

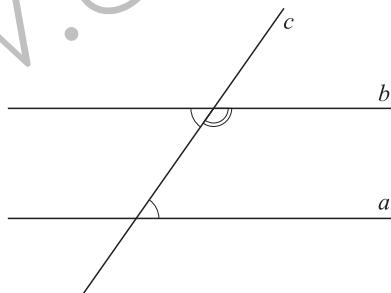
1.

Pravci, dužine, kutovi

- 1.1.** Pravac nacrtan u ravnini dijeli ravninu na dva dijela. Na koliko je dijelova moguće podijeliti ravninu ako nacrtamo 4 pravca? Nacrtaj svaki mogući slučaj.
- 1.2.** Na koliko je različitih načina moguće 3 točke A , B , C razmjestiti na jednom pravcu?
- 1.3.** U ravnini je istaknuto n točaka ($n \geq 2$) pri čemu nikoje 3 ne leže na jednom pravcu. Koliko različitih pravaca možemo nacrtati tim točkama?
- 1.4.** U ravnini je istaknuto 46 točaka, tako da nikoje 3 ne leže na istom pravcu. Svaki pravac određen tim točkama nacrtan je ili crvenom ili zelenom bojom. Koliko je pravaca nacrtano crvenom, a koliko zelenom bojom ako crvenih pravaca ima 2.75 puta više nego zelenih pravaca?
- 1.5.** U ravnini su nacrtana dva usporedna pravca a i b . Na pravcu a istaknute su 23 točke, a na pravcu b istaknuto je 17 točaka. Koliko je ukupno dužina, a koliko trokuta određeno tim točkama?
- 1.6.** U ravnini je istaknuto 8 točaka, pri čemu točno 3 točke leže na istom pravcu. Koliko je različitih pravaca određeno s tih 8 točaka?
- 1.7.** Na dužini \overline{AB} istaknute su točke C i D tako da je $C \equiv A$ i $|CD| = \frac{1}{3}|AB|$. Dokaži da je udaljenost središta dužine \overline{CD} i središta dužine \overline{AB} jednaka duljini dužine $|CD|$.

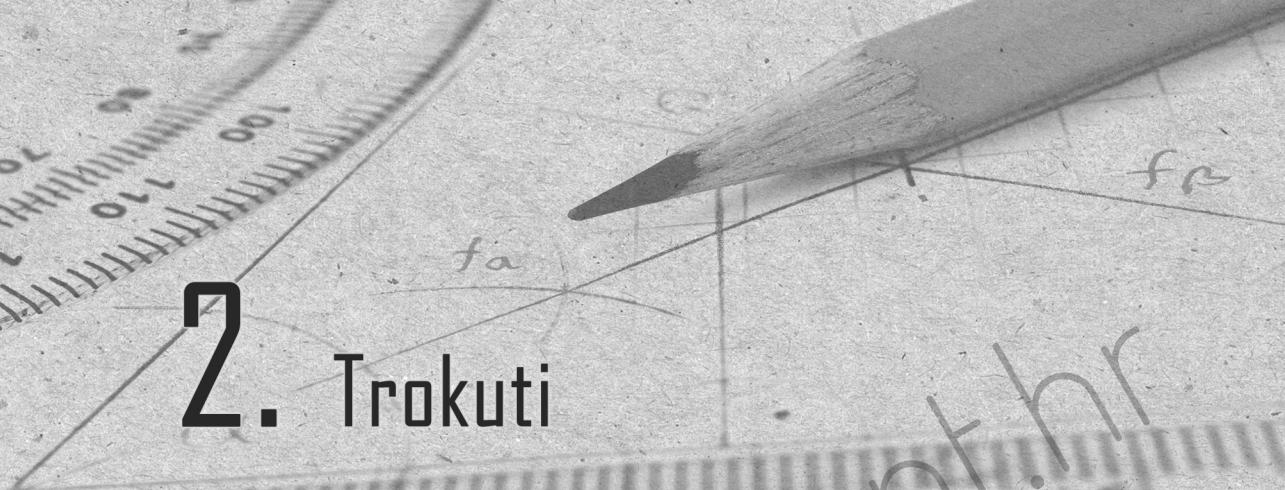
- 1.8.** Na dužini \overline{AM} počevši od točke A odabrane su u istom smjeru redom točke C, B, E, D tako da je točka B središte dužine \overline{CD} , a točka D središte dužine \overline{EM} . Odredi duljine dužina $|AD|$, $|BM|$, $|CE|$ ako je $|AB| = 11$ cm, $|CD| = 8$ cm, $|EM| = 6$ cm.
- 1.9.** Na dužini \overline{AB} , počevši od točke A , odabrane su redom točke C, D, E tako da je duljina dužine $|CD|$ dva puta veća od duljine dužine $|AC|$, duljina dužine $|DE|$ je za 2 cm manja od trostrukе duljine dužine $|AC|$, a duljina dužine $|EB|$ je za 3 cm veća od pterostrukе duljine dužine $|AC|$. Kolika je duljina $|AB|$ ako je udaljenost središta dužine \overline{CD} od središta dužine \overline{EB} jednaka 32 cm?
- 1.10.** Na pravcu su istaknute redom točke A, B, C, D, E tako da $|AB| = 27$ cm, $|CE| = 72$ cm i $|AC| = |BD|$. Kolika je duljina dužine $|DE|$?
- 1.11.** U ravnini su istaknute tri točke A, B, C pri čemu je $|AB| = 10$, $|BC| = 4$. Kolika je udaljenost točaka A i C ako točke A, B, C leže na jednom pravcu?
- 1.12.** Točke A, B, C, D leže na pravcu tako da je $|AB| = 5$ cm, $|AC| = 6$ cm, $|AD| = 8$ cm. Odredi duljine dužina $|BC|$, $|BD|$, $|CD|$.
- 1.13.** Odredi sve točke M na pravcu AB , tako da je $2|AM| = 3|MB|$, pri čemu je $|AB| = 15$ cm. Kolika je duljina dužine $|BM|$?
- 1.14.** Dan je kut $\angle AVB = 30^\circ$. Odredi veličinu kuta $\angle CVD$ ako je $\angle AVC = \angle BVD = 40^\circ$. Ispitaj sve moguće slučajeve.
- 1.15.** Nacrtaj pravac AB i na tom pravcu istakni točku C . Zatim nacrtaj kut $\angle ACM = 110^\circ$ i $\angle BCN = 45^\circ$. Koliki su kutovi $\angle BCM$, $\angle MCN$ i $\angle ACN$?
- 1.16.** U ravnini su nacrtana četiri pravca a, b, c, d , tako da se sijeku u jednoj točki. Ako kutove koje čine dva susjedna pravca označimo redom sa $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8$, onda je $\alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_7 < 180^\circ$. Dokaži.
- 1.17.** U ravnini je nacrtano 5 pravaca tako da među njima nema usporednih pravaca. Dokaži da od tih 5 pravaca uvijek postoji barem 2 pravca između kojih kut nije manji od 36° .

