

4 Računanje u skupu cijelih brojeva

Nakon ovog poglavlja moći ćeš:

- zbrajati i oduzimati cijele brojeve primjenjujući svojstva računskih operacija
- množiti i dijeliti cijele brojeve primjenjujući svojstva računskih operacija
- računati kvadrate cijelih brojeva
- procjenjivati rezultate
- računati vrijednosti jednostavnih algebarskih izraza
- zbrajati i oduzimati istoimene monome, množiti monom monomom
- brojevnim izrazom modelirati problemsku situaciju
- odabratи prikladan matematički postupak i obrazložiti taj odabir
- izvoditi postupke rješavanja slijedeći korake
- opisati potenciju baze 10 i prirodnog eksponenta
- primijeniti potenciju s bazom 10 i eksponentom nula
- prikazati dekadsku jedinicu kao potenciju baze 10 i nenegativnih cjelobrojnih eksponenata
- argumentirati uočeno pravilo o množenju s potencijama baze 10 i nenegativnih cjelobrojnih eksponenata
- preračunavati mjerne jedinice primjenjujući ih pri rješavanju problema
- povezati sadržaje učenja s Geografijom i Prirodnom te svakodnevnim životom
- procijeniti što znaš, a što tek trebaš naučiti u situaciji učenja
- sadržaje učenja povezati s primjenom u svakodnevnom životu
- obrazložiti vezu između finansijskih mogućnosti i potrošnje.

Oni koji žele znati više moći će:

- dijeliti s potencijama baze 10 i nenegativnih cjelobrojnih eksponenata

U ovom ćeš poglavlju saznati što je:

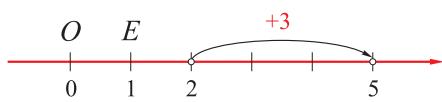
- potencija broja 10
- baza i eksponent potencije.

-20

-25

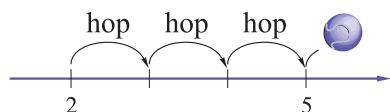
-30

4.1. Zbrajanje cijelih brojeva različitih predznaka



Kad smo na brojevnom pravcu prikazivali zbrajanje dvaju prirodnih brojeva, imali smo ovakvu sliku kao slijeva i postupali smo ovako:

- Pri zbrajanju 2 i 3 pomaknuli smo se od broja 2 udesno po brojevnom pravcu za 3 jedinične dužine.
- Taj nas je pomak doveo do broja 5 i to je zbroj brojeva 2 i 3, tj. $2 + 3 = 5$.



Dakle, zbrajanje s pozitivnim brojem prikazivali smo pomakom udesno na brojevnom pravcu. Ovaj ćemo postupak prenijeti i u zbrajanje cijelih brojeva kad je drugi pribrojnik pozitivan broj.

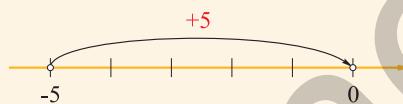
Primjer 1.

S pomoću brojevnog pravca izračunajmo:

$$-5 + 5.$$

Koliko je $-a + a$? Slovo a ovdje je oznaka za bilo koji pozitivni cijeli broj.

Rješenje: Počinjemo se pomicati od broja -5 i nakon 5 jediničnih dužina udesno dolazimo do ishodišta.



Dakle, $-5 + 5 = 0$.

Uvijek vrijedi $-a + a = 0$.

U garaži sam na razini -5 . Koliko razina ima do prizemlja?



$$-a + a = 0$$

Primjer 2.

S pomoću brojevnog pravca izračunajmo:

$$-5 + 2.$$

Rješenje: Počinjemo se pomicati od broja -5 za 2 jedinične dužine udesno. Pomicanje završava na broju -3 .



Dakle, $-5 + 2 = -3$.

Broj -5 bio je od ishodišta udaljen 5 jediničnih dužina (tj. $| -5 | = 5$). Zbrajanjem smo se približili ishodištu za 2 i rezultat je -3 koji je od ishodišta udaljen za 3 jediničnih dužina.

Uočimo da je $5 - 2 = 3$.

Da sam bio u garaži na razini -5 i popeo se 2 kata, ne bih došao do prizemlja, nego samo do razine -3 .



Pomoćni račun:

$$|5| = 5, \quad | -2 | = 2, \\ 5 - 2 = 3.$$

Primjer 3.

