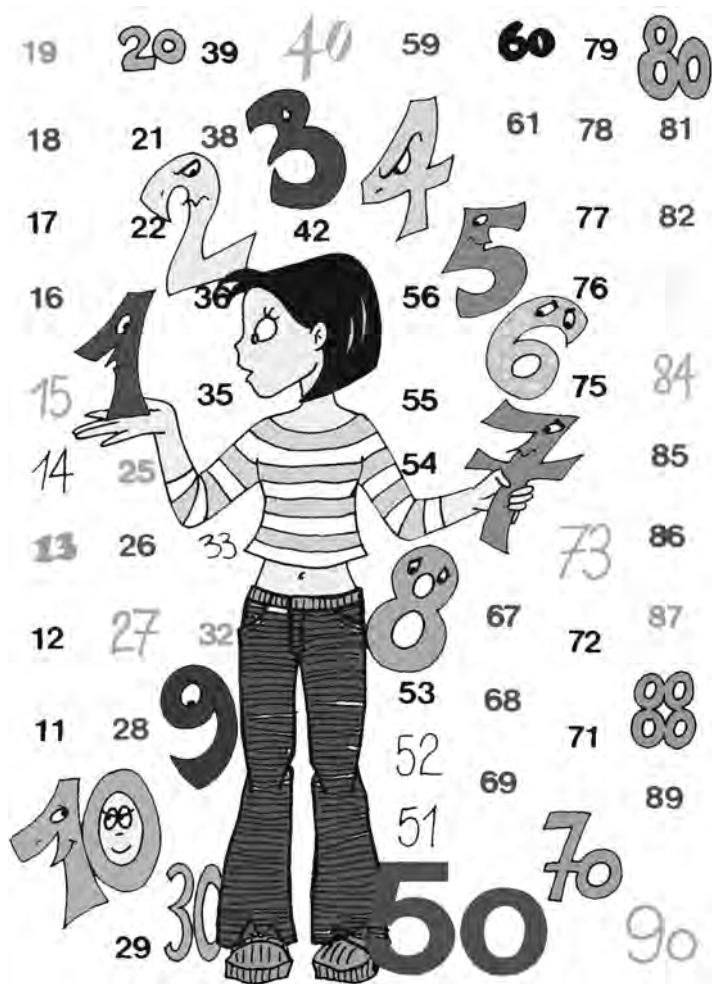


1.

Prirodni brojevi



1.1. Prirodni brojevi

$$1, \quad 1 + 1 = 2, \quad 2 + 1 = 3, \quad 3 + 1 = 4, \quad 4 + 1 = 5, \dots$$

Ima li kraja ovakvom nizanju?



Zadatak 1. Nastavi prethodno nizanje do broja 20.

1, 2, 3, 4, 5, ... prvi su brojevi do kojih je čovječanstvo došlo tijekom svog razvoja. Oni su osnova matematike. Ti brojevi čine **skup prirodnih brojeva** koji se označava slovom **N**. (Oznaka **N** dolazi od početnog slova latinske riječi *naturalis* što u prijevodu znači prirodan).

Najmanji prirodni broj je 1.

Ne postoji najveći prirodni broj. Prirodnih brojeva ima **beskonačno mnogo**.

Broj 0 nije prirodni broj.

Skup brojeva 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... zove se **skup prirodnih brojeva s nulom**, a označava se s \mathbf{N}_0 . Kad brojiš, rezultat **brojenja** je prirodan broj.



Zadatak 2. Koliko je u tvojoj razrednoj prostoriji: klupa, prozora, vrata, školskih ploča, ... ?




Zadatak 3. Koliko je u tvom razrednom odjelu učenika? Koliko djevojčica, a koliko dječaka?


Svaki prirodan broj možeš napisati pomoću deset * **znamenaka**:


0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

* Ove su znamenke nastale u Indiji prije 5. stoljeća. Arapi su ih u srednjem vijeku prenijeli u Europu zbog čega se nazivaju arapskima.

 **Zadatak 4.** Napiši nekoliko po volji odabranih prirodnih brojeva koristeći znamenke: **1)** 1 i 2; **2)** 0, 5 i 9.


Razlikuj jednoznamenkaste, dvoznamenkaste, troznamenkaste, četveroznamenkaste, peteroznamenkaste, . . . prirodne brojeve.