- 1.18.** Odredi koordinate a svih točaka M , tj. $M(a)$, koje leže na brojevnom pravcu AB tako da je $|MA| + |MB| < 6$ ako je $A(1)$ i $B(5)$.
- 1.19.** Duljina dužine $|AB| = 12\text{ cm}$, a točka P je polovište dužine \overline{AB} . Odredi sve točke M na pravcu AB tako da je zbroj duljina $|MA| + |MP| + |MB| = 14\text{ cm}$.
- 1.20.** Poznate su koordinate točaka $A(-6)$ i $B(10)$ na brojevnom pravcu. Odredi koordinate točke C na brojevnom pravcu ako je $|AC| : |CB| = 5 : 3$.
- 1.21.** Dana su tri pravca a , b , c (kao na slici). Ako su dva kuta između pravaca a i b , a s raznih strana pravca c jednaki, ili ako je zbroj dvaju kutova između pravaca a i b , a s iste strane pravca c jednak 180° , onda su pravci a i b usporedni, tj. $a \parallel b$. Dokaži.



Slika 1.21.

- 1.22.** Na stranici \overline{BC} trokuta ABC odabrana je točka N , tako da je $|BN| : |NC| = 1 : 7$. Pravac točkom N usporedan sa AB siječe stranicu \overline{AC} u točki M , a pravac točkom N usporedan sa AC siječe stranicu \overline{AB} u točki P . Kolike su duljine dužina $|MN|$ i $|NP|$ ako je $|AB| = 32$, a $|AC| = 8$?



2. Trokuti

2.1. Sukladnost trokuta

- 2.1.** U kružnici sa središtem u točki S nacrtana su dva okomita promjera \overline{AB} i \overline{CD} , tj. $AB \perp CD$. Na dijelu kružnice unutar pravog kuta $\angle ASC$ odabrana je točka M , a na dijelu kružnice unutar pravog kuta $\angle BSC$ odabrana je točka N tako da je $\angle MSN = 90^\circ$. Dokaži da je $\triangle AMC \cong \triangle BNC$.
- 2.2.** Dva su trokuta sukladna ako imaju dva para stranica jednakih duljina i jedan par težišnica jednakih duljina koje su pridružene jednoj od tih dviju stranica. Dokaži.
- 2.3.** Dva su trokuta sukladna ako imaju jedan par stranica jednakih duljina i dva para visina jednakih duljina koje su pridružene drugim dvjema stranicama. Dokaži.
- 2.4.** Dva su trokuta sukladna ako imaju dva para stranica jednakih duljina i jedan par težišnica jednakih duljina koje su pridružene trećoj stranici. Dokaži.
- 2.5.** Dan je jednakostrošničan trokut ABC . Na pravcu AB preko vrha B odabrana je točka D , na pravcu BC preko vrha C odabrana je točka E , a na pravcu CA preko vrha A odabrana je točka F , tako da je $|BD| = |CE| = |AF|$. Dokaži da je trokut DEF jednakostrošničan.

- 2.6.** Dan je pravokutni trokut ABC s pravim kutom u vrhu C . Visina iz vrha C na hipotenuzu \overline{AB} dijeli hipotenuzu na dva dijela tako da je razlika duljina tih dijelova jednaka duljini jedne katete. Koliki su unutarnji kutovi trokuta ABC ?
- 2.7.** Ako je neka točka T jednakod udaljena od dviju točaka M i N tj. ako je $|TM| = |TN|$, onda točka T leži na simetrali dužine \overline{MN} . Dokaži.

