmanje ili najveće vrijednosti moramo, dakle, uzeti u obzir takve točke.

I na koncu, tu su i rubovi područja. Zadano područje može biti bilo koje, pa njegove rubne točke ne moraju biti stacionarne, ali zna se dogoditi da u njima $f(x)$ bude veći nego u bilo kojem lokalnom maksimumu! Dakle, za globalni ekstrem provjeravamo funkciju na tri mjesta: *u stacionarnim točkama, na rubovima i u točkama bez derivacije*!

Primjer parabole. Imamo parabolu $f(x) = x^2$ na segmentu $[-3, 3]$. Za nju smo maločas našli da je $f'(x) = 2x$, a šiljaka nema. Nacrtati parabolu znamo još iz srednje škole, a to nam znanje pokazuje da je u $x = 0$ njezin minimum, dok za $x < 0$ ona opada, a za $x > 0$ ona raste. Na slici smo uzeli za primjer $x = -3$ i $x = 3$. Ona pokazuje da je prva derivacija lijevo od nule negativna i da funkcija pada, dok je desno od nule derivacija pozitivna i funkcija raste. U nuli je stacionarna točka, a ispitivanjem okoline (po pravilu "lijevo svi veći, desno također") vidimo da je to lokalni minimum i da je $f(0) = 0$. Rubovi područja su $x = -3$ i $x = 3$, a tamo je $f(x) = 9$. Nema točaka bez derivacije. Usporedbom brojeva $f(-3)$, $f(0)$ i $f(3)$ nalazimo da je globalni minimum u $x = 0$, a dva (ravnopravna) globalna maksimuma u $x = -3$ i $x = 3$.



Kako izračunati derivaciju funkcije? Za elementarne funkcije računamo je prema definiciji, pri čemu bismo morali imati neke osnovne predodžbe o pojmu *limes* ili *granična vrijednost*, a i neka od njegovih svojstava trebala bi biti barem intuitivno jasna. (Detaljnije o limesima čitajte u poglavlju "Odavde do vječnosti".) Za deriviranje složenijih funkcija primjenjuju se pravila o derivaciji zbroja, umnoška, kvocijenta i kompozicije dviju funkcija.

- Neka je funkcija konstanta, npr. $f(x) = 5$. Tada je

$$\frac{f(x+c) - f(x)}{c} = \frac{5-5}{c}.$$

  Ako je omjer uvijek 0, onda je i njegov limes 0. Dakle, $f'(x) = 0$. Isto bi bilo i za $f(x) = 17$ i za druge brojeve.

- Neka je $f(x) = ax + b$. Tada je

$$\frac{f(x+c) - f(x)}{c} = \frac{a(x+c) + b - ax - b}{c} = \frac{ac}{c} = a.$$

  Dakle, $f'(x) = a$. Posebno, ako je $f(x) = 2x + 3$, onda je $f'(x) = 2$. Ako je $f(x) = x$, onda je $f'(x) = 1$.

- Ako je $h(x) = f(x) + g(x)$ zbroj dviju funkcija, onda je

$$h'(x) = f'(x) + g'(x).$$

  To se lako dokaže iz definicije derivacije i činjenica da je limes zbroja jednak zbroju limesa. Isto tako, ako je $h(x) = a \cdot f(x)$, gdje je a realan broj, onda je $h'(x) = a \cdot f'(x)$.

- Neka je $h(x) = f(x)g(x)$ umnožak dviju funkcija. Kolika je derivacija umnoška, izražena s pomoću derivacija pojedinih funkcija-faktora? Ona je $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Dokažimo!

  Po definiciji gledamo $f(x+c) \cdot g(x+c) - f(x) \cdot g(x)$ koji ćemo poslije podijeliti sa c i naći limes.

  Ovaj izraz proširimo dodavanjem i oduzimanjem jednog novog izraza:

$$\begin{aligned} &f(x+c)g(x+c) - f(x)g(x) = \\ &\quad = f(x+c)g(x+c) - f(x)g(x+c) + f(x)g(x+c) - f(x)g(x) \\ &\quad = [f(x+c) - f(x)]g(x+c) + f(x)[g(x+c) - g(x)]\,. \end{aligned}$$

  Kad ovo podijelimo sa c i pustimo da c teži u nulu, dobijemo $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

- Neka je $f(x) = x^n$. Tada je $f'(x) = nx^{n-1}$. Ovo dokažimo indukcijom.

  Za stupnjeve $n = 1$ i čak $n = 2$ već smo prije dokazali točnost. Pretpostavimo da vrijedi za neki općeniti n, dakle $(x^n)' = nx^{n-1}$. Za $(n+1)$ trebali

bismo dokazati $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$. S druge strane znamo

$$(x^{n+1})' = (x^n x)' = \text{derivacija umnoška} = nx^{n-1}x + x^n = (n+1)x^n,$$

što je i trebalo dokazati. Napominjem da se dokazati moglo i preko definicije, a uz pomoć binomnog poučka.