 **Zadatak 5.** Napiši najmanji: **1)** jednoznamenkasti, **2)** dvoznamenkasti, **3)** troznamenkasti, **4)** četveroznamenkasti, **5)** peteroznamenkasti prirodni broj.

 **Zadatak 6.** Napiši najveći: **1)** jednoznamenkasti, **2)** dvoznamenkasti, **3)** troznamenkasti, **4)** četveroznamenkasti, **5)** peteroznamenkasti prirodni broj.

1.2. Uspoređivanje prirodnih brojeva

Prirodne brojeve možeš **uspoređivati**, tj. odgovoriti na pitanje koji je od dva različita prirodna broja veći, odnosno, koji je manji.


 **Zadatak 7.** Poredaj po veličini, od manjeg ka većem, prirodne brojeve: 7, 26, 15, 2, 35, 11, 500, 199, 75 i 4.

 **Zadatak 8.** Poredaj po veličini, od većeg ka manjem, prirodne brojeve: 35, 2, 122, 43, 56, 17, 29, 9, 99 i 89.

Pri uspoređivanju prirodnih brojeva koriste se znakovi $<$, $>$ i $=$:

$<$	(čitaj “manji od”),	na primjer,	$3 < 7$;
$>$	(čitaj “veći od”),	na primjer,	$11 > 6$;
$=$	(čitaj “jednak”),	na primjer,	$9 = 9$.

Za svaka dva prirodna broja a i b ili je $a < b$, ili $a > b$, ili $a = b$.



 **Zadatak 9.** Prepiši zadatak, a zatim umjesto kvadratića upiši odgovarajući znak uspoređivanja:

- 1) $4 \square 9$, 2) $9 \square 1$, 3) $10 + 15 \square 19 + 6$,
 4) $17 - 5 \square 4 + 8$, 5) $4 \cdot 7 \square 100 : 4$, 6) $72 - 14 \square 29 \cdot 2$.

Da su dva prirodna broja a i b različita, označavat ćeš znakom \neq :

\neq (čitaj "različit od"), na primjer, $4 \neq 9$.

Primjer 1. Izrazi riječima zapis $0 < n$ gdje je n bilo koji prirodni broj.

 *Rješenje.* Nula je manja od svakog prirodnog broja. 

 **Zadatak 10.** Napiši prirodne brojeve n za koje vrijedi:

- 1) $n < 7$, 2) $n > 15$, 3) $5 < n < 16$.

 **Zadatak 11.** Prepiši tablicu, zatim je dopuni odgovarajućim brojevima.

$n - 1$							
n	2	14	39	87	100	999	1111
$n + 1$							

Neka je n prirodni broj. Prirodni broj $n + 1$ zove se **neposredni sljedbenik** broja n .


Ako je $n > 1$, onda je $n - 1$ prirodni broj koji se zove **neposredni prethodnik** broja n .


Za svaki prirodni broj $n > 1$, vrijedi:

$$\text{}n - 1 < n < n + 1.$$

 **Zadatak 12.** Napiši skup neposrednih sljedbenika prirodnih brojeva.

 **Zadatak 13.** Zadan je skup brojeva $\{3, 17, 28, 45, 76, 99\}$. Napiši skup njihovih neposrednih 1) prethodnika, 2) sljedbenika.

 **Zadatak 14.** Napiši skup brojeva čiji su neposredni prethodnici $\{7, 26, 32, 45, 72, 81\}$.

 **Zadatak 15.** Napiši skup brojeva čiji su neposredni sljedbenici $\{9, 18, 57, 69, 75, 99\}$.

 **Zadatak 16.** Kako se zove skup neposrednih sljedbenika skupa neparnih prirodnih brojeva?

1.3. Prirodni brojevi i točke pravca

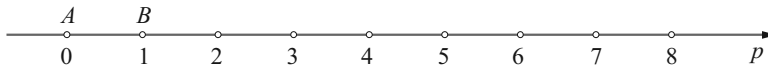
Nacrtaj pravac p i na njemu istakni dvije točke A i B :



Točki A pridruži broj 0, a točki B broj 1. Dužina \overline{AB} zove se **jedinična dužina**, a njezina duljina **jedinična duljina**.


Gdje se na pravcu nalazi točka C kojoj ćeš pridružiti broj 2? Kojim ćeš točkama pridružiti brojeve 3, 4...?

