1. Mehanika s mehanikom tekućina

1.1. Klasična mehanika

1.1.1. Primjeri s metodologijom rješavanja

Primjer 1.1.1. Prvu polovicu puta automobil prijeđe brzinom od $80\,\mathrm{kmh^{-1}}$, a drugu polovicu puta brzinom od $40\,\mathrm{kmh^{-1}}$. Odredite srednju brzinu automobila.

Rješenje: $\overline{v} = 53{,}3\,\mathrm{kmh^{-1}} = 14,8\,\mathrm{ms^{-1}}$

Rješenje.

$v_1 = 80\,\mathrm{km/h}$
$v_2 = 40\,\mathrm{km/h}$
$\overline{v} = ?$

Srednju brzinu $\overline{v}$ definiramo kao: $\overline{v} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} s_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i} = \dfrac{s_1 + s_2 + \ldots}{t_1 + t_2 + \ldots}$, $s = \overline{v} \cdot t$ i $t = \dfrac{s}{\overline{v}}$.

Prva polovica puta jest s_1, a druga s_2. One su jednake: $s_1 = s_2 = \dfrac{s}{2}$. Vremena t_1 i t_2 koja odgovaraju putovima s_1 i s_2 iznose:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} = \frac{s}{2v_1} + \frac{s}{2v_2} = \frac{s}{2} \cdot \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) = \frac{s}{2} \cdot \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}.$$

Dakle, srednjak brzine iznosi: $$\overline{v} = \frac{s}{t} = \frac{\frac{s}{2} + \frac{s}{2}}{\frac{s}{2} \cdot \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}.$$

Uvrštenjem podataka dobivamo: $$\overline{v} = \frac{2 \cdot 80\,\mathrm{km/h} \cdot 40\,\mathrm{km/h}}{120\,\mathrm{km/h}} = 53{,}3\,\mathrm{km/h}.$$

Rezultat treba izraziti u *SI* – mjerama: $$\overline{v} = 53{,}3\,\mathrm{km/h} = 53{,}3 \cdot \frac{10^3\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = 14{,}8\,\mathrm{m/s}$$

Primjer 1.1.2. Željeznički vlak duljine 300 m i brzine 72 km/h mimoilazi se s drugim vlakom duljine 400 m, čija brzina iznosi 54 km/h i suprotnog je smjera od brzine prvog vlaka. U trenutku kad su se susreli, ubrzanje prvog vlaka bilo je $0{,}25\,\mathrm{m/s^2}$ a drugog $0{,}5\,\mathrm{m/s^2}$. Koliko je ukupno trajalo mimoilaženje vlakova?

Rješenje: $t_{\min} = 16{,}93\,\mathrm{s}$

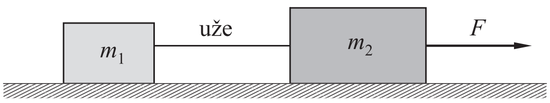
Rješenje.

$$v_1 = 72\,\mathrm{km/h} = 20\,\mathrm{m/s}$$
$$v_2 = 54\,\mathrm{km/h} = 15\,\mathrm{m/s}$$
$$s_1 = 300\,\mathrm{m}, \quad a_1 = 0{,}25\,\mathrm{m/s^2}$$
$$s_2 = 400\,\mathrm{m}, \quad a_2 = 0{,}5\,\mathrm{m/s^2}$$
$$t = ?$$

$$s_1 + s_2 = 700$$
$$v_1 \cdot t + \frac{a_1}{2} \cdot t^2 + v_2 \cdot t + \frac{a_2}{2} \cdot t^2 = 700$$
$$20t + 0{,}125t^2 + 15t + 0{,}25t^2 = 700$$
$$0{,}375t^2 + 35t - 700 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-35 \pm \sqrt{35^2 + 4 \cdot 0{,}375 \cdot 700}}{2 \cdot 0{,}375} = \begin{cases} 16{,}93\,\mathrm{s} \\ -110{,}26\,\mathrm{s} \quad \text{(negativno vrijeme)} \end{cases} \implies t_{\min} = 16{,}93\,\mathrm{s}$$

Primjer 1.1.3. Dva tijela, mase $m_1 = 6\,\mathrm{kg}$ i $m_2 = 9\,\mathrm{kg}$, položena su na vodoravnu glatku podlogu i međusobno povezana užetom. Horizontalnom silom $F = 250\,\mathrm{N}$ najprije djelujemo na veće tijelo, a zatim jednakom silom u suprotnome smjeru na manje tijelo na isti način. Je li sila napetosti užeta T jednaka u oba slučaja? Izračunajte omjer T_1/T_2!

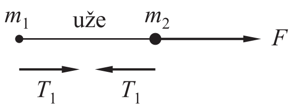


Rješenje: $T_1/T_2 = 2/3$

Rješenje.

