

PRVI DIO

CILJEVI I ZADACI NASTAVE MATEMATIKE

MATERIJALNI ZADACI

Ciljevi i zadaci matematičkog obrazovanja nastave matematike u osnovnoj školi proizlaze iz nastavnog programa. Ostvarivanjem pojedinih **materijalnih zadataka** u nastavi matematike realiziramo nastavni program.

Prigodom realizacije nastavnog programa matematike u osnovnoj školi treba ići postupno i u malim koracima. U izgradnji skupa prirodnih brojeva treba poći od izgradnje pojedinih prirodnih brojeva. Primjerice, najprije ćemo u učenika formirati (izgraditi) prirodni broj 1, zatim prirodni broj 2, broj 3, broj 4, 5, 0 itd. Ako je cilj “izgradnja broja 1” (obrada broja 1) ili obrada nekog drugog prirodnog broja unutar skupa brojeva do 5, onda ne možemo odabrati neki još bliži cilj, nema manjeg “koraka” u stjecanju matematičkih znanja od obrade pojedinog broja unutar skupa brojeva do 5.

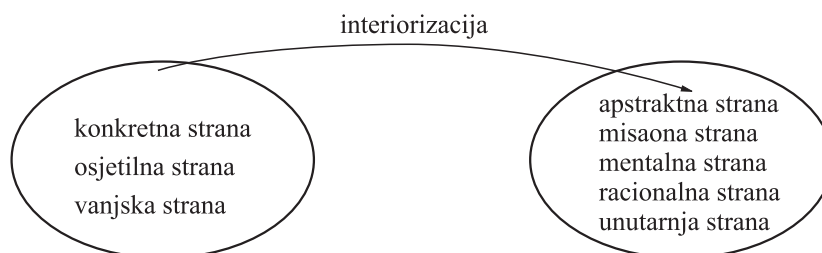
Da bi se ostvario materijalni cilj “obrada broja 1” (slično je i s obradom drugih brojeva unutar skupa prirodnih brojeva do 5), treba ostvariti ove zadatke: **pojam broja 1, znak za broj 1, pisanje i čitanje znaka za broj 1**. Nabrojani materijalni zadaci ujedno su i najmanji mogući “koraci” u ostvarivanju materijalnog cilja “obrada broja 1”.

Ostvarivanjem nastavnog programa matematike učenici stječu znanja iz osnovne matematičke pismenosti. Može se reći da učenici uče matematičku pismenost na način da svladavaju (uče) matematički jezik (jezik matematike). Učenje matematičkog jezika sastoji se u učenju **matematičkih pojmova, matematičkog nazivlja** (jezika matematičkog nazivlja) i **matematičkih znakova** (jezika matematičkih znakova).

Matematički pojmovi

Svi su matematički pojmovi apstraktni, odnosno dostupni samo razumu. Ne možemo ih vidjeti, čuti, dodirnuti ili na bilo koji način osjetiti. **Jezikom matematičkih pojmova** ne možemo komunicirati, jer je to **unutarnji jezik (jezik u sebi)**. Matematički su pojmovi u 1. razredu primjerice: pojam broja, pojam geometrijskog lika, pojam zbrajanja itd. Pojam prirodnog broja u sebi uključuje: pojam broja 1, pojam broja 2, pojam broja 3 itd. Svi su ti brojevi apstraktni pojmovi, dostupni samo racionalnoj sferi (razumu) i upravo je u tome težina učenja matematičkih pojmova. Učenici se s učenjem tih pojmova susreću na početku svojeg školovanja, a to znači u dobi 6 do 7 godina. Imajući u vidu da djeca te dobi nemaju razvijenu sposobnost apstrakcije, radi uspješnog ostvarivanja materijalnih zadataka nastave u dijelu koji se odnosi na usvajanje matematičkih pojmova, polazište mora biti u **sferi konkretnosti (materijalna strana, vanjska strana, osjetilna strana)**. Učenici u dobi od 7 do 11 godina nalaze se u konkretno–operativnom stadiju razvoja, odnosno znaju misliti samo ako je to mišljenje potkrijepljeno nečim konkretnim. Taj se period približno podudara s periodom dobi učenika prvih pet razreda osnovne škole.

U izgradnji nekog matematičkog pojma, koji je uvijek apstraktan, moramo poći, kao što je rečeno, od konkretnog (sl. 1). Taj proces transformacije od vanjske radnje (konkretnog) do unutarnje radnje (misaone radnje) u psihologiji se zove **interiorizacija (pounutrašnjivanje)**, a to je proces koji dugo traje.

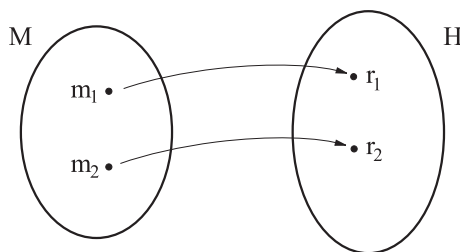


Slika 1.

U skladu s tim, želimo li u učenikovoј svijesti izgraditi pojam kardinalnog broja, polazimo od konkretnih skupova. Manipuliranjem skupovima učenici zapažaju da je broj količinsko svojstvo skupa i da ne ovisi o kakvoći elemenata skupa. Svi skupovi koji su međusobno ekvivalentni imaju istu brojnost elemenata, tj. imaju isti kardinalni broj. Slična je situacija i s ostalim matematičkim pojmovima. Njihovo formiranje počinje u konkretnoj, a završava u misaonoј sferi.

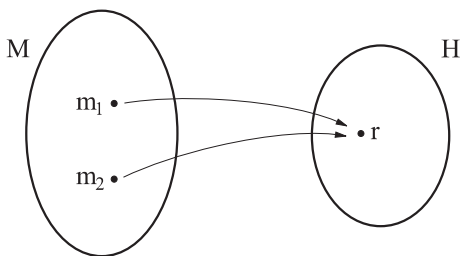
Jezik matematičkog nazivlja

Kao što je već navedeno, jezikom matematičkih pojmova ne možemo komunicirati jer je to unutarnji jezik (jezik u sebi). Za razliku od toga, **jezikom matematičkog nazivlja (matematičkih termina)** možemo komunicirati, izgovorenu riječ možemo čuti, napisanu riječ možemo vidjeti. Dakle, jezikom matematičkog nazivlja možemo komunicirati i preko osjetila sluha (audio komponenta) i preko osjetila vida (video komponenta). Postoje različiti govorni jezici, a u hrvatskim je školama u službenoj uporabi hrvatski jezik. Da bismo o matematičkim pojmovima mogli komunicirati na hrvatskom jeziku, moramo imati za te pojmove i odgovarajuće nazive na tom jeziku. Bilo bi idealno da je između skupa matematičkih pojmova M i skupa hrvatskih riječi H uspostavljeno **injektivno preslikavanje**, tj. takvo preslikavanje (pridruživanje) koje različitim matematičkim pojmovima pridružuje i različite hrvatske riječi (sl. 2).



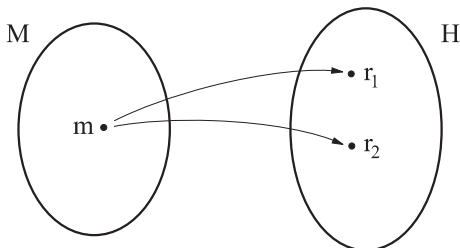
Slika 2.

Na slici 2 prikazana su dva matematička pojma m_1 i m_2 iz skupa M matematičkih pojmova. Njima su pridružene dvije riječi, r_1 i r_2 iz skupa hrvatskih riječi H . Takvo je preslikavanje injektivno preslikavanje (različiti se elementi preslikavaju u različite elemente). Ono je dobro jer omogućuje jasnu komunikaciju o matematičkim pojmovima m_1 i m_2 preko riječi r_1 i r_2 . Kada kažemo riječ r_1 , tada mislimo na pojam m_1 i onaj kojemu je upućena riječ r_1 točno zna na koji se matematički pojam ta riječ odnosi.



Slika 3.

Na slici 3. dva se elementa m_1 i m_2 iz skupa matematičkih pojmova M preslikavaju u isti element r iz skupa hrvatskih riječi H . Takvo preslikavanje nije injektivno (različiti elementi m_1 i m_2 preslikavaju se u isti element r). U ovom je slučaju komuniciranje riječju r dvosmisleno, ona se može shvatiti i kao pojam m_1 i kao pojam m_2 .



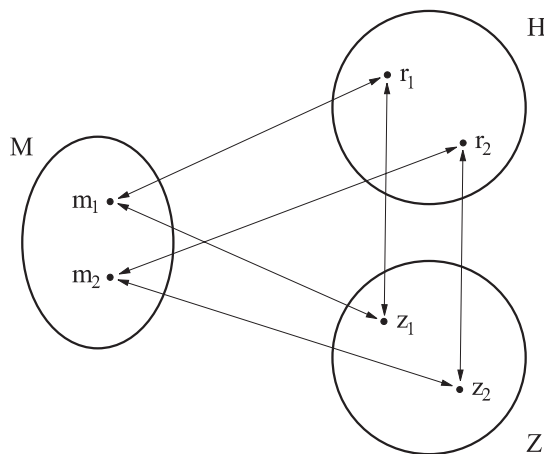
Slika 4.

Na slici 4 matematički pojam m preslikava se u dvije različite riječi, r_1 i r_2 . Za takve riječi (r_1 i r_2) koje predstavljaju nazivlje istih pojmova općenito kažemo da su sinonimi (riječi istog značenja). Takav način preslikavanja matematičkih pojmova (M) u skup hrvatskih riječi (H) nije najbolje rješenje jer s riječima ne postupamo ekonomično. Najbolje je ono preslikavanje skupa M u skup H koje nazivamo injektivno preslikavanje.

Jezik matematičkih znakova

Da bismo u nastavi matematike mogli dobro komunicirati **jezikom matematičkih znakova** u vezi s matematičkim pojmovima, za svaki matematički pojam moramo imati određeni matematički znak. To preslikavanje matematičkih pojmova iz skupa M u skup matematičkih znakova Z mora biti injekcija, tj. različiti matematički pojmovi moraju se preslikavati u različite matematičke znakove.

Uspostavom injektivnih preslikavanja iz skupa M u H i iz skupa M u Z (sl. 5) ujedno je uspostavljeno i injektivno preslikavanje iz skupa Z u skup H i obratno, iz skupa H u skup Z . Injektivno preslikavanje iz Z u H pridružuje različitim znakovima iz skupa Z različito nazivlje iz skupa H , a injektivno preslikavanje iz skupa H u skup Z pridružuje različitim riječima (terminima, nazivima) različite znakove (oznake).



Slika 5.

U nastavi matematike susrećemo znakove za brojeve (znamenke, brojke), znakove za računске operacije, znakove za relacije itd. Prednost jezika matematičkih znakova pred jezikom matematičkog nazivlja jest njegova internacionalnost; njega podjednako razumiju Hrvat, Englez, Nijemac, Slovenac, Francuz itd. No jezik matematičkih znakova ima i jednu drugu veliku prednost, a to je da se mnogi problemi, kada se prevedu na jezik matematičkih znakova, mogu riješiti mnogo jednostavnije nego kada su zadani jezikom matematičkog nazivlja (retorički).

Zapis “ $3 + 2 = 5$ ” napisan je jezikom matematičkih znakova i sastoji se od pet matematičkih znakova. Napisan na hrvatskom jeziku glasi: “Tri više dva jednako je pet”. Pojedini matematičkim znakovima: 3, +, 2, = i 5, odgovaraju hrvatski nazivi: *tri*, *više*, *dva*, *jednako je* i *pet*.

Redoslijed učenja pojedinih matematičkih jezika u početnoj nastavi matematike mora biti takav da se prvo uči matematički pojam, a tek onda se za taj pojam uvodi nazivlje i znak. Ne smije se prijeći na učenje matematičkog nazivlja, a da se nije usvojio odgovarajući pojam. Znanje matematičkog termina bez odgovarajućeg matematičkog pojma možemo usporediti s orahovom ljuskom bez jezgre (praznom ljuskom).

FUNKCIONALNI (FORMALNI) ZADACI NASTAVE MATEMATIKE

Ostvarivanjem materijalnih zadataka u nastavi matematike kod učenika se mogu razvijati i neke sposobnosti kao što su mišljenje, pažnja i pamćenje. Sposobnost mišljenja (zaključivanja) vrlo je važna funkcija. Samo poznavanje nastavne građe (materije, činjenica) predviđene nastavnim programom ne znači i sposobnost snalaženja u različitim životnim situacijama. Uzmimo kao primjer dvije osobe koje poznaju iste dvije činjenice, tj. usvojile su isto nastavno gradivo. Ako prva osoba iz tih dviju činjenica ne zna zaključiti ništa više, a druga ima i sposobnost da iz tih dviju činjenica mišljenjem zaključi da vrijedi i treća činjenica, iz novih triju činjenica da vrijedi i četvrta, itd. očito je da druga osoba posjeduje mnogo veće znanje od prve osobe.

Ovaj drugi zadatak nastave (razvijanje sposobnosti) naziva se **funkcionalnim** ili **formalnim** zadatakom nastave. Drugom zadatku u nastavi matematike treba posvetiti mnogo pažnje. Od učenika osnovne škole treba uvijek zahtijevati da na određen način obrazlože svoje tvrdnje govornim jezikom ili jezikom matematičkih znakova. Iza svih takvih učenikovih obrazloženja (zaključivanja) uvijek stoje njegove misli. Stalnom prisutnošću mišljenja u nastavi matematike osnovne škole mozak se „brusi”, a to znači da se u učenika neprekidno razvija funkcija mišljenja. Primjerice, ako učenik u prvom razredu zna da je $9 + 1 = 10$ i pravilo da se zbroj ne mijenja ako pribrojnici zamijene mjesta, mišljenjem može zaključiti da je onda i $1 + 9 = 10$.

ODGOJNI ZADACI NASTAVE MATEMATIKE

U nekim didaktikama se materijalni i funkcionalni zadaci jednim imenom zovu obrazovni zadaci. Nastava matematike je nastavni predmet preko kojega se učenici matematički odgajaju i obrazuju. No do sada smo govorili o matematičkom obrazovanju, odnosno o obrazovnim (materijalnim i funkcionalnim) ciljevima i zadacima. Matematika je nastavni predmet u čijem se programu nalaze isključivo obrazovni zadaci, ali se kroz usvajanje tih sadržaja učenici i odgajaju. Svladavanjem matematičkog gradiva toga predmeta (matematičkim obrazovanjem) učenici se i odgajaju. Matematičkim obrazovanjem učenika se i te kako razvijaju neke pozitivne osobine ličnosti kao što su upornost, preciznost, istinoljubivost, ekonomičnost, točnost, urednost, pravednost i slično.

Dakle, iako je matematika ponajprije obrazovni predmet, učitelj će na satu matematike i te kako nastojati odgojno djelovati da učenici budu uredni, da se lijepo ponašaju, da budu precizni u crtanju, da budu ekonomični s vremenom i prostorom itd.

METODE ZAKLJUČIVANJA (OTKRIVANJA) U NASTAVI MATEMATIKE

Svaki postupak u nastavi matematike kojim se dolazi do matematičke istine (matematičkog otkrića) zove se **metoda matematičkog zaključivanja**. Osnovne metode matematičkog zaključivanja u nastavi matematike osnovne škole su: **indukcija, dedukcija, analiza, sinteza, analogija i intuicija**. Uloga ovih metoda u nastavi matematike slična je onima koje su one imale u otkrivanju pojedinih matematičkih pojmova i teorema u matematičkoj znanosti, samo što je proces otkrivanja u nastavi matematike neusporedivo kraći nego što je u matematičkoj znanosti.

Indukcija

Induktivna metoda značajna je za otkriće mnogih matematičkih pojmova i teorema. Značajna je njezina uloga i u početnoj nastavi matematike. To je najznačajnija metoda za otkrivanje pojedinih matematičkih pojmova i pravila u nastavi matematike u osnovnoj školi. Premda je ta metoda nesigurna u smislu dokaza i u znanosti i u nastavi, u nastavi matematike otkrića preko primjera vrlo su česta. Preko primjera se otkrivaju i mnogi matematički pojmovi. Induktivna je metoda nezamjenjiva u početnoj nastavi matematike.

Velik broj matematičkih pravila u početnoj nastavi matematike učenici otkrivaju induktivnom metodom. Matematički se pojmovi u samom početku (prvi razred) ne uvode definicijom, nego se otkrivaju preko primjera. Tako, primjerice, pojmove kao što su: kugla, kocka, valjak, kvadar i piramida ne definiramo, nego primjere modela tih geometrijskih oblika pronalazimo u običnom životu (realnom svijetu) i na njih skrećemo učenikovu pozornost. Isto se događa i s geometrijskim likovima: kvadratom, pravokutnikom, krugom i trokutom. I njihovu izgradnju kod učenika počinjemo iz realnog svijeta. Učenici promatraju modele geometrijskih tijela i usredotočuju se na promatranje ploha koje omeđuju pojedine modele geometrijskih tijela. Induktivna je metoda učenicima bliska, jer kod nje bitnu ulogu ima zor, tj. učenici se u velikoj mjeri oslanjaju na osjetila.

Velik broj matematičkih pravila u početnoj nastavi matematike učenici otkrivaju induktivnom metodom. Primjerice, u prvom razredu učenici upoznaju pravilo da se zbroj ne mijenja ako pribrojnici zamijene mjesta (zakon komutacije za zbrajanje). Da bi učenici otkrili navedeno pravilo od njih se, primjerice, može zahtijevati da izračunaju zbroj $3 + 2$. Nakon što su izračunali da je $3 + 2 = 5$, zahtijevati ćemo da izračunaju zbroj $2 + 3$. Učenici trebaju samostalno izračunati da je $2 + 3 = 5$. S učenicima ćemo zajednički analizirati dobivene jednakosti $3 + 2 = 5$ i $2 + 3 = 5$. Analizirajući te dvije jednakosti učenici bi trebali zapaziti da se one u nečemu razlikuju, a u nečemu ne razlikuju (ostaju iste). Trebali bi zapaziti da je druga jednakost nastala tako da su pribrojnici iz prve jednakosti zamijenili mjesta. Isto tako bi trebali zamijetiti (otkriti) da se zbroj u drugoj jednakosti nije promijenio, tj. da je zbroj ostao isti. Nakon što su učenici naslutili da bi moglo vrijediti pravilo da se zbroj ne mijenja ako pribrojnici zamijene mjesta, od njih ćemo zahtijevati da riješe još nekoliko sličnih zadataka s ciljem da potvrde svoju slutnju ili ju obore (opovrgnu). To mogu učiniti riješavanjem još nekoliko sličnih zadataka kao što su: $2 + 1 = __$, $1 + 2 = __$; $3 + 1 = __$, $1 + 3 = __$.

Dedukcija

U matematičkoj se znanosti **deduktivna metoda** javila nakon induktivne metode. Nakon što je induktivnom metodom prikupljeno dovoljno mnogo podataka, pojavila se deduktivna metoda. Istog se redoslijeda treba držati i u nastavi matematike. Kod učenika najprije treba induktivnom metodom izgraditi dovoljno mnogo matematičkih pojmova i pravila, a tek onda dalje izgrađivati (otkrivati) pojedine matematičke pojmove deduktivno. Deduktivna je metoda učenicima teža jer je općenitija, a time i apstraktnija. Ona se manje oslanja na osjetila, a više na razum, što učenicima životne dobi od 6 do 10 godina uzrokuje velike poteškoće. Zato deduktivnu metodu u toj dobi treba uvoditi vrlo oprezno.

Primjerice, u prvom razredu možemo učenicima zadati da izračunaju zbroj $8 + 5$. Učenici su predhodno upoznali zbrajanje u prvoj desetici i zbrajanje broja 10 i jednoznamenkastog broja ($10 + 3$). Možemo prepustiti učenicima da zadatak samostalno riješe, tj. da otkriju da je $8 + 5 = 13$. Nakon što neki od učenika otkrije da je $8 + 5 = 13$ zahtijevati ćemo od njega da to svoje otkriće, tj. svoju tvrdnju da je $8 + 5 = 13$ i obrazloži. Obrazloženje učenika, s obzirom na njegovo predznanje, trebalo bi biti ovakvo: $8 + 5 = 8 + 2 + 3 = 10 + 3 = 13$, a trebalo bi ga svakako obrazložiti i govornim jezikom. Da bi svi učenici shvatili zbrajanje u slučaju kada imamo prijelaz preko desetice, dobro je da se to zbrajanje obrazloži i jezikom izvorne stvarnosti (odnosno jezikom matematičkih modela) i jezikom slike.

U obrazlaganju tvrdnje da je $8 + 5 = 13$ služili smo se deduktivnom metodom. U tom svom obrazlaganju (zaključivanju, dokazivanju) možemo zapisati više logičkih koraka. Jedan je da je trebalo drugi pribrojnik (5) rastaviti na $2 + 3$ (Zašto?), drugi je da je trebalo zbrojiti brojeve 8 i 2 ($8 + 2 = 10$) i treći je da zbroje brojeve 10 i 3 ($10 + 3 = 13$).

Deduktivnom metodom u prvom razredu, učenici mogu izračunati i razliku brojeva 12 i 5.

Analiza i sinteza

Analizom rastavljamo neki pojam na sastavne dijelove, a **sintezom** spajamo, ujedinjujemo dijelove nekog pojma u cjelinu. Obje ove metode imaju važnu ulogu u nastavi matematike u otkrivanju pojedinih matematičkih pojmova. Analiza i sinteza gotovo uvijek idu zajedno, pa se zato često govori o analitičko–sintetičkoj metodi.

Analogija

Analogija je zaključivanje po sličnosti.

U nastavi matematike može se primijeniti zaključivanje po analogiji. Primjerice, kada učenici prvog razreda usvoje pravilo koje govori da se zbroj neće promijeniti ako pribrojnicima zamijenimo mjesta, u drugom razredu će analogijom naslutiti da će se to pravilo moći primijeniti i na pravilo zamjene mjesta faktora. Kada učenici u prvom razredu izračunaju da je $15 - 13 = 5 - 3$, analogijom zaključuju da je $17 - 14 = 7 - 4$.

Intuicija

Intuicija je neposredno zaključivanje, čuvstveno obojeno rasuđivanje ili razumijevanje nekog pojma ili tvrdnje, koje nije posljedica namjernog razmišljanja, nego se pojavljuje kao nagla spoznaja ili uvid. Termin se uglavnom koristi u svakodnevnom govoru, a stručnjaci ga izbjegavaju smatrajući da se tzv. **intuitivno zaključivanje** ne razlikuje od drugih spoznajnih procesa. U početnoj nastavi matematike intuitivno zaključivanje je dozvoljeno i može se koristiti, ali ga svakako treba obrazložiti odgovarajućim primjerima.