Dobro zaključuješ: točka C od A udaljena je dvije jedinične udaljenosti. Naznači i točke kojima se pridružuju brojevi 3, 4, ...:



Dakle, točke pravca kojima su pridruženi brojevi 2, 3, 4, 5, ... nalaze se desno od točke kojoj je pridružena nula, i udaljene su od nje za 2, 3, 4, 5, ... jediničnih duljina.


Pravac na kojem je određena jedinična dužina naziva se **brojevni pravac**.

 **Zadatak 17.** Nacrtaj brojevni pravac p s po volji odabranom jediničnom duljinom, zatim odredi točke pravca kojima su pridruženi prirodni brojevi n za koje vrijedi:

- 1) $n < 11$, 2) $n > 5$, 3) $2 < n < 11$.

 **Zadatak 18.** Nacrtaj brojevni pravac p s jediničnom duljinom 5 mm, zatim odredi točke pravca kojima se pridružuje prvih deset prirodnih:

- 1) neparnih brojeva, 2) parnih brojeva.

 **Zadatak 19.** Nacrtaj brojevni pravac p sa slike i na njemu istaknute točke, zatim tim točkama pridruži odgovarajući prirodni broj.

1)



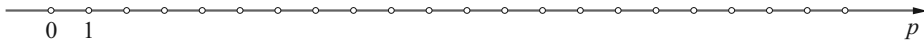
2)



3)



4)



Duljina jedinične dužine ovisna je o zadatku. Npr. ako trebaš na pravcu istaknuti prirodne brojeve 100, 200, 300, 400, . . . onda će jedinična duljina biti stoti dio udaljenosti točke kojoj je pridružen broj 100 od točke kojoj je pridružena nula. Jedinična duljina bi bila toliko mala da je nekorisno upotrebljavati. Tada je korisno uzeti jediničnu dužinu duljine 100:





1.4. Zbrajanje prirodnih brojeva

Pojam zbrajanja

1

Primjer 2. Može li netko tko ne zna zbrajati ipak riješiti zadatak u kojemu je potrebno zbrojiti 5 jabuka i 4 jabuke?

 *Rješenje.* Može. Skupe se sve jabuke zajedno, a zatim izbroje. Rezultat brojenja je 9 jabuka. Drugi način je da skupini od 5 jabuka dodaješ jednu po jednu jabuku iz druge skupine i tako nastaviš brojanje: 6, 7, 8, 9. Dakle, u oba slučaja dobit ćeš odgovor: 9 jabuka. 

Opisani postupci nisu praktični. Što ako moraš zbrojiti 595 jabuka i 476 jabuka? Zbog toga se koristi skraćeni postupak brojanja.

Skraćeni postupak (operacija) kojom saznaješ koliko je jedinica u dva broja zove se **zbrajanje**.

Zbrajanje je skraćeno brojanje.

To je osnovna računaska operacija kojom se traži broj što sadrži toliko jedinica koliko ih imaju brojevi koji se zbrajaju.

Brojevi koji se zbrajaju zovu se **pribojnci**. Broj koji se dobije kao rezultat operacije zbrajanja zove se **zbroj** ili **suma**.

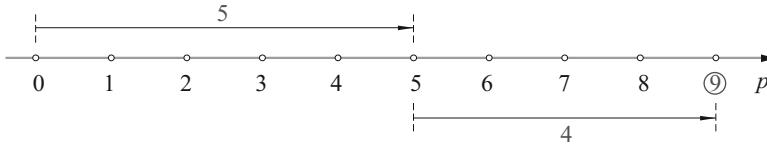
U primjeru $5 + 4 = 9$, 5 i 4 su pribojnci, a 9 je zbroj.

5 + 4 **naznačeni** je zbroj, a 9 **izračunati** zbroj.

Zbrajanje prirodnih brojeva može se izvesti i na brojevnom pravcu.

Primjer 3. Nacrtaj brojevni pravac p s jediničnom duljinom 1 cm, zatim izvedi zbrajanje $5 + 4$.

 Rješenje.



Zadatak 20. Na brojevnom pravcu p izvedi zbrajanje:

- 1) $7 + 2$, 2) $10 + 6$, 3) $9 + 8$, 4) $11 + 7$.