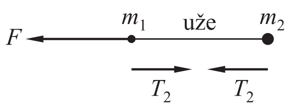
$$m_1 = 6\,\mathrm{kg}$$
$$m_2 = 9\,\mathrm{kg}$$
$$F = 250\,\mathrm{N}$$
$$T_1/T_2 = ?$$

1. slučaj:



$$F - T_1 = m_2 \cdot a \quad \text{i} \quad T_1 = m_1 \cdot a$$
$$F - m_1 a = m_2 a, \qquad F = a(m_1 + m_2),$$
$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}, \qquad T_1 = m_1 \cdot a = F \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

2. slučaj:



$$F - T_2 = m_1 \cdot a \quad \text{i} \quad T_2 = m_2 \cdot a,$$
$$F - m_2 \cdot a = m_1 \cdot a \quad \text{i} \quad F = a(m_1 + m_2)$$
$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} \quad \text{i} \quad T_2 = F \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{F \cdot \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}}{F \cdot \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Primjer 1.1.4. Tijelo mase polovice kilograma giba se pravocrtno. Jednadžba koja povezuje prijeđeni put tijela s vremenom jest $s = a - b \cdot t + c \cdot t^2 - d \cdot t^3$, u kojoj konstante iznose: $c = 5\,\mathrm{ms}^{-2}$, $d = 1\,\mathrm{ms}^{-3}$. Izračunajte silu koja djeluje na tijelo na kraju prve sekunde gibanja.

Rješenje: $F = 2\,\mathrm{N}$

Rješenje.

$m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$
$c = 5\,\mathrm{ms}^{-2}$
$d = 1\,\mathrm{ms}^{-3}$

$F = ?$

$$F = m \cdot a, \qquad a = \ddot{s} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$s = a - bt + ct^2 - dt^3$$
$$\dot{s} = -b + 2ct - 3dt^2, \qquad \ddot{s} = 2c - 6dt$$
$$\ddot{s} = a = 2 \cdot 5 - 6 \cdot 1 \cdot 1 = 4\,\mathrm{ms}^{-2}$$
$$F = m \cdot a = m \cdot \ddot{s} = 0{,}5 \cdot 4 = 2\,\mathrm{N}$$

Primjer 1.1.5. Dva utega mase $m_1 = 3\,\mathrm{kg}$ i $m_2 = 1{,}5\,\mathrm{kg}$ povezana su preko koloture laganom nerastezljivom niti. Izračunajte:

a) ubrzanje a kojim se tijela gibaju na koloturi,

b) silu napetosti niti.

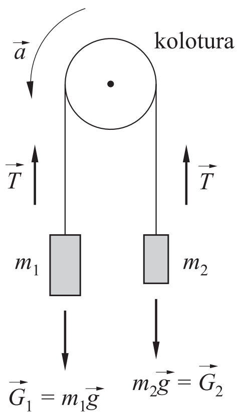
Zanemarite trenje između niti i koloture, te masu koloture. Računajte s $g = 9{,}81\,\mathrm{ms}^{-2}$.

Rješenje: a) $a = 3{,}27\,\mathrm{m/s}^2$; b) $T = 19{,}62\,\mathrm{N}$

Rješenje.

$m_1 = 3\,\mathrm{kg}$
$m_2 = 1{,}5\,\mathrm{kg}$

$a = ? \quad T = ?$



a) $a(m_1 + m_2) = G_1 - G_2 = g(m_1 - m_2)$

$$a = g \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 9{,}81 \cdot \frac{1{,}5}{4{,}5}\,\mathrm{ms}^{-2}$$
$$a = 3{,}27\,\mathrm{m/s}^2$$

b) Jednadžbe gibanja za utege:

$$m_1 \cdot a = m_1 g - T \tag{1}$$
$$m_2 \cdot a = T - m_2 g \tag{2}$$

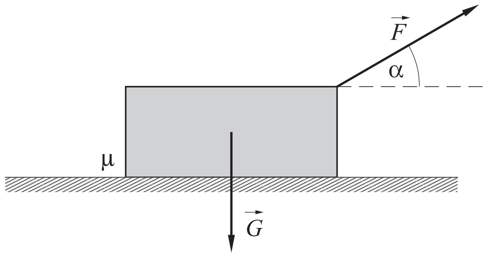
Iz (1) slijedi

$$T = m_1 g - m_1 a = m_1 g - m_1 g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = m_1 g \left(1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)$$
$$T = m_1 g \frac{m_1 + m_2 - m_1 + m_2}{m_1 + m_2} = m_1 g \frac{2m_2}{m_1 + m_2} = 9{,}81 \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 1{,}5}{4{,}5}\,\mathrm{N}$$
$$T = 19{,}62\,\mathrm{N}$$

