

1.

Igre i zadaci s brojevima

Tko prvi do 100?

Ovu je igru lako razumjeti, svidjet će se mnogima. Može se igrati i više puta, sve dok protivnik ne pogodi u čemu je trik. U igri sudjeluju dva igrača, a pobjednik je onaj tko prvi dođe do broja 100.

Osoba koja započinje, primjerice Filip, odabere jedan broj manji od 10. Njegov suigrač, Marko, mora tom broju pribrojiti neki broj između 1 i 10. Zatim je red na Filipa. Dva igrača naizmjenice pribrajaju broj između 1 i 10 prethodno dobivenom zbroju.

Tko će pobijediti? Tko će prvi doći do broja 100?

Pobjednik je igrač koji uspije svog protivnika prisiliti da dobije 99. Ako Marko dođe do 89 tada je već pobijedio jer najveći broj koji poslije Marka Filip može dobiti jest 99. Da bi Marko došao do 89 prvi, mora i do broja 78 stići prvi. Nastavimo li niz unatrag, Marko mora prvi doći do brojeva 67, 56, 45, 34, 23 i 12. Ako Filip ne zna u čemu je trik i igru započne bilo kojim brojem različitim od 1, Marko mora dodati broj koji, kad se pribroji Filipovom, daje 12. Pobjednik je time određen jer Filip može pribrojiti najviše 10 i dobiti zbroj 22. Marko ga pretvori u 23, i nastavlja tako sve do 100.

* * *

Pravila ove igre mogu se mijenjati. Moguće je za cilj umjesto broja 100 zadati i neki drugi prirodni broj; mogu se promijeniti donja i gornja granica za pribrojnike. Od ciljanog broja treba oduzeti zbroj gornje i donje

granice i svaki put će pobijediti onaj igrač koji prvi dođe do tog broja. Uzastopnim oduzimanjem dobit ćemo niz brojeva koji će nam osigurati pobjedu. Primjerice, ako je ciljani broj 80, a brojevi koji se pribrajaju moraju biti između 2 i 7, onda je pobjednički niz $80 - 9 = 71$, $71 - 9 = 62$, pa 53, 44, 35, 26, 17 i 8.

* * *

Ista igra ima i još zanimljiviju verziju. Igra se s 40 šibica. Dva igrača naizmjenice iz hrpe uzimaju najmanje dvije, a najviše pet šibica odjednom. Pobjednik je igrač koji uzme zadnju šibicu.

Ovaj problem je lako riješiti: pobjednik je onaj igrač koji ostavi na stolu 7 šibica. Njegov suigrač mora ukloniti najmanje dvije a najviše pet šibica, pa će na stolu ostati u prvom slučaju pet, a u drugom dvije šibice. No, da bi na stolu mogao ostaviti 7 šibica, pobjednik u prethodnom potezu mora na stolu ostaviti 14 šibica. Slično tome, pobjednik u svakom prethodnom potezu na stolu mora ostavljati redom 21, 28 i 35 šibica. To su sve višekratnici broja $2 + 5 = 7$. Dakle, započinje li igru igrač koji zna u čemu je trik, jednostavno će uzeti 5 šibica i osigurati si pobjedu.

S druge strane, započinje li igru njegov suigrač, igraču koji zna igru može se dogoditi da ipak ne može pobijediti. Pretpostavimo da Marko zna u čemu je trik, a Filip inzistira na tome da povuče prvi potez. Filip ukloni 4 šibice, ostavljajući 36. U tom slučaju Marko ne može doći do 35. Moguće je da će Filip u idućem koraku igrati Marku na ruku, ali razmišlja li logično, Filip može spriječiti Marka da dođe do 28 bez obzira na Markov drugi potez. Tada Marko gubi.

Ako se pravila promijene tako da je gubitnik onaj kojem prije zadnjeg poteza na stolu ostanu dvije šibice, onda igrač koji započinje igru i želi pobijediti mora nakon svojeg zadnjeg poteza na stolu ostaviti dvije šibice. To će postići samo ako nakon svojeg predzadnjeg poteza na stolu ostavi $2 + 2 + 5 = 9$ šibica. Taj broj dobiva pribrajajući ostatku najmanji i najveći broj šibica koji smije ukloniti u jednome potezu. Broj 9 može ostati na stolu ako je prethodni broj bio $9 + 7 = 16$, pa prije toga 23, 30 i 37. Osoba koja započinje igru, mora uzeti 3 šibice. I naravno, samo onaj tko započinje igru može biti siguran u pobjedu.

Zamisli broj

Ovo je poznata igra s puno različitih verzija. Pogledajmo detaljnije one najzanimljivije.

Nataša reče Dunji: “Uzmi papir i olovku, zamisli broj i zapiši ga. Pomnoži ga s 10 i od umnoška oduzmi zamišljeni broj. Dodaj 36 i rezultatu precrtaj jednu znamenku (osim posljednje ako je 0). Pročitaj mi znamenke koje su ti preostale, i to bilo kojim redom, i ja ću ti reći koju si znamenku precrtala.”

Dunja zapiše broj 312. Pomnoži ga s 10: 3120 . $3120 - 312 = 2808$. $2808 + 36 = 2844$. Precrta zatim znamenku 8 i presloži preostale znamenke: 4, 2, 4.