Svojstva zbrajanja

Jabuke iz Primjera 2 mogu se zbrojiti i tako da se skupini od 4 jabuke dodaje po jedna jabuka iz skupine od 5 jabuka, brojeći: 5, 6, 7, 8 i 9. Brojevi 5 i 4 imaju zajedno 9 jedinica, ali i brojevi 4 i 5 imaju zajedno također 9 jedinica. Dakle,

$$5 + 4 = 4 + 5.$$

Za bilo koja dva prirodna broja a i b vrijedi:

$$a + b = b + a.$$

Kaže se: Ako pribrojници zamijene svoja mjesta, zbroj se ne mijenja. To se svojstvo zove **komutativnost*** zbrajanja.

Zbroj brojeva 5, 3 i 2 možeš izračunati na još dva načina: Najprije zbrojiš 5 i 3 i onda tom zbroju pribrojiš broj 2:

$$(5 + 3) + 2 = 8 + 2 = 10.$$

Moglo se najprije zbrojiti manje brojeve 3 i 2 i taj zbroj pribrojiti broju 5. Taj postupak zapisuje se ovako:

$$5 + (3 + 2) = 5 + 5 = 10.$$

U oba se slučaja dobiva isto rješenje

* komutacija — zamjena (lat. *commutare* — promijeniti)

Općenito, za sve prirodne brojeve a , b i c , vrijedi:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

To se svojstvo zove **asocijativnost*** zbrajanja.

Zapamti: zbroj se ne mijenja, ako pribrojnike zdружиš u grupe, pa ih zbrojiš po grupama i zatim zbrojiš dobivena rješenja. Zbroj tri ili više brojeva možeš pisati i bez zagrada.

1

Pri zbrajanju više prirodnih brojeva koristi svojstva komutativnosti i asocijativnosti tako da grupiraš one brojeve kojima možeš lako odrediti zbroj!

Primjer 4. Korištenjem komutativnosti i asocijativnosti izračunaj

$$3 + 9 + 7 + 1.$$

 Rješenje.

$$3+9+7+1 = 3+7+9+1 = (3+7)+(9+1) = 10+10 = 20. \quad \text{👍}$$



Zadatak 21. Izračunaj:

- 1) $1 + 25 + 45 + 75 + 65 + 99,$
- 2) $84 + 350 + 200 + 650 + 800 + 16,$
- 3) $41 + 76 + 88 + 59 + 24 + 12,$
- 4) $17 + 37 + 45 + 83 + 63 + 55.$

Zbrajanje višeznamenkastih brojeva

Primjer 5. Izračunaj $48+36$.

 Rješenje.

1. način.

$$\begin{aligned} 48 + 36 &= 4D + 8J + 3D + 6J \\ &= 4D + 3D + 8J + 6J \\ &= 7D + 14J \\ &= 7D + 1D + 4J \\ &= 8D + 4J = 84 \end{aligned}$$

** asocijacija — udruživanje (lat. *associatio* — udruživanje)


Jednostavnije zapisano:


$$\begin{aligned}
 48 + 36 &= 40 + 8 + 30 + 6 \\
 &= 40 + 30 + 8 + 6 \\
 &= 70 + 14 \\
 &= 70 + 10 + 4 \\
 &= 80 + 4 = 84
 \end{aligned}$$

2. način. Ovaj je postupak još jednostavnije pisati *potpisujući jedan broj ispod drugog*:

D	J
4	8
+ 3	6
7	14
8	4

Skraćeno, ovako trebaš izvježbati zapisivanje računa, *pamteći prijenos jedne desetke*:

$$\begin{array}{r}
 48 \\
 + 36 \\
 \hline
 84
 \end{array}$$


 **Zadatak 22.** Prema prethodnom primjeru izračunaj na oba načina i skraćeno zbroj brojeva:

- 1) 86 i 47, 2) 56, 128 i 1457, 3) 7, 56, 275 i 5671.

 **Zadatak 23.** Izračunaj:

- 1) 92 + 56, 2) 72 + 356 + 2758, 3) 4 + 49 + 392 + 8957.

Primjer 6. Zbroji u stupcu brojeve 356, 7257, 49 i 15672.