2.2. Jednakokračan trokut

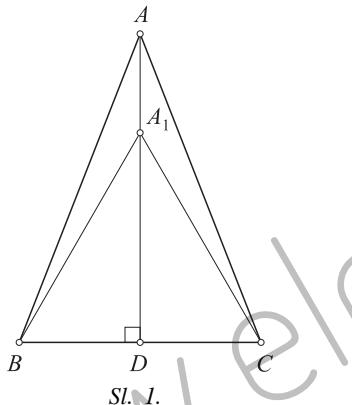
Primjer. Koliki mora biti unutarnji kut α nasuprot osnovici jednakokračnog trokuta ako je duljina kraka:

- a) veća od duljine osnovice
- b) manja od duljine osnovice?

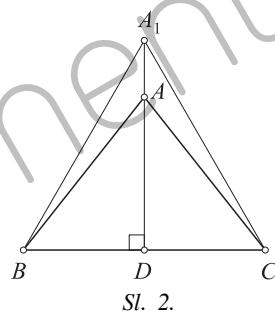
Rješenje. a) Neka je trokut A_1BC jednakostrošaničan, pri čemu je $|A_1B| = |BC| = |A_1C| = a$ i neka je pravac A_1D simetrala stranice \overline{BC} . Na simetrali A_1D preko vrha A_1 odaberemo točku A . Očito je trokut ABC jednakokračan, prema poučku o simetrali dužine, a stranica \overline{BC} osnovica. Neka je $|AB| = |AC| = b$ (sl. 1). Kako je $\angle B A_1 D = 30^\circ$, slijedi da je $\angle B A_1 A = 150^\circ$, a to znači da je u trokutu ABA_1 duljina stranice $|AB| = b$ najveća, tj. $b > a$. Neka je $\angle BAC = \alpha$ i $\angle ABA_1 = x$. Tada je $\angle BAD = \frac{\alpha}{2}$. U trokutu ABA_1 očito vrijedi jednakost $\frac{\alpha}{2} + x = 30^\circ$, što je svojstvo vanjskog kuta trokuta, a zbog $x > 0$ slijedi da je $\frac{\alpha}{2} < 30^\circ$, ili $\alpha < 60^\circ$, tj. $0 < \alpha < 60^\circ$.

b) Neka je trokut A_1BC jednakostrošaničan, pri čemu je $|A_1B| = |BC| = |A_1C| = a$ i neka je pravac A_1D simetrala stranice \overline{BC} . Na simetrali A_1D odaberemo točku A (sl. 2). Očito je trokut ABC jednakokračan, prema poučku o simetrali dužine. Neka je $|AB| = |AC| = b$ i $\angle BAC = \alpha$. Tada je $\angle BAD = \frac{\alpha}{2}$. Kako je u trokutu ADB kut $\frac{\alpha}{2} < 90^\circ$, odnosno $\alpha < 180^\circ$, slijedi da je $\angle BAA_1 > 90^\circ$, pa je u trokutu A_1BA duljina stranice $|A_1B| = a$ najveća, tj. $b < a$. Neka je $\angle A_1BA = x$. Kako je

$\angle BA_1D = 30^\circ$, u trokutu A_1BA vrijedi jednakost $x + 30 = \frac{\alpha}{2}$, prema poučku o vanjskom kutu trokuta, a zbog $x > 0$ slijedi da je $\frac{\alpha}{2} > 30^\circ$, tj. $\alpha > 60^\circ$. Zato je $60^\circ < \alpha < 180^\circ$.



Sl. 1.



Sl. 2.

* * *

- 2.8.** Ako su trokutu duljine dviju visina jednake, onda je taj trokut jednakokračan. Dokaži.
- 2.9.** Točka A je vrh šiljastog kuta $\angle MAN$. Na kraku AM odabrane su redom točke C, D, F, H, L itd., a na kraku AN odabrane su redom točke B, E, G, K itd., tako da je $|AC| = |BC| = |BD| = |DE| = |EG| = |FG| = \dots$. Koliko se najviše takvih jednakokračnih trokuta može upisati u kut $\angle MAN$?
- 2.10.** U šiljasti kut $\alpha = 10^\circ$ valja ucrtati jednakokračne trokute tako da se vrhovi trokuta nasuprot osnovici nalaze naizmjenično na jednom, odnosno drugom kraku kuta α , pri čemu krakovi svih trokuta imaju jednaku duljinu, a jedan vrh na osnovici prvog trokuta ujedno je i vrh nasuprot osnovici drugog trokuta itd.
- a) Koliko je najviše takvih trokuta moguće nacrtati?
- b) Koliko među tim trokutima ima onih kojima je duljina kraka manja od duljine osnovice?
- 2.11.** U jednakokračnom trokutu ABC je duljina osnovice $|AB| = 10$ cm. Simetrala kraka \overline{AC} presijeca krak \overline{BC} u točki D . Koliki je opseg trokuta ABD ako je opseg trokuta ABC jednak 40 cm?

- 2.12.** Dokaži ovaj kriterij jednakokračnog trokuta. Ako simetrala jednog kuta trokuta raspolavlja nasuprotnu stranicu, onda je taj trokut jednakokračan.