S pomoću brojevnog pravca izračunajmo:

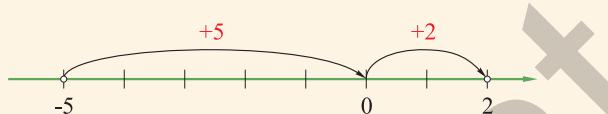
$$-5 + 7.$$

► *Rješenje:* Počinjemo se pomicati od broja -5 za 7 jediničnih dužina udesno. Nakon 5 jediničnih dužina dolazimo do ishodišta, tj. do nule i nakon još dvije jedinične dužine stajemo na broju 2 .



Dakle, $-5 + 7 = 2$.

Taj račun možemo prikazati s pomoću dva skoka: prvo od -5 do 0 , a onda od 0 do 2 .



Zamijetimo da je 2 upravo razlika absolutnih vrijednosti pribrojnika 7 i (-5) .

Pomoći račun:

$$|-5| = 5, \quad |7| = 7,$$

$$7 - 5 = 2.$$

$$-5 + 7 = 2.$$

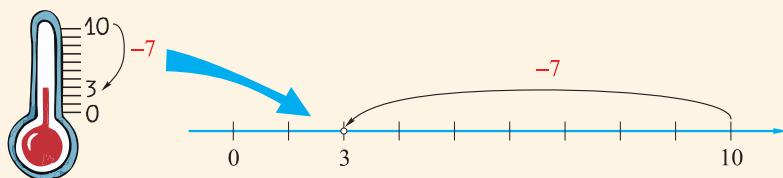
- | | |
|---|-----------|
| ③ | STANOVNI |
| ② | TRGOVINE |
| ① | TRGOVINE |
| ① | PRIZEMLJE |
| ④ | GARAŽA |

Primjer 4.

- U 13 sati temperatura zraka u Bjelovaru bila je 10°C , a do navečer se promjenila za -7°C . Kolika je temperatura zraka bila navečer?
- U 13 sati temperatura zraka u Karlovcu bila je 7°C , a do navečer se smanjila za -7°C , tj. promjenila se za -7°C . Kolika je temperatura zraka bila navečer?
- U 13 sati temperatura zraka u Gospicu bila je 5°C , a do navečer se promjenila za -7°C . Kolika je temperatura zraka bila navečer?

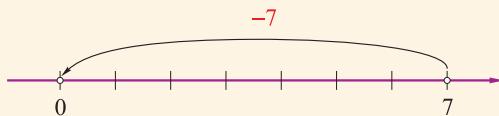
► *Rješenje:*

- U sva tri slučaja radi se o padu temperature za 7°C . Kad na termometru prikažemo 10°C te pad za 7°C , imamo ovakvu sliku:



Na brojevnom se pravcu radi o pomaku za 7 jediničnih dužina ulijevo. Dakle, $10 + (-7) = 3$. Temperatura zraka bila je 3°C .

b)



$$a + (-a) = 0$$

$$7 + (-7) = 0. \quad \text{Temperatura je bila } 0^\circ\text{C}.$$

- c) Treba izračunati $5 + (-7)$. Krećemo od točke 5 sedam jediničnih dužina ulijevo. Nakon 5 koraka dolazimo do ishodišta i nakon još dva koraka dolazimo do broja -2 .

$$5 + (-7) = -2. \quad \text{Temperatura je bila } -2^\circ\text{C}.$$

Pomoći račun:



$$|5| = 5, \quad |-7| = 7, \\ 7 - 5 = 2.$$

$$-9 + 5 = -4$$

to je $9 - 5$
predznak je - jer -9 ima veću absolutnu vrijednost

$$-5 + 7 = +2$$

to je $7 - 5$
predznak je + jer $+7$ ima veću absolutnu vrijednost

$$5 + (-7) = -2$$

to je $7 - 5$
predznak je - jer -7 ima veću absolutnu vrijednost

Kad je dobiven negativan rezultat?
Onda kad negativni pribrojnik ima veću absolutnu vrijednost od pozitivnog pribrojnika.

Kad je dobiven pozitivan zbroj?
Onda kad je pozitivni pribrojnik veći od absolutne vrijednosti negativnog pribrojnika.



Primjer 5.

Izračunajmo:

a) $453 + (-270)$

b) $-341 + 300$.

► *Rješenje:*

- a) Ova zbrajanja nije prikladno prikazati na brojevnom pravcu. Stoga ćemo primijeniti pravilnost koju smo uočili u prethodnim primjerima.

$$|453| = 453, \quad |-270| = 270 \quad \text{i} \quad 453 - 270 = 183.$$

Pozitivni broj 453 ima veću absolutnu vrijednost pa je ukupni rezultat pozitivan, tj. $453 + (-270) = 183$.

b) $|-341| = 341, |300| = 300, 341 > 300$ pa je rezultat negativan.

$$-341 + 300 = -41.$$

Zadatci 4.1.