 *Rješenje.*

	DT	T	S	D	J
prijenos	1	1	1	2	2
			3	5	6
		7	2	5	7
				4	9
+	1	5	6	7	2
	2	3	3	3	4

Skraćeno:

$$\begin{array}{r}
 356 \\
 7257 \\
 49 \\
 + 15672 \\
 \hline
 23334
 \end{array}$$



 **Zadatak 24.** Zbroji u stupcu na dva načina kao u prethodnom primjeru:


1) $127 + 2456 + 93,$

2) $5783 + 235 + 4755 + 11229.$

 **Zadatak 25.** Izračunaj:

$$\begin{array}{r}
 1) \quad 235 \\
 \quad 42 \\
 1\ 758 \\
 \quad 13 \\
 \quad 9 \\
 9\ 647 \\
 \quad 542 \\
 \quad 99 \\
 \quad 275 \\
 \quad 872 \\
 \quad 11 \\
 + \quad 569 \\
 \hline
 \end{array}$$


$$\begin{array}{r}
 2) \quad 32\ 561 \\
 \quad 752 \\
 1\ 446 \\
 \quad 920 \\
 4\ 158 \\
 57\ 695 \\
 \quad 8\ 921 \\
 11\ 111 \\
 \quad 229 \\
 \quad 9\ 004 \\
 \quad 597 \\
 + \quad 89 \\
 \hline
 \end{array}$$

 **Zadatak 26.** Prepiši zadatak, zatim izračunaj u retku i stupcu:

$$\begin{array}{r}
 256 + 782 + 356 + 4978 = \underline{\quad} \\
 759 + 35 + 146 + 148 = \underline{\quad} \\
 3567 + 854 + 942 + 1157 = \underline{\quad} \\
 842 + 156 + 2761 + 911 = \underline{\quad} \\
 \hline
 \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}
 \end{array}$$

 **Zadatak 27.** Napiši broj 36 u obliku zbroja:

- 1) dva pribrojnika,
- 2) pet pribrojnika,
- 3) osam pribrojnika.

 **Zadatak 28.** Za koliko se poveća zbroj $37 + 8$ ako se:


- 1) prvi pribrojnik uveća za 4?
- 2) drugi pribrojnik uveća za 7?
- 3) svaki pribrojnik uveća za 6?
- 4) prvi pribrojnik uveća za 7, a drugi za 2?


 **Zadatak 29.** Naznači zatim izračunaj:


- 1) Broj 897 pribroji broju 376.
- 2) Zbroj brojeva 342, 576 i 497 povećaj za 199.
- 3) Broj 965 pribroji zbroju brojeva 692 i 547.
- 4) Zbroj brojeva 156 i 272 pribroji zbroju brojeva 965 i 87.

 **Zadatak 30.** Koji je broj za:

- 1) 3 006 veći od zbroja brojeva 1 542 i 376?
- 2) 2 967 veći od zbroja brojeva 111, 2 222, 33 333 i 444 444?

 **Zadatak 31.** Izračunaj zbroj svih troznamenkastih brojeva koji se mogu napisati pomoću znamenaka 4, 7 i 9.



 **Zadatak 32.** Izračunaj zbroj svih prirodnih brojeva, koji se mogu napisati pomoću znamenki 1, 2 i 3.

 **Zadatak 33.** Koji se broj dobije kad se zbroju najvećeg dvoznamenkastog i najmanjeg troznamenkastog broja pribroji zbroj najmanjeg četve-roznamenkastog i najvećeg jednoznamenkastog broja?

1.5. Oduzimanje prirodnih brojeva

Pojam oduzimanja

Primjer 7. Brat ima 12 godina, sestra 5 godina. Koliko je godina brat stariji od sestre?

 *Rješenje.* $12 - 5 = 7$. Brat je stariji od sestre 7 godina. 

Računska operacija kojom se od jednog broja oduzima toliko jedinica koliko ih sadrži drugi broj zove se **oduzimanje**.

Operiranje $12 - 5 = 7$ možeš predstaviti slikom:



Brojanje unazad jest oduzimanje po jedne jedinice. Ako od 12 oduzima-
mo 5, tad brojanje unazad zaustavljamo nakon 5 jedinica. U naznačenom
primjeru treba brojiti: 12, 11, 10, 9, 8.

 **Zadatak 34.** Brojanjem unazad odgovori na pitanje koliko je:

- 1) $15 - 9$, 2) $18 - 11$, 3) $24 - 9$, 4) $30 - 11$.

Broj od kojeg se oduzima zove se **umanjenik**, a broj koji se oduzima
zove se **umanjitelj**. Rezultat oduzimanja zove se **razlika** ili **diferencija**.


Razlika dvaju prirodnih brojeva jest prirodni broj samo ako je
umanjenik veći od umanjitelja.

Dakle, za prirodne brojeve a i b vrijedi: $a - b$ je prirodni broj
samo ako je $a > b$.