2.3. Kutovi trokuta

- 2.13.** Na najvećoj stranici \overline{AB} trokuta ABC odabrana je točka D tako da je $|BD| = |BC|$. Dokaži da je kut $\angle ADC$ tup.
- 2.14.** Simetrala unutarnjeg kuta $\angle BAC$ trokuta ABC presijeca simetralu vanjskog kuta kod vrha C u točki D . Dokaži da je kut $\angle CDA = \frac{1}{2} \angle ABC$.
- 2.15.** U trokutu ABC na produžetku stranice \overline{AC} preko vrha C odabrana je točka D tako da je $|CD| = |CB|$. Dokaži da je pravac BD usporedan sa simetralom unutarnjeg kuta $\angle ACB$.
- 2.16.** Dokaži ovaj kriterij jednakokračnog trokuta. Ako je simetrala jednog vanjskog kuta trokuta usporedna s nasuprotnom stranicom tog trokuta, onda je taj trokut jednakokračan.
- 2.17.** Na stranici \overline{AC} šiljastokutnog trokuta ABC odabrana je točka M , a na stranici \overline{BC} točka N tako da je $|AN| = |BM| = |AB|$. Dužine \overline{AN} i \overline{BM} sijeku se u točki P . Dokaži da je $\angle APM = 2 \cdot \angle ACB$.
- 2.18.** Trokut ABC je tupokutan s tupim kutom u vrhu A . Iz vrha A nacrtana su 2 polupravca koji sijeku stranicu \overline{BC} u točkama D i E tako da je $\angle BAD = \angle ACB$ i $\angle CAE = \angle ABC$, pri čemu je točka E bliža točki C , a točka D je bliža točki B . Dokaži da je $|AD| = |AE|$.
- 2.19.** Dan je trokut ABC kojemu je točka D presjek simetrale kuta kuta $\angle ABC$ i stranice \overline{AC} . Ako je $|BC| > |AB|$, onda je kut $\angle BDC$ tupi. Dokaži.
- 2.20.** Simetrala kuta $\angle ACB$ trokuta ABC siječe stranicu \overline{AB} u točki M . Usporedi duljine stranica $|AC|$ i $|BC|$ ako je $\angle CMB < \angle CMA$.

- 2.21.** Simetrala kuta $\angle ACB$ trokuta ABC siječe stranicu \overline{AB} u točki E . Kolika je razlika kutova $\angle CBA$ i $\angle CAB$ ako je $\angle CEB = 70^\circ$?
- 2.22.** U trokutu ABC točka D je polovište stranice \overline{AB} . Dokaži svaku od ove tri nejednakosti:
1. Ako je $|CD| > \frac{1}{2}|AB|$, onda je $\angle ACB < 90^\circ$.
 2. Ako je $|CD| = \frac{1}{2}|AB|$, onda je $\angle ACB = 90^\circ$.
 3. Ako je $|CD| < \frac{1}{2}|AB|$, onda je $\angle ACB > 90^\circ$.
- 2.23.** Simetrala kuta $\angle BAC$ trokuta ABC i simetrale dvaju vanjskih kutova kod vrhova B i C sijeku se u jednoj točki. Dokaži.
- 2.24.** Kružnica sa središtem na stranici \overline{AB} trokuta ABC prolazi vrhovima A i B i presijeca stranicu \overline{AC} u točki D , a stranicu \overline{BC} u točki E . Ako je $|CD| = |CE|$ onda je trokut ABC jednakokračan. Dokaži.
- 2.25.** Duljina jedne stranice jednakokračnog trokuta jednaka je 20 cm, a duljina druge stranice jednaka je $\frac{2}{5}$ duljine treće stranice. Koliki je opseg tog trokuta?
- 2.26.** Na produžetku stranice \overline{AB} preko točke B trokuta ABC odabrana je točka N tako da je $|BN| = |BC|$, a na produžetku stranice \overline{AB} preko točke A odabrana je točka M tako da je $|AM| = |AC|$. Koliki su kutovi i opseg trokuta ABC ako je $\angle AMC = 20^\circ$, $\angle BNC = 26^\circ$, $|MN| = 20$ cm?
- 2.27.** U trokutu ABC na stranici \overline{AB} odabrana je točka P , a na stranici \overline{AC} točka T tako da je $\angle BPC = \angle BTC$ pri čemu je $BT \perp CP$ i $\angle CBT : \angle PCB = 1 : 2$. Koliki su kutovi trokuta ABC i trokuta APC ako je $\angle BAC = 40^\circ$?
- 2.28.** Simetrala kuta $\angle ACB$ trokuta ABC presijeca stranicu \overline{AB} u točki D pri čemu je $|AC| = |CD| = |DB|$. Koliki su kutovi trokuta ABC ?
- 2.29.** U trokutu ABC simetrala $\angle ACB$ siječe stranicu \overline{AB} u točki M , simetrala $\angle BAC$ siječe stranicu \overline{BC} u točki N , a simetrala $\angle ABC$ siječe stranicu \overline{AC} u točki P , pri čemu je točka S presjek simetrala

kutova trokuta ABC . Ako je trokut ASP simetričan trokutu ASM s obzirom na pravac AN , a trokut BSN simetričan trokutu BSM s obzirom na pravac BP i trokut CSN simetričan trokutu CSP s obzirom na pravac CM , onda je trokut ABC jednakostraničan. Dokaži.

