1. Koordinatni sustav u ravnini

1.1. Koordinatni sustav na pravcu

Kako se prirodnim brojevima ($\mathbf{N}$), prirodnim brojevima s nulom ($\mathbf{N}_0$), cijelim brojevima ($\mathbf{Z}$) i racionalnim brojevima ($\mathbf{Q}$) mogu pridružiti točke pravca?

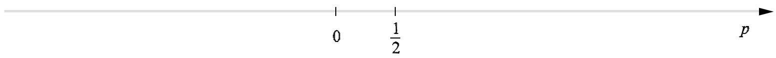
Na pravcu p istaknute su dvije točke; O i E. Točki O pridružen je broj 0, a točki E broj 1. Na taj način određena je jedinična dužina $\overline{OE}$. Pravac na kojem je određena jedinična dužina naziva se **brojevni pravac**.

Brojevima iz skupa $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}_0$, $\mathbf{Z}$ i $\mathbf{Q}$ mogu se pridruživati točke brojevnog pravca.

Zadatak 1. Nacrtaj u bilježnicu pravac p sa slike, na kojem je jednoj točki pridružena nula, a drugoj racionalni broj, a zatim odredi točku kojoj se pridružuje broj 1.

1)

2)



3)

4)

5)

Nakon uspješno riješenog 1. zadatka možeš zaključiti:

koristeći se ishodištem i točkom kojoj je pridružen racionalni broj, lako je odrediti jediničnu točku E.

Zadatak 2. Nacrtaj pravac OE ($|OE| = 1$ cm), zatim njegovim točkama pridruži:

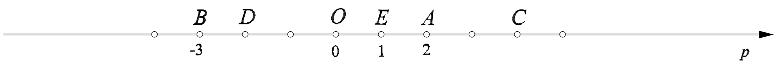
1) prirodne brojeve 3, 5 i 7; **2)** cijele brojeve -2, -1 i 4;

3) racionalne brojeve $-2\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{2}$.

Zadatak 3. Nacrtaj pravac OE ($|OE| = 2$ cm), zatim njegovim točkama pridruži po volji odabrana dva suprotna broja iz skupa:

1) $\mathbf{Z}$; **2)** $\mathbf{Q}$.

Vidi sliku:



Uoči na slici da broj 2 određuje položaj točke A.

Kaže se da je broj 2 **koordinata** točke A i piše se $A(2)$.

Broj -3 je koordinata točke B i piše se $B(-3)$.

Zadatak 4. Koju koordinatu ima točka:

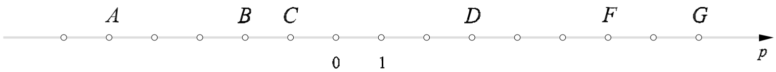
1) O, **2)** C, **3)** D, **4)** E,

s prethodne slike?

S obzirom da se sada brojevi promatraju kao **koordinate točaka na pravcu**, za pravac p uvodi se naziv **koordinatni pravac**. Kažemo da smo uveli **koordinatni sustav na pravcu**.

Točku O zovemo **ishodište** koordinatnog sustava.

Zadatak 5. Prema zadanoj slici:



naznači svaku točku koordinatnog sustava na pravcu p odgovarajućom koordinatom.

Zadatak 6. Nacrtaj koordinatni sustav na pravcu i po volji odaberi jediničnu dužinu $\overline{OE}$. Zatim naznači točke: $A(-4.5)$, $B(-3)$, $C\left(-\frac{1}{2}\right)$, $D(2.25)$, $F(4)$, $G\left(4\frac{1}{2}\right)$.

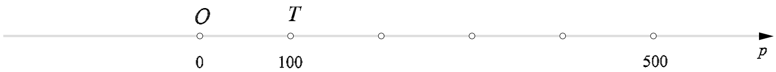
Lako zaključuješ:

> Svakom se broju iz skupa $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}_0$, $\mathbf{Z}$ i $\mathbf{Q}$ može pridružiti odgovarajuća točka koordinatnog pravca.

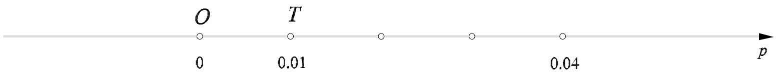
Koordinatni sustav na pravcu određuju bilo koje dvije točke sa zadanim koordinatama.