- Neka je $f(x) = \sin x$. Tada je

$$\sin(x+c) - \sin x = \sin x \cos c + \cos x \sin c - \sin x.$$

Kada c teži u nulu, $\cos c$ teži u 1, pa preostaje u izrazu samo $\cos x \sin c$. Kad se ovo podijeli sa c i primijeni poznato pravilo $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, rezultat je $f'(x) = \cos x$.

Tablica i pravila. Da biste znali derivirati, trebate poznavati ove slučajeve koje navodim bez dokaza:

$(c)' = 0$, $\quad (x)' = 1$, $\quad (x^2) = 2x$, $\quad (x^3)' = 3x^2$,

$(x^n)' = nx^{n-1}$, $\quad (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\quad \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$, $\quad \left(\dfrac{1}{x^2}\right)' = -\dfrac{2}{x^3}$,

$\left(\dfrac{1}{x^n}\right)' = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$, $\quad (\sin x)' = \cos x$, $\quad (\cos x)' = -\sin x$, $\quad (\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,

$(a^x)' = a^x \ln a$, $\quad (e^x)' = e^x$, $\quad (\log_a x)' = \dfrac{1}{x}\log_a e$, $\quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$,

$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, $\quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, $\quad (\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$,

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad (\operatorname{arc\,tg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$,

Morate poznavati i ova pravila:

Suma:

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x).$$

Umnožak dviju funkcija, odnosno konstante i funkcije:

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$
$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x).$$

Kvocijent je malo složeniji:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Kompozicija funkcija posebno je važna:

$$[f(g(x))]' = [f'(g(x)]g'(x).$$

Tehnika deriviranja

Primjer 1. Derivirajte $f(x) = x^2 \cdot \cos x$.

Ovdje imamo umnožak dviju funkcija: x^2 (čija je derivacija $2x$) i $\cos x$ (čija je derivacija $-\sin x$). Po pravilu o derivaciji umnoška dobijemo

$$f'(x) = 2x \cdot \cos x + x^2 \cdot (-\sin x) = 2x \cos x - x^2 \sin x.$$

A kakva bi bila derivacija funkcije $f(x) = x^2 \cdot \cos x + 17$?

Bila bi ista kao derivacija od $x^2 \cdot \cos x$ jer bismo ovoj trebali samo dodati derivaciju konstante 17, a derivacija svake konstante je nula.

Primjer 2. Derivirajte $f(x) = 2^{2x} - 2^x$.

Ovdje imamo razliku dviju funkcija: 2^{2x} i 2^x. Deriviramo svaku zasebno i nađemo razliku tih derivacija. Pri tome ne zaboravimo da je prva funkcija uz to i kompozicija u kojoj se eksponencijalna funkcija 2^x primjenjuje na linearnu funkciju $2x$. Imamo

$$f'(x) = 2^{2x} \cdot \ln 2 \cdot (2x)' - 2^x \cdot \ln 2 = 2^{2x} \cdot \ln 2 \cdot 2 - 2^x \cdot \ln 2$$

Izlučimo $2^x \cdot \ln 2$ i sjetimo se da je $2^{2x} = 2^x \cdot 2^x$.

$$f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 \cdot (2^x \cdot 2 - 1) = 2^x(2^{x+1} - 1) \ln 2.$$

Druga varijanta je preoblikovanje početne funkcije izlučivanjem 2^x, a potom imamo derivaciju umnoška i njezino pravilo.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2^x \cdot (2^x - 1) \\ \Longrightarrow f'(x) &= \left(2^x\right)' \cdot (2^x - 1) + 2^x \cdot (2^x - 1)' \\ &= 2^x(2^x - 1)\ln 2 + 2^x \cdot 2^x \ln 2 = 2^x \ln 2 \cdot (2^x - 1 + 2^x) \\ &= 2^x \ln 2 \cdot (2 \cdot 2^x - 1) = 2^x(2^{x+1} - 1)\ln 2. \end{aligned}$$

Primjer 3. Derivirajte $\sin(\sin(\sin x)))$.

Pravilo za deriviranje kompozicije funkcija kazuje nam u biti sljedeće. Kad imamo funkciju f čiji argument nije obična nepoznanica x, nego neka druga funkcija od te nepoznanice, onda radimo ovako:

$$[f(\text{nešto})]' = f'(\text{nešto}) \cdot [\text{nešto}]'.$$

Dakle, to "nešto" zamišljamo kao jednu "veliku varijablu" i najprije deriviramo f kao funkciju od takve "varijable". A potom i to "nešto" deriviramo po x.

Za početak imamo funkciju "sinus", a njezin argument je $(\sin(\sin x))$. Deriviranjem najprije dobijemo

$$\cos(\sin(\sin x)) \cdot [\sin(\sin x)]'.$$