- 2.30.** Na stranici \overline{BC} pravokutnog trokuta ABC s pravim kutom u vrhu C odabrane su točke M i N tako da je $|CM| = |MN| = |BN|$. Na pravcu AM preko točke M odabrana je točka T tako da je $|TM| = |AM|$. Osim toga je $|AM| = 5\text{ cm}$ i $\measuredangle CBT = 60^\circ$. Kolika je udaljenost točke B od točaka T, M, C i koliki je $\measuredangle TAC$?
- 2.31.** Dan je trokut ABC kojemu je kut $\measuredangle ACB = 50^\circ$. Točkom K na stranici \overline{AB} nacrtan je pravac koji presijeca stranicu \overline{AC} u točki M tako da simetrala kuta $\measuredangle CAB$ prolazi polovištem dužine \overline{KM} . Na stranici \overline{BC} odabrana je točka N tako da je $|BK| = |BN|$. Koliki je kut $\measuredangle MKN$?
- 2.32.** U jednakokračnom trokutu ABC kojemu je \overline{AB} osnovica, simetrala kraka \overline{AC} siječe krak \overline{AC} u točki D , a pravac AB u točki E . Dokaži da je $\measuredangle ACB = 2 \cdot \measuredangle AED$.
- 2.33.** Dan je trokut ABC tako da je $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB = 2 \cdot \measuredangle BAC$. Simetrala kuta $\measuredangle ABC$ siječe stranicu \overline{AC} u točki D , a simetrala kuta $\measuredangle BDC$ siječe stranicu \overline{BC} u točki E . Dokaži da je $|AD| = |BC|$ i $DE \parallel AB$.
- 2.34.** Na hipotenuzi \overline{AB} pravokutnog trokuta ABC odabrane su točke M i N tako da je $|AN| = |AC|$ i $|BM| = |BC|$. Dokaži da je kut $\measuredangle MCN = 45^\circ$.
- 2.35.** U trokutu ABC je kut $\measuredangle BAC = 22.5^\circ$ i $\measuredangle ABC = 67.5^\circ$. Simetrale unutarnjeg i vanjskog kuta kod vrha C sijeku pravac AB u točkama D i E . Dokaži da je $|AB| = |DE|$.
- 2.36.** Simetrala kuta $\measuredangle ABC$ trokuta ABC siječe stranicu \overline{AC} u točki D . Izvan trokuta ABC odabrana je točka M tako da je $|BM| = |AD|$, $\measuredangle MBD = \measuredangle ADB$, a pravac MD siječe stranicu \overline{BC} u točki K . Dokaži da je $|BK| = |DK|$.
- 2.37.** Ako je u pravokutnom trokutu jedan šiljasti kut jednak 30° , onda je duljina katete nasuprot kutu od 30° jednaka polovini duljine hipotenuze. Dokaži.

- 2.38.** Ako je u pravokutnom trokutu duljina hipotenuze dva puta veća od duljine jedne katete, onda je taj trokut polovina jednakostrošničnog trokuta, tj. kut nasuprot te katete je 30° . Dokaži.
- 2.39.** U trokutu ABC je kut $\angle BAC$ tup. Okomica točkom A na stranicu \overline{AB} i okomica točkom A na stranicu \overline{AC} dijele stranicu \overline{BC} na tri jednakih dijela. Kolike su veličine kutova trokuta ABC ?
- 2.40.** Dan je pravokutan trokut ABC kome je $\angle ACB = 90^\circ$. Ako je $\angle ABC = 30^\circ$ i točka D nožište visine iz vrha C na hipotenuzu \overline{AB} , onda je $|AB| : |BD| = 4 : 3$.
- 2.41.** U trokutu ABC je razlika kutova kod vrhova B i A jednakata 90° , tj. $\angle CBA - \angle CAB = 90^\circ$. Simetrale unutarnjeg i vanjskog kuta kod vrha C sijeku pravac AB u točkama D i E . Dokaži da je $|CD| = |CE|$.
- 2.42.** Koliko ima različitih jednakokračnih trokuta koji nisu sukladni ako je duljina jedne stranice 6 cm i jedan kut 97° ?
- 2.43.** Ako je duljina katete pravokutnog trokuta manja od polovine duljine hipotenuze, onda je kut nasuprot toj kateti manji od 30° . Dokaži.
- 2.44.** U svakom trokutu nasuprot većoj stranici leži veći kut, a nasuprot manjoj stranici manji kut. Dokaži.
- 2.45.** U trokutu ABC na produžetku stranice \overline{AB} preko vrha B nacrtan je proizvoljan jednakostrošničan trokut BED , tako da su točke D i C s iste strane pravca AB . Dokaži da je trokut BMN jednakostrošničan, pri čemu su točke M i N polovišta dužina \overline{AD} , odnosno \overline{CE} .
- 2.46.** Dan je pravokutan trokut ABC s pravim kutom u vrhu C i kut $\angle ABC = 30^\circ$. Simetrala hipotenuze \overline{AB} siječe hipotenuzu u točki P , a katetu \overline{BC} u točki Q . Dokaži da je $|BC| = 3|PQ|$.
- 2.47.** Simetrale kuta $\angle BAC$ i $\angle ABC$ trokuta ABC sijeku se u točki D . Koliki je $\angle ADB$ ako je: $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ i $\angle ACB = \gamma$?
- 2.48.** U jednakokračnom trokutu ABC s osnovicom \overline{AB} , simetrala kuta $\angle BAC$ i visina iz vrha A na krak \overline{BC} zatvaraju kut od 21° . Koliki su unutarnji kutovi trokuta ABC ?
- 2.49.** Za bilo koju točku M unutar jednakostrošničnog trokuta ABC udaljenost točke M od bilo kojeg vrha trokuta uvijek je manja od duljine jedne stranice. Dokaži.