Iako se najčešće koordinatni sustav na pravcu određuje ishodištem O i jediničnom točkom E, može se u nekim slučajevima od toga i odstupiti. Npr., na koordinatnom sustavu na pravcu treba naznačiti točke kojima se pridružuju:

1) veliki brojevi



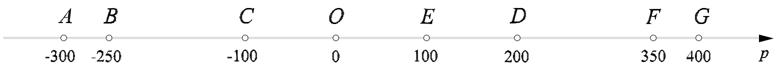
2) mali (po apsolutnoj vrijednosti) brojevi:



Primjer 1. Kako ćeš u koordinatnom sustavu na pravcu naznačiti točke:

$$A(-300),\ B(-250),\ C(-100),\ D(200),\ F(350),\ G(400)?$$

Rješenje. Koordinatni sustav ćeš odrediti točkom $O(0)$ i točkom $E(100)$.



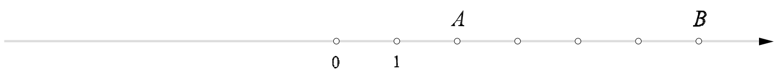
Zadatak 7. Na pravcu OE naznači jediničnu dužinu $\overline{OE}$ i točke za čije koordinate k vrijedi da su brojevi $-60 < k < 60$ djeljivi s 10.

Zadatak 8. Na pravcu OE naznači jediničnu dužinu $\overline{OE}$ i točke koje se pridružuju brojevima $-3\,000$, $-2\,500$, $-1\,000$, $1\,000$, $4\,000$.

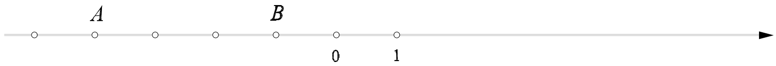
1.2. Udaljenost točaka u koordinatnom sustavu na pravcu

Primjer 2. Koliko su udaljene točke A i B u koordinatnom sustavu na pravcu:

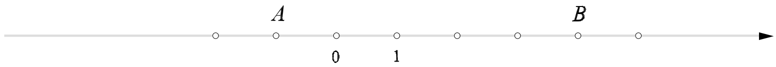
1)



2)



3)



Rješenje. **1)** $|AB| = 4$; **2)** $|AB| = 3$; **3)** $|AB| = 5$.

Nije bilo teško odrediti duljinu dužine $\overline{AB}$ **brojenjem** jediničnih dužina između točaka A i B.

Već znaš da se u geometriji duljina dužine može odrediti **mjerenjem**.

Sad ćeš naučiti kako se duljina dužine može izračunati pomoću koordinata zadanih rubnih točaka dužine.

Primjer 3. Izračunaj udaljenost točaka A i B koje su zadane svojim koordinatama:

1) $A(2)$ i $B(6)$; **2)** $A(-4)$ i $B(-1)$; **3)** $A(-1)$ i $B(4)$.

Rješenje.

1) $|AB| = |2-6| = 4$;

2) $|AB| = |-4-(-1)| = |-4+1| = 3$;

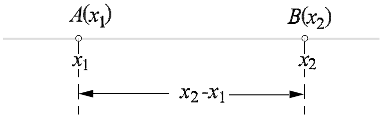
3) $|AB| = |-1-4| = 5$.

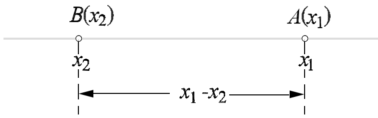
Usporedi rješenja dvaju prethodnih primjera.

Objašnjenje. Koordinata točke određuje njezin položaj u koordinatnom sustavu na pravcu.

Ako su zadane točke $A(x_1)$ i $B(x_2)$, onda se njihova udaljenost računa kao:

$$|AB| = x_2 - x_1 \text{ za } x_1 < x_2 \quad \text{ili} \quad |AB| = x_1 - x_2 \text{ za } x_1 > x_2 .$$





Da se ne utvrđuje koja je od točaka A i B smještena desno, a koja lijevo, i je li njihova udaljenost $x_2 - x_1$ ili $x_1 - x_2$, a s obzirom da su brojevi $x_2 - x_1$ i $x_1 - x_2$ suprotni brojevi, udaljenost točaka A i B izračunava se:

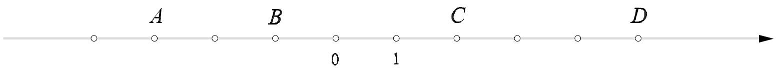
$$|AB| = |x_2 - x_1|.$$

Zadatak 9. Izračunaj udaljenost točaka A i B koje su zadane koordinatama:

1) $A(-5)$, $B(7)$; **2)** $A\left(-\frac{1}{2}\right)$, $B(4.5)$;

3) $A\left(-2\frac{1}{4}\right)$, $B(2.25)$; **4)** $A(-0.1)$, $B(-7.5)$.