Nataša zbroji znamenke: $4 + 2 + 4 = 10$. Taj zbroj oduzme od prvog po redu višekratnika broja 9 koji je veći od 10, tj. od 18. Dobivena razlika je znamenka koju je Dunja precrtala.

Zašto je tako?

Dunja je nakon svog računanja dobila broj djeljiv s 9. Pomnožimo li bilo koji broj s 10 i oduzmemo li od umnoška taj broj, razlika je zapravo jednaka umnošku početnog broja i broja 9. Dodamo li tome 36, odnosno $4 \cdot 9$, tada je i rezultat djeljiv s 9. A poznato je da je zbroj znamenaka višekratnika broja 9 također djeljiv s 9. Stoga znamenka koja nedostaje zbrojena s preostalima daje višekratnik broja 9.

* * *



No, Dunja nije htjela ostati dužna Nataši. Zamolila je Natašu da zamisli broj i zatim joj rekla: “Udvostruči ga, dodaj 4, podijeli s 2, dodaj 7, pomnoži s 8, oduzmi 12, razliku podijeli s 4, oduzmi 11 i reci mi rezultat. Ja ću ti reći koji broj si zamislila.

Nataša zamisli broj 11. $11 \cdot 2 = 22$, $22 + 4 = 26$, polovina od 26 je 13, $13 + 7 = 20$, $20 \cdot 8 = 160$, $160 - 12 = 148$, $148 : 4 = 37$, $37 - 11 = 26$. Nataša kaže Dunji rezultat: 26.

Dunja oduzme 4 (22), raspolovi rezultat i reče: “Broj koji si zamislila je 11.”

Nataša je željela znati u čemu je trik. Dunja joj objasni: “Konačnom rezultatu oduzmeš 4, podijeliš dobiveni broj s 2 i dobiješ početni broj.”

Djevojčice isprobaju trik još nekoliko puta, s različitim brojevima, i svaki put dobiju točan odgovor. No, Nataša nije bila zadovoljna samo činjenicom da zna kako se to radi, već je željela shvatiti svaki korak. Ona prikaže problem kao košaru koja sadrži zamišljeni broj jaja:



— pomnoži s 2:



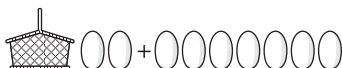
— doda 4; u ovom slučaju 4 jaja:



— prepolovi rezultat:



— doda 7:



— pomnoži s 8 i dobije 8 košara i 72 jaja:



— oduzme 12 i dobije 8 košara i 60 jaja:



— podijeli s 4:



— oduzme 11:



Rezultat je za 4 veći od dvostrukog zamišljenog broja. Dakle, igrač koji zna trik od dobivenog broja oduzme 4 i rezultat podijeli s 2 i tako dobije početni broj.

Istu stvar možemo zapisati pomoću jednostavnih matematičkih simbola. Označimo zamišljeni broj s x . Pomnožimo li ga s 2, dobivamo $2x$. Dodamo 4: $2x + 4$. To podijelimo s 2 i dobivamo $x + 2$. Dodamo li 7, dobivamo $x + 9$. Taj rezultat pomnožimo s 8 i dobivamo $8x + 72$. Oduzimamo zatim 12: $8x + 60$, pa dijelimo s 4 i dobivamo $2x + 15$. Zatim oduzimamo 11: $2x + 4$. Konačno smo stigli do dvostrukog zamišljenog broja uvećanog za 4. Zato najprije oduzmemo 4, pa rezultat raspolovimo i tako smo dobili broj zamišljen na početku igre.

* * *

Nataša i Dunja odlučile su svoje trikove pokazati Višnji, no Višnja ih preduhitri i pokaže im svoj trik. Započne na isti način: “Zamislite broj...” Nataša i Dunja izaberu broj 7. Višnja nastavi: “Pomnožite zamišljeni broj s 5 (35), rezultatu dodajte 2 (37), zbroj pomnožite s 4 (148), zatim dodajte 3 (151), pa sve pomnožite s 5 (755) te na kraju dodajte 7 (762) i recite mi rezultat. Višnja je zanemarila zadnje dvije znamenke i rekla: “Broj koji ste zamislile je 7.”

U čemu je trik?

Višnja objašnjava:

“Ne znam koji ste broj zamislile, pa ću ga označiti s x i zatim računati ovako: pomnožile ste x s 5 i dodale 2, to je $5x + 2$; rezultat pomnožen s 4 daje $20x + 8$; tome ste pribrojile 3: $20x + 11$; sve pomnožile s 5: $100x + 55$ i na kraju dodale 7. Rezultat je broj u kojemu sve, osim zadnjih dviju znamenaka predstavljaju x . Dakle, odbacim li zadnje dvije znamenke, broj koji preostane jest broj koji ste zamislile.”

* * *

Nataša i Dunja pronašle su sljedeći trik u jednoj staroj matematičkoj knjizi i odmah ga isprobale. Djevojke su rekle prijatelju Edi: “Pogodit ćemo datum tvog rođenja. Dan svog rođenja (tj. njegov broj u mjesecu) pomnoži s 20, dodaj 3 i rezultat pomnoži s 5. Tome dodaj broj mjeseca u godini u kojoj si rođen, pomnoži sve s 20, dodaj 3, rezultat pomnoži s 5 i konačno dodaj dvoznamenkasti broj koji predstavlja zadnje dvije znamenke godine tvog rođenja. Reci nam koji si broj dobio.”