1. S pomoću brojevnog pravca izračunaj:

- a) $6 + (-4)$ b) $-12 + 5$
 c) $11 + (-8)$ d) $24 + (-19)$.

2. Prepiši u bilježnicu i dopuni tablicu.

<i>a</i>	34	-28	-120	230	102	-59
<i>b</i>	-17	39	121	-450	-201	76
<i>a + b</i>						

3. Izračunaj:

- a) $-5 + 5$ b) $21 + (-21)$
 c) $437 + (-437)$ d) $-522 + 522$.

4. Zaokruži brojeve na najbližu stoticu, procijeni zbroj, a zatim točno izračunaj:

- a) $-301 + 410$ b) $-467 + 299$
 c) $345 + (-766)$ d) $555 + (-1\,233)$.

5. Izračunaj:

- a) $18\,456 + (-12\,544)$
 b) $66\,879 + (-54\,553)$
 c) $-34\,577 + 12\,887$
 d) $-99\,432 + 12\,333$.

6. Odredi one parove čiji će zbroj završiti nulom pa ih zbroji.

(-344) (27 661) (-7 665) (754) (7 895) (-79 441)

7. Neposrednom prethodniku broja -544 dodaj broj 234 .

8. Broju $7\,653$ dodaj neposredni sljedbenik broja $-6\,778$.

9. Tiho ima račun u banci na kojem može koristiti dozvoljeni minus od $2\,000$ kn. To znači da osim svojeg novca može podići još najviše $2\,000$ kn. Trenutačno Tiho ima $4\,560$ kn na računu.

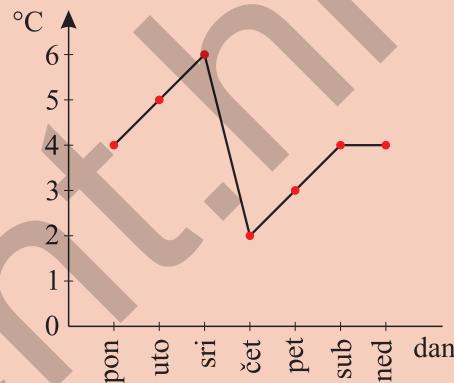
- a) Koliko će mu biti stanje računa ako je potrošio $5\,471$ kn?
 b) Dan nakon što je potrošio novac, uplaćena mu je plaća na taj račun u iznosu od $7\,450$ kn. Koliko novaca na računu ima sad?

10. Zbroju brojeva -234 i 544 dodaj broj -320 .

11. Zbroju brojeva 344 i 756 dodaj broj $-1\,206$.

12. Većem od brojeva -246 i -765 dodaj veći od brojeva 455 i -877 .

13. Na linijskom su dijagramu prikazane večernje temperature zraka u jednom tjednu. Tijekom prva tri dana tjedna noću je došlo do smanjenja temperatura za 5° , a u sljedeća četiri dana u tjednu noću se temperatura smanjila za 7° . Kolike su bile jutarnje temperature tih sedam dana?



14. Najviša temperatura na Merkuru iznosi 427°C , a kad se to mjesto okreće od Sunca, ohladi se za 600°C . Kolika je tada temperatura?

15. Svod na Modroj šipilji nalazi se na visini od 16 metara, a odatle do dna šipilje je 31 m. Na kojoj se nadmorskoj visini nalazi dno šipilje?



16. Koji je broj suprotan zbroju brojeva -587 i 201 ?

17. Osmisli zadatak u čijem se rješenju pojavljuje brojevni izraz:

- a) $-10 + 10 = 0$ b) $-12 + 7 = -5$.

4.2. Zbrajanje cijelih brojeva jednakih predznaka

Ana se nalazila na -2 . razini i dizalom se spušta još 3 razine. Do koje se razine spušta?



Radi se o računu:

$$-2 + (-3) = -5.$$

Ana se spušta do -5 . razine.

Ovdje smo zbrajali dva negativna broja. Predznak rezultata je negativan.

Uočimo da je $5 = 2+3$, tj. do 5 smo došli tako da smo zbrojili 2 i 3, a to su absolutne vrijednosti pribrojnika -2 i -3 .