Zadatak 10. Zadan je koordinatni sustav na pravcu s četiri istaknute točke; A, B, C i D.



1) Koliko dužina određuju zadane točke?
2) Odredi duljinu svake dužine iz 1).

Zadatak 11. Zadane su točke $A\left(-2\frac{1}{2}\right)$, $B(2)$, $C\left(2\frac{1}{2}\right)$. Je li veća duljina dužine $\overline{AB}$ ili $\overline{BC}$?

Zadatak 12. Izračunaj koordinatu x točke $B(x)$ ako je zadana točka $A(-3)$ i $|AB| = 9$.

Zadatak 13. Zadane su točke A i B sa svojim koordinatama $A(x_1)$ i $B(x_2)$. Njihovim koordinatama izrazi koordinatu x točke $P(x)$ koja dužinu $\overline{AB}$ dijeli na dva jednaka dijela.

1.3. Uređeni par

Parovi brojeva $(2,3)$, $(5,6)$, $\left(\frac{1}{2},2\right)$, $\left(-\frac{3}{4},0.5\right)$, $\left(-3,-2\frac{1}{4}\right)$,... nazivaju se **uređeni parovi** brojeva jer se točno zna koji je prvi, a koji drugi član para.

Uređeni parovi brojeva stavljaju se u male (okrugle) zagrade. U paru $(2,3)$ 2 je prvi član, a 3 drugi član para.

Na primjer; ako imaš dvije ulaznice za sportsku priredbu, jednu u drugom redu, treće sjedalo i drugu u trećem redu, drugo sjedalo, onda prvu ulaznicu određuje uređeni par brojeva $(2,3)$, a drugu uređeni par brojeva $(3,2)$.

Zaključi:

$$(2,3) \neq (3,2).$$

I općenito:

$$(a,b) \neq (b,a).$$

Uređeni par je određen redoslijedom svojih članova.

Zadatak 14. Napiši pet uređenih parova brojeva u kojima je na prvom mjestu u paru prirodan broj koji je mjera drugog prirodnog broja u paru.

Zadatak 15. Napiši pet uređenih parova brojeva u kojima je na prvom mjestu broj koji je višekratnik drugog broja u paru.

Zadatak 16. Napiši pet uređenih parova brojeva u kojima je na prvom mjestu paran broj koji je višekratnik drugog broja.

Zadatak 17. Napiši pet uređenih parova brojeva u kojima je na prvom mjestu neparan broj koji je višekratnik drugog broja.

Zadatak 18. Napiši sve uređene parove koji se mogu sastaviti od brojeva:

1) 1 i 2; **2)** 0, 3 i 5; **3)** 1, 10 i 100.

Za dva uređena para (a, b) i (c, d) kaže se da su **jednaka** i piše se $(a, b) = (c, d)$, onda i samo onda ako je $a = c$ i $b = d$.

Zadatak 19. Izračunaj x i y da bi uređeni parovi bili jednaki:

1) $(2x - 3, y + 5)$ i $(-9, 1)$; **2)** $\left(\frac{1}{2}x - 1, 0.5y + 1\right)$ i $(5, 2)$;

3) $\left(2\frac{1}{2} - x, \frac{3}{4} - y\right)$ i $(10, 12)$.

Zadatak 20. Jesu li jednaki uređeni parovi:

1) $\left(\frac{3}{4} + 0.5, \frac{3}{4} - 0.5 - 1\right)$ i $\left(\frac{9}{4}, -\frac{3}{4}\right)$;

2) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)$ i $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$;

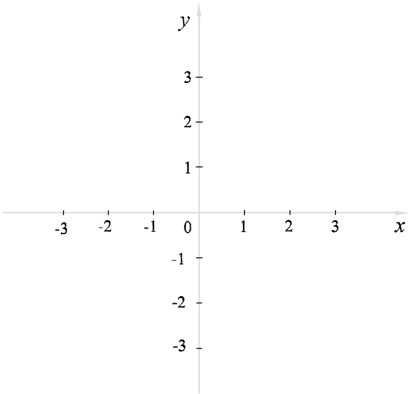
3) $\left(0.5 + \frac{1}{5} - 1\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - 0.20 + 1\frac{1}{4}\right)$ i $\left(\frac{9}{20}, \frac{31}{20}\right)$?