Primjer 1.1.6. Drveni blok težine G položen je na hrapavu horizontalnu podlogu. Koeficijent trenja između tijela i podloge jest μ. Silom F djelujemo na tijelo tako da možemo mijenjati kut nagiba sile α prema horizontalnoj podlozi (vidi sliku). Odredite:

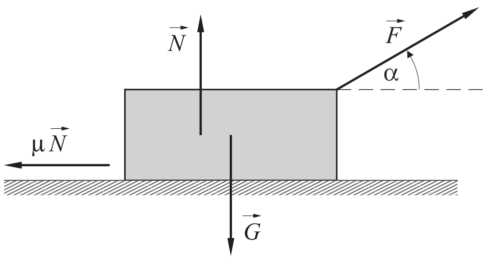
a) Uvjet za kut α pri kojemu će sila F biti minimalna, za jednoliko gibanje bloka.

b) Izračunajte koeficijent trenja μ, prema dobivenome uvjetu, ako je kut $\alpha = 30^\circ$.



Rješenje: a) $\mu = \operatorname{tg}\alpha$; b) $\mu = \operatorname{tg} 30^\circ = 0{,}58$

Rješenje.
a)



Jednadžba gibanja povlači da vrijedi:

$$\sum F_x = 0 \quad \text{i} \quad \sum F_y = 0 \tag{1}$$

$$\begin{aligned} F\cdot\cos\alpha - \mu\cdot N = 0 \quad \text{i} \\ G - F\cdot\sin\alpha - N = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

$$N = \frac{F\cdot\cos\alpha}{\mu} \tag{3}$$

$$G - F\cdot\sin\alpha - \frac{F\cdot\cos\alpha}{\mu} = 0 \tag{4}$$

Iz jednadžbe (4) dobivamo

$$\mu G - \mu F\cdot\sin\alpha - F\cdot\cos\alpha = 0$$
$$F = \frac{\mu G}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha},$$

što daje

$$F = f(G, \alpha, \mu). \tag{5}$$

b) Iz relacije (5), minimum dobivamo deriviranjem tako da brojnik derivacije izjednačimo s nulom:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{-\mu G\cdot(-\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)^2} = 0$$
$$+\mu G\sin\alpha - \mu^2 G\cos\alpha = 0$$
$$\sin\alpha = \mu\cos\alpha$$
$$\mu = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Komentar. Identičan rezultat smo dobili i na predavanjima, kad smo analizirali određivanje $\mu_{\text{stat.}}$ Coulombovom metodom kosine.

Primjer 1.1.7. Lopta je izbačena vertikalno uvis brzinom 10 m/s s ruba krova zgrade visoke 35 m. Izračunajte:

a) vrijeme uspinjanja,

b) najveću visinu koju lopta dosegne,

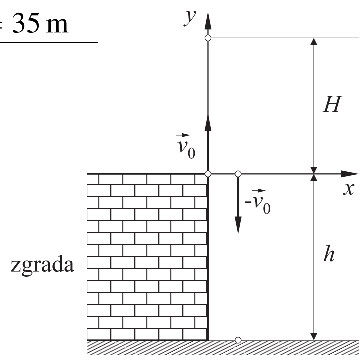
c) vrijeme potrebno da se lopta vrati do ruba zgrade,

d) trenutak udara lopte u tlo u podnožju zgrade (ukupno trajanje hica).

Rješenje: a) $t_H = 1{,}0194\,\mathrm{s}$; b) $H = 5{,}097\,\mathrm{m}$; c) $t_u = 2{,}039\,\mathrm{s}$; d) $t_{ud} = 3{,}88\,\mathrm{s}$

Rješenje.

$v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$
$h = 35\,\mathrm{m}$



a) *Vrijeme uspinjanja:*
Na najvećoj visini vertikalnog hica, brzina lopte će biti nula:

$$v = v_0 - gt,$$

$$v = 0: \quad v_0 - gt_H = 0 \implies t_H = \frac{v_0}{g} = \frac{10}{9{,}81} = 1{,}0194\,\mathrm{s}.$$

b) *Najveća visina koju lopta dosegne:*
Prema koordinatnom sustavu na slici, put lopte opisujemo jednadžbama:

$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2, \quad v = v_0 - gt.$$

Najveća visina: $y = H$ kad je vrijeme $t = t_H$

$$H = v_0 t_H - \frac{1}{2}gt_H^2 = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}g \cdot \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10^2}{9{,}81} = 5{,}097\,\mathrm{m}.$$

c) *Vrijeme potrebno da se lopta vrati do ruba zgrade:*
Vrijeme uspinjanja podudarno je vremenu padanja pa traženo vrijeme iznosi:

$$t_u = 2t_H = 2\frac{v_0}{g} = 2 \cdot \frac{10}{9{,}81} = 2{,}039\,\mathrm{s} \quad \text{ili} \quad y = 0: \quad v_0 t_u - \frac{1}{2}gt_u^2 = 0, \quad v_0 = \frac{1}{2}gt_u, \quad t_u = \frac{2v_0}{g}.$$

d) *Ukupno trajanje hica do udara lopte u tlo:*
To je vrijeme uspinjanja t_H i vrijeme slobodnog padanja s visine $(h+H)$:

$$t_{ud} = t_H + \sqrt{\frac{2s}{g}} = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{2(h+H)}{g}} = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{2H}{g}} = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{v_0^2}{g^2}},$$

$$t_{ud} = \frac{10}{9{,}81} + \sqrt{\frac{70}{9{,}81} + \frac{100}{9{,}81^2}} = 3{,}88\,\mathrm{s}$$

ili se riješi jednadžba:

$$y = -h = -35, \qquad -35 = v_0 t_{ud} - \frac{1}{2}gt_{ud}^2.$$

Primjer 1.1.8. Iz pištolja je u horizontalnome smjeru ispaljen metak početnom brzinom $v_0 = 100\,\mathrm{m/s}$ na visini 1,50 m od horizontalne podloge.

a) Izračunajte domet leta D metka.

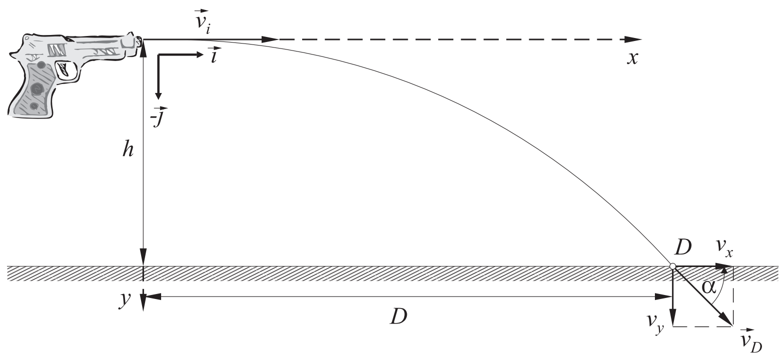
b) Koliki su iznos i smjer konačne brzine metka u točki D?

Rješenje: a) $D = 55{,}30\,\mathrm{m}$; b) $v_D = 100{,}15\,\mathrm{m/s}$, $\alpha = 3{,}13^\circ$, $\vec{v}_D = (100\vec{\imath} - 5{,}425\vec{\jmath})\,\mathrm{m/s}$

Rješenje.

$v_0 = 100\,\mathrm{m/s}$
$h = 1{,}5\,\mathrm{m}$

$D = ?$
$v_D = ?\quad \alpha = ?$



a) $x = v_0 t$ i $y = \frac{1}{2} g t^2$

Metak pada (udara) na tlo u trenutku t_D kad je domet leta $x = D$ a $y = h$:

$$\left.\begin{aligned} D &= v_0 \cdot t_D \\ h &= \frac{1}{2} g \cdot t_D \end{aligned}\right\} \quad t_D = \sqrt{\frac{2h}{g}} \implies D = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = 100 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}50}{9{,}81}} = 55{,}30\,\mathrm{m}.$$

b) Horizontalna komponenta metka ostaje stalna u vremenu, dok se vertikalna mijenja kao $v_y = g \cdot t$. Imamo u konačnome stanju, u točki D:

$$v_x = v_0, \quad v_y = g \cdot t_D = g \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}5} = 5{,}425\,\mathrm{m/s}$$

$$v_D = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = \sqrt{100^2 + 2 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}5} = 100{,}15\,\mathrm{m/s}$$

Smjer opisujemo kutom α prema horizontali:

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v_D} = \frac{100}{100{,}15} = 0{,}9985 \quad \text{i} \quad \alpha \approx 3{,}13^\circ$$

$$\vec{v}_D = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} = (100\vec{\imath} - 5{,}425\vec{\jmath})\,\mathrm{m/s}$$

Primjer 1.1.9. Tijelo mase m obješeno je o nerastezljivoj niti duljine l. Nit se otkloni za kut α_0 (najveći otklon) i pusti da slobodno njiše.

a) Izračunajte ovisnost napetosti niti T o kutu otklona α, pri čemu je $\alpha < \alpha_0$.

b) Izračunajte silu T ako je $m = 1\,\mathrm{kg}$, $l = 1\,\mathrm{m}$, $\alpha_0 = 35^\circ$ i $\alpha = 10^\circ$.

Rješenje: a) $T_\alpha = mg(3\cos\alpha - 2\cos\alpha_0)$; b) $T = 12{,}91\,\mathrm{N}$