Sad smo zbrajali dva negativna broja. A pozitivne smo brojeve naučili zbrajati u 5. razredu. Predznak zbroja dvaju pozitivnih brojeva je pozitivan, pa i u tom slučaju vrijedi da je predznak zbroja jednak predznaku pribrojnika. Općenito, imamo ovo pravilo:

$-2 + (-3) = -5$
jer je
 $2 + 3 = 5$
i pribrojnici su negativni

Zbroj dvaju brojeva jednakih predznaka

Zbroj brojeva jednakih predznaka ima isti predznak kao i pribrojnici. Apsolutna vrijednost zbroja jednaka je zbroju absolutnih vrijednosti pribrojnika.

Primjer 1.

Izračunajmo:

a) $-23 + (-111)$

b) $-1024 + (-512)$.

► *Rješenje:*

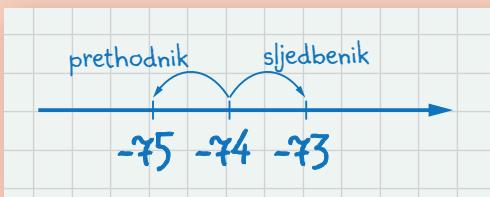
a) $|-23| = 23$ i $|-111| = 111$ te je $23 + 111 = 134$. Oba pribrojnika su negativni pa je i zbroj negativan:

$$-23 + (-111) = -134.$$

b) $-1024 + (-512) = -1536.$

Zadatci 4.2.

- Izračunaj s pomoću brojevnog pravca:
 - $(-12) + (-5)$
 - $(-19) + (-4)$
 - $(-11) + (-7)$
 - $(-7) + (-10)$.
- Izračunaj:
 - $(-25) + (-7)$
 - $(-49) + (-41)$
 - $(-123) + (-657)$
 - $(-276) + (-310)$.
- Prvo procijeni zaokružujući na najbližu tisućicu, a zatim izračunaj:
 - $-4\,677 + (-4\,889)$
 - $-56\,777 + (-12\,322)$
 - $-78\,455 + (-65\,787)$
 - $-456\,222 + (-345\,211)$.
- Zbroji neposredni prethodnik i sljedbenik broja -74 .



- Prepiši u bilježnicu i dopuni tablicu.

m	-54	-68	-125	239	105	-57
n	-18	-39	-121	650	201	-76
$m + n$						

- Odredi one parove čiji će zbroj završiti nulom pa ih zbroji.

-234	-23 567	-76 239
-446	-17 433	-13 781

- Obitelj Kratić dugovala je banci $4\,320$ kn, a kartičarskoj kući $2\,700$ kn. Koliki je njihov ukupan dug? Zapiši izraz matematičkim simbolima.
- Jutarnja temperatura na Bjelolasici bila je -5°C . Predvečer je došlo do prodora hladnog zraka i temperatura se spustila za 8°C . Kolika je bila temperatura zraka navečer?
- Najdublja jama u Hrvatskoj je Lukina jama koja se nalazi na Velebitu. Speleolozi su 1992. godine došli na dubinu od -195 m (dubina

šipile mjeri se od njezina ulaza), a do danas su se spustili još $1\,236$ m. Kolika je nadmorska visina Lukine jame?

- Poduzeće je na kraju 2017. godine iskazalo gubitak od 4 milijuna kuna. Niti u 2018. godini nisu poslovali dobro i imali su dodatna 3 milijuna kuna gubitka. Koliko su ukupno bili u gubitku na kraju 2018. godine?

- Riješi zadatke, prepiši tablicu i u nju upiši slovo uz dobiveno rješenje. Dobit ćeš jedan matematički pojam.

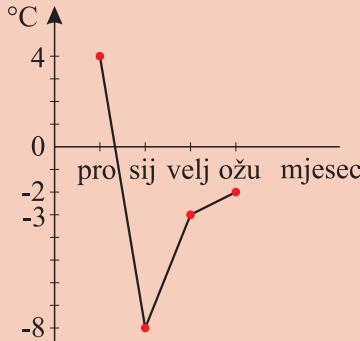
- | | |
|----------------------|---|
| a) $(-413) + (-511)$ | N |
| b) $-145 + (-513)$ | M |
| c) $-288 + (-218)$ | S |
| d) $(-514) + (-244)$ | U |
| e) $-156 + (-769)$ | I |

-658	-925	-924	-758	-506

- Zbroju brojeva -344 i $-1\,233$ dodaj broj $-5\,466$.