1.4. Pravokutni koordinatni sustav u ravnini

Nakon što već znaš kako se racionalni brojevi mogu pridružiti točkama pravca, sad ćeš naučiti kako se uređeni parovi racionalnih brojeva pridružuju točkama ravnine.

Primjer 4. Nacrtaj u ravnini dva koordinatna sustava na pravcu, tako da se pravci sijeku u točki kojoj je pridružen broj 0 i da su okomiti jedan na drugoga.

Rješenje.



To je pravokutni Descartesov (Dekartov) koordinatni sustav u ravnini, ili kraće **koordinatni sustav**.

René Descartes (1596. – 1650.), veliki francuski matematičar, uveo je pojam koordinatnog sustava koji se po njegovu latiniziranom imenu Cartesius naziva Kartezijev koordinatni sustav.

Koordinatni pravci nazivaju se **koordinatne osi***, a njihov presjek (0) koordinatni početak ili **ishodište**.

Obično se jedna koordinatna os označava s x i naziva **apscisna os** (os apscisa), a druga koordinatna os označava s y i naziva **ordinatna os** (os ordinata).

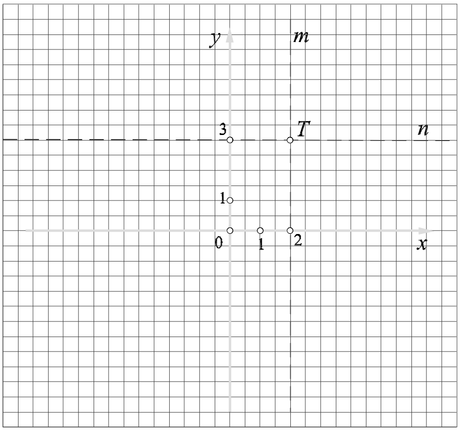
Ravnina s koordinatnim sustavom označava se xOy, a zove se **koordinatna ravnina**.

> Svakom uređenom paru (x, y) racionalnih brojeva pripada određena točka $T(x, y)$ u koordinatnoj ravnini. Brojevi x i y nazivaju se **koordinate** točke T. Broj x zovemo **apscisa** točke T, a broj y **ordinata** točke T.

* Na koordinatnim osima će se koristiti jedinične dužine jednake duljine ($|OE_x| = |OE_y|$).

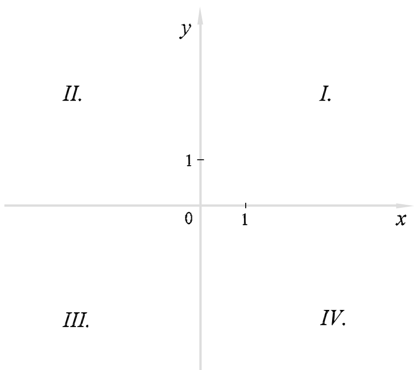
Kroz jednu točku koordinatne ravnine xOy može se povući samo jedan pravac (m) koji je usporedan s koordinatnom osi y i samo jedan pravac (n) koji je usporedan s koordinatnom osi x.

Primjer 5. Pravac m presijeca apscisnu os u točki s koordinatom 2 $(x = 2)$, a pravac n presijeca ordinatnu os u točki s koordinatom 3 $(y = 3)$. Činjenicu da su 2 i 3 koordinate točke T zapisujemo kao $T(2, 3)$.



Svaki uređeni par racionalnih brojeva (x, y) određuje **jednu** točku koordinatnog sustava.

Koordinatne osi x i y dijele koordinatnu ravninu xOy na 4 dijela koji se nazivaju **kvadranti**. Obično se označavaju kao na slici; I., II., III. i IV. kvadrant.



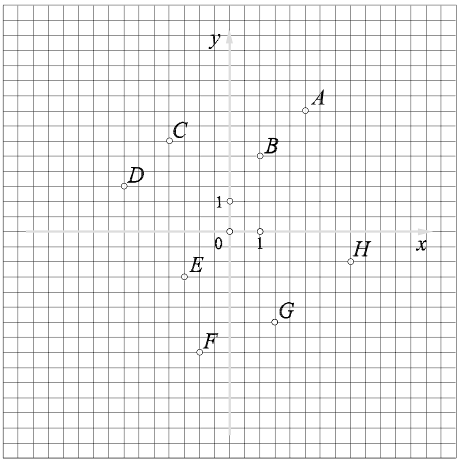
Brojevi x i y u uređenom paru (x, y) brojeva, koji određuju unutarnju točku kvadranta, imaju predznak prema tablici:

	x	**y**
I.	$+$	$+$
II.	$-$	$+$
III.	$-$	$-$
IV.	$+$	$-$

Točke na koordinatnim osima ne pripadaju ni jednom kvadrantu.