- 2.50.** Koliki su unutarnji kutovi α , β i γ trokuta ABC , ako je $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{3}$, a kut γ je aritmetička sredina kutova α i β ?
- 2.51.** U svakom jednakokračnom trokutu visina spuštena iz vrha trokuta na osnovici na pravac koji sadrži krak trokuta zatvara s osnovicom trokuta kut koji je jednak polovini kuta nasuprot osnovice. Dokaži.
- 2.52.** Dan je trokut ABC tako da je $\measuredangle BAC = 60^\circ$ i $|AC| = \frac{1}{2}|AB|$. Koliki je kut $\measuredangle ACB$?
- 2.53.** Koliki su kutovi raznostraničnog trokuta ako je srednji kut po veličini aritmetička sredina ostala dva kuta i ako je duljina najveće stranice trokuta 2 puta veća od duljine najmanje stranice?
- 2.54.** Dan je jednakokračan trokut ABC kome je \overline{AB} osnovica, a točka D presjek simetrale kuta $\measuredangle BAC$ i kraka \overline{BC} . Koliki su kutovi trokuta ABC ako su trokuti ABD i ADC jednakokračni?
- 2.55.** U trokutu ABC je $\measuredangle BAC = 54^\circ$, a $\measuredangle ABC = 45^\circ$. Na produžetu visine \overline{CN} preko točke N odabrana je točka M tako da je $|CN| = |MN|$, pri čemu je točka N nožište visine iz vrha C na stranicu \overline{AB} . Na produžetku težišnice \overline{CP} preko točke P odabrana je točka R tako da je $|CP| = |PR|$, pri čemu je točka P polovište stranice \overline{AB} . Koliki je kut $\measuredangle MBR$?
- 2.56.** Simetrala vanjskog kuta kod vrha C trokuta ABC siječe pravac AB preko vrha B u točki D , a simetrala vanjskog kuta kod vrha A siječe pravac BC preko vrha C u točki E . Koliki su kutovi trokuta ABC ako je $|AE| = |AC| = |DC|$?
- 2.57.** Uporabom plastičnog pravokutnog trokuta s kutovima od 30° i 60° nacrtaj kut od 15° .
- 2.58.** U svakom trokutu simetrala unutarnjeg kuta dijeli nasuprotnu stranicu na dvije dužine tako da je duljina svake te dužine manja od duljine stranice koja s tom dužinom ima zajednički vrh. Dokaži.

2.4. Nejednakost trokuta

- 2.59.** Ako za tri pozitivna broja vrijedi jednakost $a + b = c$, onda je $c > a$ i $c > b$. Dokaži.
- 2.60.** Dan je jednakokračan trokut ABC tako da je $|AB| = |AC|$. Na produžetku osnove \overline{BC} preko vrha C istaknuta je točka D . Dokaži da je $\measuredangle ABC > \measuredangle ADC$.
- 2.61.** Dokaži da je duljina svake stranice trokuta manja od zbroja duljina ostalih dviju stranica, a veća od razlike duljina ostalih dviju stranica trokuta.
- 2.62.** U ravnini su istaknute tri točke A , B , C , pri čemu je $|AB| = 10$, $|BC| = 4$. Kolika je udaljenost točaka A i C ako točke A , B i C ne leže na jednom pravcu?
- 2.63.** Dokaži da je duljina svake stranice bilo kojeg trokuta manja od polovine opsega tog trokuta.
- 2.64.** U kut $\alpha = 7^\circ$ valja ucrtati jednakokračne trokute.
- Koliko najviše jednakokračnih trokuta možemo ucrtati u kut α ?
 - Koliko među tim trokutima ima onih kojima je duljina kraka veća od duljine osnove?
- 2.65.** Koliko ima različitih jednakokračnih trokuta koji nisu sukladni ako je duljina jedne stranice 6 cm, a jedan kut je 87° ?
- 2.66.** Kolika je duljina stranice $|AB|$ trokuta ABC ako je $|BC| = 1$, $|AC| = 7$, pri čemu je duljina stranice $|AB|$ prirodan broj?
- 2.67.** Koliki je opseg jednakokračnog trokuta kojemu su duljine dviju stranica jednake 3.9 i 7.9?
- 2.68.** Postoji trokut kojemu su duljine stranica $a+5b$, $5a+6b$ i $3a+2b$, pri čemu su a i b duljine dviju dužina. Koja dužina ima veću duljinu: a ili b ?
- 2.69.** Dokaži da je zbroj udaljenosti svake točke unutar trokuta do vrhova trokuta veći od polovine opsega trokuta, a manji od opsega trokuta.