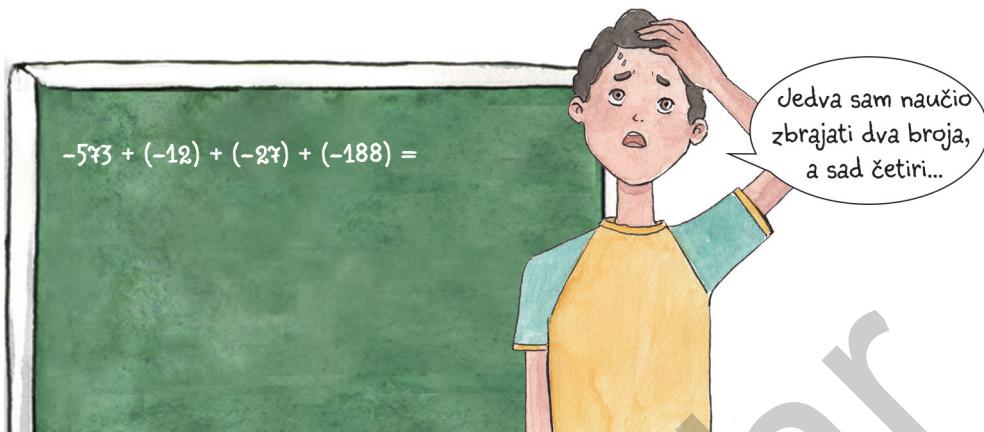
- Koji je broj suprotan zbroju brojeva $-7\,587$ i $-2\,416$?
- Broju -45 dodaj cijeli broj čija je apsolutna vrijednost 21 .

- Na linijskom dijagramu prikazane prosječne temperature zraka u četiri mjeseca. Mjerenja izvršena sljedeće godine pokazala su da je došlo do pada temperature i to za 2°C u prva dva mjeseca te za 3°C u druga dva mjeseca. Kolike su bile temperature sljedeće godine?



- Osmisi zadatak čije je rješenje:
 - $-2 + (-10) = -12$
 - $-240 + (-361) = -601$.

4.3. Svojstva zbrajanja cijelih brojeva



Možeš li pomoći Marinu da snalažljivo zbroji ova četiri broja?

Što bi radio da su ti brojevi prirodni?

Sljedeći će te primjeri dovesti do ideje.

Primjer 1.

Izračunajmo koliko je:

a) $-12 + ((-5) + (-11))$

b) $((-12) + (-5)) + (-11)$.

► *Rješenje:*

a) Prvo radimo račun u zagradi: $-12 + ((-5) + (-11)) = -12 + (-16) = -28$.

b) $((-12) + (-5)) + (-11) = -17 + (-11) = -28$.

U oba smo slučaja dobili jednake zbrojeve iako su pribrojnici bili udruženi na različite načine. To svojstvo grupiranja pribrojnika susreli smo već i kod zbrajanja prirodnih brojeva, a vrijedi i u skupu cijelih brojeva. Nazivamo ga **asocijativnost zbrajanja**.

Primjer 2.

U nedjelju ujutro vodostaj rijeke bio je 20 cm, a do navečer je pao za 45 cm. Sljedeću je nedjelju vodostaj rijeke ujutro bio -45 cm te se tijekom dana povećao za 20 cm. Lucija je, čuvši ove podatke, ustvrdila da je obje nedjelje na kraju dana vodostaj bio jednak. Je li u pravu?

► *Rješenje:* Prva nedjelja: $20 + (-45) = -25$. Vodostaj je bio -25 cm.

Dруга nedjelja: $-45 + 20 = -25$. Vodostaj je bio -25 cm.

Lucija je bila u pravu.



U oba su slučaja dobiveni isti zbrojevi. Ovo pravilo vrijedi za bilo koja dva cijela broja i naziva se **komutativnost zbrajanja**.

Komutativnost i asocijativnost zbrajanja

Za sve $a, b, c \in \mathbf{Z}$ vrijedi

$$\begin{array}{ll} a + b = b + a, & \text{tj. komutativnost zbrajanja} \\ a + (b + c) = (a + b) + c. & \text{tj. asocijativnost zbrajanja.} \end{array}$$

Primjer 3.

Riješimo Marinov zadatak s početka sata: $-573 + (-12) + (-27) + (-188)$.

► **Rješenje:** Grupirat ćemo brojeve -573 i -27 , te -12 i -188 .

$$\begin{aligned} -573 + (-12) + (-27) + (-188) &= (-573 + (-27)) + (-12 + (-188)) \\ &= -600 + (-200) = -800. \end{aligned}$$

Primjer 4.

Izračunajmo:

$$5 + (-8) + 21 + (-7) + (-4).$$

► **Rješenje:** Možemo računati slijeva nadesno, ali možemo i grupirati pozitivne pribrojниke u jednu grupu, a negativne u drugu.

$$\begin{aligned} 5 + (-8) + 21 + (-7) + (-4) &= (5 + 21) + (-8 + (-7) + (-4)) \\ &= 26 + (-19) = 7. \end{aligned}$$



Primjer 5.

Osmislimo neku situaciju koju zbroj $-5 + 0$ opisuje i izračunajmo ga,

► **Rješenje:**

Temperatura zraka u 7 sati bila je -5°C i do podneva se nije promjenila. Kolika je temperatura zraka u podne? Očito je $-5 + 0 = -5$.



$$a + 0 = a$$

za sve $a \in \mathbf{Z}$

Zadaci 4.3.

1. Prepiši u bilježnicu, a zatim dopuni tablicu.

a	b	$a + b$	$b + a$
-34	-58		
-327	766		
2 018	-886		
-12 447	-14 501		

2. Prepiši u bilježnicu, a zatim dopuni tablicu.

p	q	r	$(p + q) + r$	$p + (q + r)$
-45	-23	-67		
-123	-44	288		
355	-2 011	-785		
-8 761	2 300	-3 001		

3. Koristeći se svojstvima zbrajanja, zbroji:

- a) $-9 + (-20) + 9$
- b) $-29 + (-560) + 29$
- c) $44 + (-210) + 210$
- d) $1 262 + 2 760 + (-2 760)$.

4. Primijeni asocijativnost zbrajanja i zbroji:

- a) $(45 + (-121)) + 121$
- b) $(-678 + 321) + (-321)$
- c) $-654 + (654 + (-273))$
- d) $-7 233 + (7 233 + (-1 489))$.

5. Koristeći se svojstvima zbrajanja, zbroji:

- a) $-455 + 768 + (-365) + 112$
- b) $673 + (-2 019) + (-1 011) + 27$
- c) $-346 + (-678) + (-754) + (-22)$
- d) $2 307 + (-4 676) + (-1 224) + 593$.

6. Izračunaj:

- a) $6 + 0$
- b) $0 + (-12)$
- c) $0 + (-345)$
- d) $-567 + 0$.

7. Nastavi niz i dopiši još 7 njegovih članova, a potom zbroji sve članove niza koristeći se svojstvima zbrajanja:

- a) $-4, -5, -6 \dots$
- b) $-23, -18, -13 \dots$
- c) $-650, -600, -550 \dots$

8. Izračunaj vrijednost izraza $a+b+c+d$ tako da posebno zbrojiš pozitivne, a posebno negativne brojeve ako je:

- a) $a = -12, b = 23, c = -34, d = -11$
- b) $a = 62, b = 29, c = -44, d = -187$
- c) $a = -102, b = -83, c = 134, d = -201$
- d) $a = -1 000, b = -2 023, c = -3 734, d = 5 111$.

9. U polja kvadrata napisani su cijeli brojevi.

-14	15	21
32	-10	-17
-11	-22	33

- a) Zbroji sve brojeve u prvom stupcu, u drugom stupcu te u trećem stupcu, a zatim zbroji ta tri dobivena zbroja.
- b) Zbroji sve brojeve u prvom retku, u drugom retku te u trećem retku, a zatim zbroji ta tri dobivena zbroja.
- c) Prepiši i dopuni rečenicu jednom od ponuđenih riječi: Zbrojevi u prethodna dva zadatka ____ (su, nisu) jednakci.

10. Izračunaj vrijednost izraza $m+n+p+q$ tako da prvo zbrojiš suprotne brojeve:

- a) $m = -21, n = 33, p = 21, q = -12$
- b) $m = -776, n = -243, p = 321, q = 243$
- c) $m = -520, n = -523, p = 201, q = 520$
- d) $m = -5 788, n = -1 303, p = 1 303, q = 5 788$.

11. Izračunaj:

- a) $-4 + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4$
- b) $-8 + (-7) + (-6) + \dots + 6 + 7 + 8$
- c) $-18 + (-17) + (-16) + \dots + 16 + 17 + 18 + 19$.

12. Zbroji sve prethodnike broja 4 koji su veći od -6.

13. Zbroji sve sljedbenike broja -6 koji su manji od 10.

14. Zbroji sve cijele brojeve x za koje vrijedi $|x| \leqslant 5$.