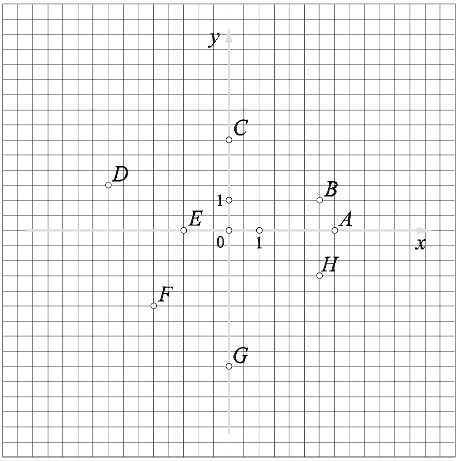
Zadatak 21. U koordinatnoj ravnini xOy naznači točke: $A(-1, 3)$, $B(-4, -2)$, $C(2, -3)$, $D(5, 0)$ i $E(0, -2)$.

Zadatak 22. Naznači koordinate svih točaka sa slike:



Uređeni par brojeva koji određuje točku na apscisnoj osi ima ordinatu nula: $(x, 0)$, a uređeni par brojeva koji određuje točku na ordinatnoj osi ima apscisu nula: $(0, y)$.

Zadatak 23. Naznači koordinate svih točaka sa slike:



1.5. Skupovi točaka u koordinatnoj ravnini

Pravci u koordinatnoj ravnini

Točka u ravnini može biti zajednička beskonačnom broju pravaca. Svi pravci koji prolaze istom točkom čine **pramen pravaca**.

Dvije točke u ravnini određuju pravac. One mogu biti zajedničke samo jednom pravcu.

Zadatak 24. Nacrtaj koordinatni sustav u ravnini, točku $T(2,3)$ i pet pravaca kojima pripada točka T. Koliko pravaca kojima pripada točka T možeš nacrtati?

Zadatak 25. Nacrtaj koordinatni sustav u ravnini, točke $A(3,1)$ i $B(6,4)$, zatim povuci pravac AB.

1) Koliko pravaca određuju točke A i B?

2) Napiši koordinate točaka u kojima pravac AB siječe koordinatne osi.

Zadatak 26. Nacrtaj koordinatni sustav u ravnini, zatim pravac koji siječe os y u točki $C(0,4)$ i os x u točki $D(7,0)$.

Zadatak 27. U koordinatnoj ravnini nacrtaj po volji pravac zadan dvjema točkama koje pripadaju:

1) prvom i drugom kvadrantu; **2)** drugom i trećem kvadrantu;

3) trećem i četvrtom kvadrantu; **4)** četvrtom i prvom kvadrantu;

5) prvom i trećem kvadrantu; **6)** drugom i četvrtom kvadrantu.

Zadatak 28. Nacrtaj u koordinatnoj ravnini pet pravaca kojima pripada ishodište koordinatnog sustava.

Likovi u koordinatnoj ravnini

Kad znaš da su u koordinatnoj ravnini točke određene odgovarajućim uređenim parovima brojeva, onda možeš lakoćom crtati u koordinatnoj ravnini trokute, četverokute,. . . , uz uvjet da znaš koordinate njihovih vrhova. U zadacima koji slijede zadane su koordinate vrhova, odnosno točke odgovarajućim uređenim parovima.

Zadatak 29. Nacrtaj po volji u koordinatnoj ravnini:

1) kvadrat; **2)** pravokutnik;

na način da njegovi vrhovi budu u različitim kvadrantima i da možeš čitati koordinate. Napiši koordinate njihovih vrhova.

Zadatak 30. Izračunaj opseg i površinu četverokuta zadanog u koordinatnoj ravnini točkama $A(-2,1)$, $B(3,1)$, $C(3,6)$ i $D(-2,6)$.

Zadatak 31. Izračunaj opseg i površinu četverokuta zadanog u koordinatnoj ravnini točkama $A(-3,-2)$, $B(5,-2)$, $C(5,1)$ i $D(-3,1)$.