- 2.70.** Dan je jednakokračan trokut ABC tako da je $|AC| = |BC|$ i $|AB| < |AC|$. Na produžetku stranice \overline{AC} preko vrha C istaknuta je točka D . Dokaži da je trokut ABD raznostraničan.
- 2.71.** Kada simetrala kraka \overline{AC} jednakokračnog trokuta ABC :
a) siječe krak \overline{BC} b) siječe osnovicu \overline{AB}
c) prolazi vrhom B ?
- 2.72.** Dokaži da je u svakom trokutu jedan vanjski kut uvijek manji od zbroja ostalih dvaju vanjskih kutova.
- 2.73.** Dokaži da simetrala svake stranice trokuta ili prolazi nasuprotnim vrhom, ili presijeca dulju stranicu od preostale dvije stranice.
- 2.74.** Na stranici \overline{AB} trokuta ABC istaknuta je točka D , a na stranici \overline{BC} točka E . Dokaži da je $|AB| + |BC| > |AD| + |DE| + |EC|$.
- 2.75.** Ako je svaki unutarnji kut trokuta veći od 59° , onda je svaki unutarnji kut tog trokuta manji od 62° . Dokaži.
- 2.76.** Simetrala stranice \overline{BC} trokuta ABC siječe stranicu \overline{AB} u točki D , a pravac AC u točki E . Dokaži da je $|AD| < |AE|$.
- 2.77.** U trokutu ABC duljine dviju visina nisu manje od duljina stranica kojima su pridružene. Koliki su kutovi trokuta ABC ?
- 2.78.** Dana je dužina \overline{AB} i simetrala s te dužine. Dokaži:
a) ako je točka M s iste strane simetrale s kao i točka A , onda je $|AM| < |BM|$
b) ako su točke A i M s različitih strana simetrale s , onda je $|AM| > |BM|$.
- 2.79.** Duljina svake stranice trokuta je prirodni broj. Koliki je opseg tog trokuta ako je duljina jedne stranice 14 cm, a duljina druge stranice 1 cm?
- 2.80.** Odredi vrstu trokuta po kutovima ako je jedan unutarnji kut veći od zbroja ostalih dvaju kutova.
- 2.81.** Odredi vrstu trokuta po kutovima ako je zbroj svaka dva unutarnja kuta veći od 90° .
- 2.82.** Duljine stranica trokuta jednake su a , b , c . Dokaži da postoje pozitivni brojevi x , y , z za koje vrijede ove jednakosti: $a = x + y$, $b = y + z$, $c = x + z$.

- 2.83.** Dokaži da za svaku točku M unutar trokuta ABC vrijedi nejednakost $|AM| + |BM| < |AC| + |BC|$.
- 2.84.** Dokaži da za svaku točku M unutar trokuta ABC vrijedi nejednakost $\measuredangle AMB > \measuredangle ACB$.
- 2.85.** Koliko je različitih trokuta moguće sastaviti iz dužina čije su duljine jednake 1, 2, 3, 4, 5?
- 2.86.** Ako su a, b, c duljine stranica trokuta ABC , onda je točna nejednakost $\frac{1}{2} < \frac{a+b}{a+b+c} < 1$. Dokaži.

2.5. Pitagorin poučak

Pravokutni trokut kojemu su duljine stranica prirodni brojevi nazivamo *egipatski*, a trojke prirodnih brojeva koje su duljine stranica pravokutnog trokuta nazivamo *Pitagorine trojke*.

Pitagorine trojke možemo odrediti prema obrascu: $m^2 - n^2$, $2mn$, $m^2 + n^2$, pri čemu su m i n prirodni brojevi i $m > n$. To znači da je svaki od brojeva: $m^2 - n^2$, $2mn$, $m^2 + n^2$ prirodni broj.

Prvo treba dokazati da su brojevi $m^2 - n^2$, $2mn$, $m^2 + n^2$ duljine stranica trokuta. Primjenom poučka o nejednakosti trokuta treba dokazati da je duljina svake stranice manja od zbroja duljina ostalih dviju stranica.

Dokaz. Kako je $m^2 - n^2 + m^2 + n^2 = 2m^2$, a zbog $n < m$, vrijedi $nm < m^2$, odnosno $2mn < 2m^2$, znači da je $2mn < (m^2 - n^2) + (m^2 + n^2)$.

Zbog $m^2 + n^2 > m^2 - n^2$ vrijedi nejednakost $m^2 + n^2 + 2mn > m^2 - n^2$. To znači da je $m^2 - n^2 < m^2 + n^2 + 2mn$.

Zbog $n < m$ vrijede redom ove nejednakosti:

$$\begin{aligned} n^2 &< mn, & 2n^2 &< 2mn, & -2n^2 &> -2mn, \\ (m+n)^2 - 2n^2 &> (m+n)^2 - 2mn, \\ m^2 + n^2 + 2mn - 2n^2 &> m^2 + n^2 + 2mn - 2mn, \\ m^2 - n^2 + 2mn &> m^2 + n^2. \end{aligned}$$

To znači da je $m^2 + n^2 < m^2 - n^2 + 2mn$.

Evo nekoliko Pitagorinih trojki:

$$\begin{array}{llll} 3, 4, 5; & 8, 15, 17; & 12, 35, 37; & 20, 21, 29; \\ 5, 12, 13; & 9, 40, 41; & 13, 84, 85; & 28, 45, 53; \\ 7, 24, 25; & 11, 60, 61; & 16, 63, 65; & 33, 56, 65. \end{array}$$

Iz svake osnovne Pitagorine trojke a, b, c , možemo odrediti beskonačno mnogo Pitagorinih trojki ka, kb, kc , pri čemu je k prirodni broj.

* * *

- 2.87.** Dva su pravokutna trokuta sukladna ako su im jednake duljine hipotenuza i duljine jednog para kateta. Dokaži.
- 2.88.** Dan je kut α kojemu je točka V vrh. Na simetrali kuta α odabrana je točka P , na jednom kraku kuta α točka A , a na drugom kraku točka B tako da je $|PA| = |PB|$. Dokaži da je $|VA| = |VB|$.
- 2.89.** Dva su trokuta sukladna ako imaju jedan par stranica jednakih duljina i ako su im duljine visina i duljine težišnica pridružene toj stranici jednakе. Dokaži.
- 2.90.** Dva su trokuta sukladna ako imaju jedan par jednakih kutova i ako su im duljine visina i duljine odsječaka simetrala kutova koje izlaze iz vrhova jednakih kutova jednakе. Dokaži.
- 2.91.** Opseg pravokutnog trokuta je 126 cm, a zbroj kvadrata duljina njegovih stranica je 5618 cm^2 . Kolike su duljine stranica tog trokuta?
- 2.92.** Duljine stranica pravokutnog trokuta prirodni su brojevi. Je li moguće da duljine obiju kateta budu neparni brojevi?
- 2.93.** Duljine stranica trokuta ABC jednakе su $|AB| = 21$, $|BC| = 17$ i $|AC| = 10$. Kolike su duljine dužina $|AD|$ i $|BD|$ ako je točka D nožište visine iz vrha C na stranicu \overline{AB} ?
- 2.94.** Duljine stranica trokuta su 3 uzastopna prirodna broja. Ako je taj trokut šiljastokutan, onda visina trokuta spuštena iz vrha trokuta na srednjу po veličini stranicu dijeli tu stranicu na dijelove čija je razlika duljina jednakа 4. Dokaži.

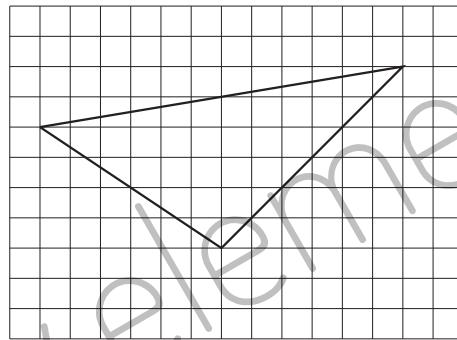
- 2.95.** Dokaži obrat Pitagorina poučka. Ako u trokutu kojemu su duljine stranica a , b , c vrijedi jednakost $c^2 = a^2 + b^2$, onda je taj trokut pravokutan, pri čemu je pravi kut nasuprot stranici c .
- 2.96.** Dan je pravokutni trokut ABC s pravim kutom u vrhu C . Neka su a i b duljine kateta, c duljina hipotenuze i v_c duljina visine iz vrha C na hipotenuzu. Dokaži da je $c + v_c > a + b$.
- 2.97.** Dan je pravokutni trokut ABC s pravim kutom u vrhu C . Neka su a i b duljine kateta, c duljina hipotenuze i v_c duljina visine iz vrha C na hipotenuzu. Dokaži da je trokut sa stranicama duljina $a + b$, $c + v_c$, v_c isto pravokutan.

2.6. Srednjica trokuta

- 2.98.** Dokaži da je srednjica trokuta usporedna s odgovarajućom stranicom tog trokuta.
- 2.99.** Dokaži da je duljina srednjice trokuta jednaka polovini duljine stranice tog trokuta s kojom je usporedna.
- 2.100.** Dan je trokut ABC tako da je $\angle BAC = 60^\circ$, a duljina težišnice $|BP|$ jednaka je duljini visine $|CD|$, tj. $|BP| = |CD|$, pri čemu je točka P polovište stranice \overline{AC} , a točka D nožište visine iz vrha C na stranicu \overline{AB} . Dokaži da je trokut ABC jednakostaničan.
- 2.101.** Dan je trokut ABC kojemu je $|AN|$ duljina visine iz vrha A na stranicu \overline{BC} jednaka duljini težišnice $|BM|$. Kolika je veličina kuta $\angle MBC$?
- 2.102.** U trokutu ABC točka P je polovište stranice \overline{BC} , a točka D polovište težišnice \overline{AP} . Pravac CD siječe stranicu \overline{AB} u točki E . U kojem omjeru točka E dijeli stranicu \overline{AB} ?
- 2.103.** Duljina osnovice jednakokračnog trokuta je $8\sqrt{2}$ cm, a duljina težišnice iz vrha osnovice do polovišta kraka je 10 cm. Koliki je opseg tog trokuta?

2.7. Površina trokuta

- 2.104.** U pravokutnik duljine 15 cm i širine 11 cm ucrtan je trokut kao na slici. Kolika je površina tog trokuta?



Slika 2.104.

- 2.105.** Ako dva trokuta imaju zajedničku stranicu, ili ako imaju jedan par stranica jednakih duljina, pri čemu taj par stranica leži na jednom pravcu, a vrhovi nasuprot toj ili tim stranicama leže na pravcu koji je usporedan s pravcem na kojem leži taj par stranica, onda ta dva trokuta imaju jednaku površinu. Dokaži.
- 2.106.** Ako je u trokutu ABC točka D polovište stranice \overline{AC} , točka E polovište stranice \overline{BC} , a M bilo koja točka na stranici \overline{AB} , onda trokuti DEC i DEM imaju jednaku površinu, tj. $P(DEC) = P(DEM)$. Dokaži.
- 2.107.** Dan je jednakokračan trokut ABC kojemu je duljina osnovice $|AB| = 2\text{ cm}$, a duljina kraka $|BC| = 3\text{ cm}$. Kolika je duljina težišnice $|AD|$ ako je točka D polovište kraka \overline{BC} ?
- 2.108.** Duljina hipotenuze pravokutnog trokuta veća je od duljine jedne katete 9 cm, a od duljine druge katete 32 cm. Kolika je površina tog pravokutnog trokuta?
- 2.109.** Dokaži da srednjice trokuta dijele trokut na 4 sukladna trokuta.
- 2.110.** U trokutu ABC poznate su duljine dviju stranica $|BC| = a$ i $|AC| = b$. Kolika je duljina treće stranice $|AB| = c$ ako je $v_c = v_a + v_b$, pri čemu su v_a , v_b , v_c duljine triju visina trokuta ABC ?