Od većeg oduzeti manji broj, znači izračunati broj koji treba pribrojiti
manjem broju, da bi se dobio veći broj. Na taj se način može provjeriti
rješenje oduzimanja.

Dakle, napisati $a - b = c$ isto je što i napisati $b + c = a$. Tako je, na
primjer, $12 - 5 = 7$, jer je $5 + 7 = 12$. Isto tako, jer je $9 + 14 = 23$, onda
vrijedi $23 - 14 = 9$ i $23 - 9 = 14$.

Oduzimanje se zato može opisati pomoću zbrajanja: **Oduzimanjem se
iz zadanog broja i jednog pribrojnika izračunava drugi pribrojnik.**

 **Zadatak 35.** Prepiši zadatak, a zatim umjesto kvadrata stavi odgova-
rajući broj:

- 1) $\square + 9 = 35$, 2) $47 + \square = 96$, 3) $35 + 12 + \square = 74$.

U jednakosti $a - b = c$, $a - b$ se zove **naznačena razlika**, c se zove
izračunata razlika.



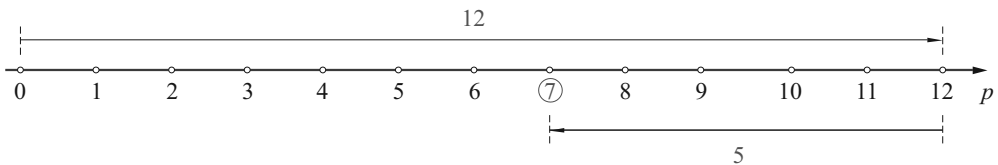
Zadatak 36. Naznači, a zatim izračunaj razliku brojeva:

- 1) 96 i 49, 2) 147 i 78, 3) 947 i 199, 4) 10 000 i 999.

Oduzimanje prirodnih brojeva može se izvesti i na brojevnom pravcu.

Primjer 8. Na brojevnom pravcu p s jediničnom duljinom 1 cm, naznači oduzimanje $12 - 5$.

Rješenje.



Zadatak 37. Na brojevnom pravcu p izvedi oduzimanje:

- 1) $7 - 5$, 2) $10 - 6$, 3) $9 - 8$, 4) $11 - 7$.

Svojstva oduzimanja

$1 - 0 = 1$, $5 - 0 = 5$, $17 - 0 = 17$,... Ako se od prirodnog broja oduzme nula, taj se prirodni broj ne mijenja. Dakle, za svaki prirodni broj a vrijedi:

$$a - 0 = a.$$

$1 - 1 = 0$, $13 - 13 = 0$, $125 - 125 = 0$,... Razlika je dvaju jednakih prirodnih brojeva jednaka nuli. Za svaki prirodni broj a vrijedi:

$$a - a = 0.$$

$$19 - 8 = 11$$

$$(19 + 5) - (8 + 5) = 11$$

$$(19 - 5) - (8 - 5) = 11$$


Ako se umanjeniku i umanjitelju doda ili oduzme isti prirodni broj, razlika se ne mijenja. To se svojstvo prirodnih brojeva može ovako zapisati:

Ako je $a > b$, onda za svaki prirodni broj c vrijedi:

$$a - b = (a + c) - (b + c).$$

Ako je $a > b$, onda za svaki prirodni broj c , $c < b$ vrijedi:

$$a - b = (a - c) - (b - c).$$

 **Zadatak 38.** Provjeri s po volji odabrana tri prirodna broja valjanost prethodna dva svojstva razlike.

Primjer 9. Izračunaj $48 - 36$.

 *Rješenje.*

1. način.

$$\begin{aligned} 48 - 36 &= 4D + 8J - 3D - 6J \\ &= 4D - 3D + 8J - 6J \\ &= 1D + 2J = 12 \end{aligned}$$

Zapisano jednostavnije:


$$\begin{aligned} 48 - 36 &= 40 + 8 - 30 - 6 \\ &= 40 - 30 + 8 - 6 \\ &= 10 + 2 = 12 \end{aligned}$$

2. način.

D	J
4	8
- 3	6
1	2

Kraći zapis:

$$\begin{array}{r} 48 \\ - 36 \\ \hline 12 \end{array} \quad \img alt="thumbs up icon" data-bbox="525 742 555 768"/>$$

 **Zadatak 39.** Kao u prethodnom primjeru, izračunaj na oba načina razliku brojeva:

1) $45 - 32$,

2) $77 - 43$,

3) $97 - 25$.