Galoisovi članci objavljeni u “Annales de Mathématiques” M. Gergonnea

Dokaz teorema o periodičnim verižnim razlomcima [1]

Poznato je da, po Lagrangeovoj metodi, ako se razvije verižni razlomak jednog od korijena[2] jednadžbe drugog reda, taj će verižni razlomak biti periodičan. Tako će također biti i s jednim od korijena neke jednadžbe proizvoljnog stupnja ako je taj korijen korijen racionalnog[3] faktora drugog stupnja predložene jednadžbe. U tom će slučaju jednadžba imati, barem jedan korijen koji će jednako tako biti periodičan. U oba će slučaja verižni razlomak biti otpočetka periodičan, ili periodičan ali ne otpočetka

[1] *Annales*, sv. XIX, str. 294. (1828.–1829.).

[2] Pod korijenom jednadžbe ovdje se misli na jedno rješenje te jednadžbe.

[3] Racionalni faktor drugog stupnja ovdje znači izraz oblika $ax^2 + bx + c$, gdje su a, b i c racionalni brojevi.

(već nakon nekog konačnog broja koraka u razvoju[4]). U drugom će slučaju postojati barem jedna transformirana jednadžba čiji će barem jedan korijen biti otpočetka periodičan.

No kada jednadžba ima dva periodična korijena, koji odgovaraju istom racionalnom faktoru drugog stupnja, te ako je jedan od njih otpočetka periodičan, tada postoji između tih dvaju korijena jedna posebna relacija za koju se čini da nije primijećena i koja se može izraziti sljedećim teoremom.

TEOREM 1.

Ako je jedan od korijena jednadžbe bilo kojeg stupnja otpočetka periodičan, takva će jednadžba imati neki drugi korijen također periodičan, koji se dobije dijeljenjem negativne jedinice s tim istim (prvim) periodičnim razlomkom zapisanim obrnutim slijedom.

Dokaz. Da bismo fiksirali ideje, uzmimo periode od samo četiri člana, jer jednoliki hod računa dokazuje da će članovi biti isti ako ih stavimo u većem broju. Neka je jedan od korijena jednadžbe bilo kojeg stupnja izražen na sljedeći način:

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \dots}}}}}}}$$

Jednadžba drugog stupnja kojoj će pripadati ovaj korijen, i koja će posljedično sadržavati svoj korelativni drugi korijen, biti

[4] Op. prev

će:

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{x}}}};$$

no otuda redom slijedi:

$$a - x = -\cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{x}}}}, \qquad \frac{1}{a-x} = -\left(b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{x}}} \right),$$

$$b + \frac{1}{a-x} = -\cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{x}}}, \qquad \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a-x}} = -\left(c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{x}} \right),$$

$$c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a-x}} = -\cfrac{1}{d + \cfrac{1}{x}}, \qquad \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a-x}}} = -\left(d + \frac{1}{x} \right),$$

$$d + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a-x}}} = -\frac{1}{x}, \qquad \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a-x}}}} = -x,$$

to jest:

$$x = -\cfrac{1}{d + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a - x}}}}.$$

Ovo je dakle uvijek jednadžba drugog reda koja daje korijene o kojima je ovdje riječ. Ali stavljajući kontinuirano za x, koji je zaista neka određena vrijednost, desnu stranu zadnje jednakosti dobije se:

$$x = -\cfrac{1}{d + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \dots}}}}}}}}.$$

Ovom je jednadžbom ovdje dakle dana druga vrijednost koja je (vidljivo) jednaka -1 podijeljeno s prvom vrijednošću.

U ovome što je prethodilo pretpostavili smo da su predstavljeni korijeni bili manji od jedinice, ali ako bi bilo:

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \dots}}}}}}}},$$

za jednu od vrijednosti od $\frac{1}{x}$ zaključilo bi se:

$$\frac{1}{x} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \dots}}}}}}}.$$

Druga vrijednost od $\frac{1}{x}$ bi dakle, prema onom što je prethodilo, bila: