# Upute za uporabu

Kombinatorika na elementarnom nivou karakterizirana je vrlo malim brojem novih pojmova i često vrlo teškim zadacima. Zato je ovdje dobra prilika da se osvrnemo na tehniku rješavanja zadataka.

Da bi se uopće moglo govoriti o rješavanju zadataka, potrebne su želja i odlučnost da ih se riješi. Čitanje rješenja nema nikakve veze s rješavanjem zadataka. Ono počinje uzimanjem papira i olovke.

Prvi problem koji se javlja pri rješavanju zadataka je razumijevanje zadatka.

- Što je zadano?
- Što se traži; kako su traženi objekti uvjetovani zadanim objektima?

Lako je prepoznati je li zadatak jasan. Onaj tko je razumio zadatak, znat će ga prepričati vlastitim riječima, nacrtati skicu, navesti primjere.

Kad znamo što trebamo činiti, moramo odlučiti kako ćemo to ostvariti. Ideje samo rijetko padaju s neba — treba aktivno krenuti u upoznavanje zadatka i pitati se na primjer:

- Znam li neki slični zadatak? Ako da, koje su razlike u odnosu na rješavani zadatak? Jesu li premostive?
- Kako bi trebalo izgledati rješenje?
- Znam li neka moguća rješenja, rješenja u posebnim slučajevima?

U ovoj fazi zgodno je napraviti skicu zadanih i traženih objekata. Rezultat ove faze je plan rješavanja. Ukoliko se on kasnije pokaže neispravnim, vratit ćemo se u ovu fazu ili čak sasvim na početak.

Nakon što je plan razrađen, zadatak treba početi "rješavati". Niti ova faza nije sasvim mehanička: pri provođenju zacrtanog plana moramo paziti približavamo li se rješenju ili smo na putu da odlutamo ili se zavrtimo u krugu. Osim toga, treba paziti dodajemo li zadatku nesvjesno nove uvjete koji olakšavaju rješavanje (dodavanje novih uvjeta nije loše, ali ga treba imati pod kontrolom, jer moramo biti svjesni da u tom slučaju više ne rješavamo originalni zadatak).

Na kraju, nakon što zadatak proglasimo riješenim, treba prvo provjeriti rješenje. U svakom slučaju treba se pitati jesmo li dobili očekivani rezultat. Niti usporedba rezultata s rezultatima sličnih zadataka nije naodmet. Kad utvrdimo da je rezultat ispravan, možemo se prepustiti najinteresantnijoj, ali često zanemarivanoj fazi. Neopterećeni od pritiska da moramo riješiti zadatak možemo prodiskutirati zadatak i njegovo rješenje.

- Možemo li rezultat objasniti ili do njega doći još na koji način?
- Jesu li svi uvjeti zadatka nužni? Što se događa ako neki od uvjeta ispustimo?
- Koje su moguće generalizacije?
- Koje su posljedice zadatka?

Uvijek se možemo pitati zašto se zaustaviti na prvom točnom rješenju. Zašto matematika ne bi imala svoje stilske vježbe?

Zbirka zadataka namijenjena je učenju. Zadatke je poželjno rješavati redom, pokušavajući svaki zadatak riješiti. Mnogi zadaci imaju nakon rješenja napomene koje sadržavaju smjernice za diskusiju: ukazuju na zanimljive korake u rješenju, postavljaju slične zadatke i moguća poopćenja. Nije ih poželjno preskakivati — one omogućavaju bolje upoznavanje objekata s kojima se radi. Pogotovo ako neki zadatak ne znate riješiti i pročitate rješenje, napomena je dobra prilika da ipak nešto od zadatka riješite samostalno. Tek tako zadaci ulaze pod kožu.

Zbrku zadataka može se početi listati paralelno s rješavanjem zadataka iz zbirke. Pokušajte za svaki zadatak vidjeti što se traži, pa usporedite to s repertoarom koji vam nudi do tog trenutka svladana tehnika. Ako mislite da znate riješiti zadatak, pokušajte ge riješiti. Ako mislite da zadatak ne znate riješiti, potražite nešto drugo ili dalje rješavajte zadatke iz zbirke.

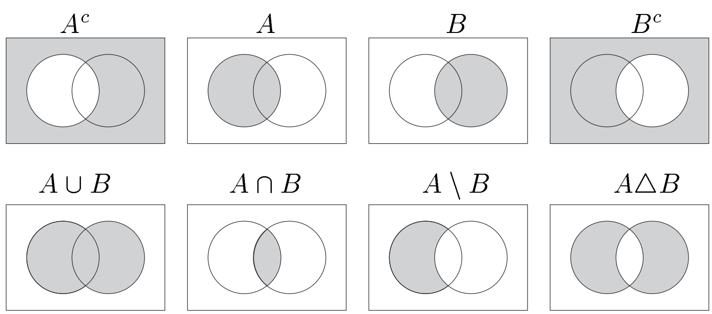
Treći dio sadržava osnovne algoritme za prebrojavanje raznih objekata. Nakon što se upoznate s prebrojavanjem, možete ga početi čitati. To može biti na primjer kad se umorite od "običnog" prebrojavanja. Ali isto tako, ako nemate ideju što početi s nekim zadatkom, možete ga prvo pokušati istražiti pomoću računala, a zatim dobivene rezultate iskoristiti u rješavanju zadataka.

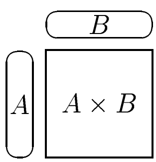
# 1. Uvodne vježbe

Bavljenje kombinatorikom podrazumijeva poznavanje skupova i operacija sa skupovima, te relacija i funkcija. Pri rješavanju zadataka, često zadanih pričom o objektima koje treba prebrojati, u prvom koraku treba prepoznati skupove i operacije koji dobro opisuju zadane objekte. Kažemo još da treba napraviti *matematički model.* To je najčešće i najteži korak pri rješavanju zadataka.

Ponovimo zato skupovne operacije i osnovna svojstva relacija i funkcija kroz zadatke u kojima treba složiti matematičke modele raznih objekata. Ovi zadaci nisu riješeni. Rješavajte ih zato u paru ili manjoj skupini — to omogućava kontrolu rješenja i razmjenu ideja.

U ovom se poglavlju nalazi i nekoliko riješenih vježbi koje se kasnije kao činjenice koriste u zadacima vezanim uz prebrojavanje.




**1.** Neka je $G$ skup svih gramofonskih ploča neke osobe, $C$ skup svih njenih kompakt diskova. Opišite riječima nekome tko ne vlada pojmovima “skup” i “element” skupove $G \cup C$, $G \cap C$.

**2.** Neka je $K$ skup svih gramofonskih ploča s klasičnom glazbom, a $P$ skup svih gramofonskih ploča na kojima netko pjeva. Riješite zadatak analogan prethodnom za ova dva skupa.

**3.** Nađite tri skupa disjunktna sa skupom $P$ iz prethodnog zadatka.

**4.** Neka je ovdje $P$ skup svih vaših gramofonskih ploča na kojima netko pjeva. Nađite nekoliko mogućih skupova $X$ za koje je $P \cup X$ podskup skupa svih vaših gramofonskih ploča. Zatim $P \cup X$ treba biti jednak skupu svih vaših gramofonskih ploča. Presjek tih skupova ne mora biti prazan. Zadajte nekoliko skupova $X$ takvih da $P \cup X$ nije podskup skupa svih vaših gramofonskih ploča.

**5.** Dokažite ili opovrgnite jednakost slijedećih parova skupova. Jednakost skupova ($X = Y$) dokazuje se obično tako, da se prvo dokaže da je svaki element skupa $X$ ujedno i element skupa $Y$ ($X \subseteq Y$). Zatim se dokaže da je svaki element skupa $Y$ element skupa $X$ i te dvije činjenice zajedno daju željenu tvrdnju. Jednakost se opovrgava nalaženjem protuprimjera — primjera za koji nije zadovoljena jednakost. Ako skupovi nisu jednaki, nađite i dodatne uvjete na skupove $A$, $B$ i $C$ kojima oni postaju jednaki. U svakom slučaju nacrtajte Vennove dijagrame tih skupova.

- $A \cup B$ i $B \cup A$; $A \cap B$ i $B \cap A$
- $(A \cup B) \cup C$ i $A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C$ i $A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cap C$ i $A \cup (B \cap C)$; $(A \cup B) \cap C$ i $A \cup (B \cap C)$
- $A \cap (B \cup C)$ i $(A \cap B) \cup (A \cap B)$; $A \cup (B \cap C)$ i $(A \cup B) \cap (A \cup B)$

**6.** Podsjetite se što znače pojmovi komutativnosti i asocijativnosti.

**7.** Vodi se sudski proces protiv čovjeka optuženog za 11 zločina. Za svaki od njih postoje i drugi mogući počinitelji.

Neka je univerzalni skup jednak skupu svih mogućih zločinaca — počinitelja barem jednog od tih zločina. Definirajte i ostale skupove potrebne za ovaj sudski proces i odgovorite na pitanje: kako pomoću skupova možemo izreći optužbu?

Jedan sudski vještak rekao je da je svih 11 zločina počinila ista osoba. Izrazite to skupovno.

**8.** Neka je $E$ skup svih učenika jedne škole koji uče engleski jezik, $N$ skup svih onih koji uče njemački. Opišite riječima skupove $E \setminus N$, $N \setminus E$, $E \triangle N$.

**9.** Neka je još $T$ skup svih učenika koji uče talijanski jezik. Izrazite pomoću skupova $E$, $N$ i $T$, te do sada definiranih skupovnih operacija skup svih učenika koji uče samo talijanski. Učinite to na dva načina. Izrazite zatim skup svih učenika koji uče točno jedan, te skup učenika koji uče točno dva od navedenih jezika. Označite sve dobivene skupove na Vennovom dijagramu.

**10.** Je li skupovna razlika komutativna operacija? Asocijativna? Označite potrebne skupove na Vennovim dijagramima. Ako mislite da je odgovor na pojedino pitanje pozitivan, dokažite odgovarajuću tvrdnju. Ako mislite da je odgovor negativan, nađite protuprimjer.

**11.** Na maturi je bilo po jedno pitanje iz hrvatskog jezika, biologije, fizike, matematike, latinskog i povijesti umjetnosti. Svaki je učenik ponešto napisao kao odgovor na svako od pitanja, ali je potpuni odgovor dao samo iz nekih. Oni koji su potpuno odgovorili na tri pitanja položili su maturu s dovoljnim uspjehom, oni koji su odgovorili na četiri s dobrim. Za pet točnih odgovora ocjena je bila vrlo dobar, a za šest izvrstan.

Ako je kao univerzalni skup zadan skup svih učenika škole koji su u tom ispitnom roku polagali maturu, definirajte ostale skupove potrebne za opisivanje ovog problema. Skupovi trebaju biti takvi, da se iz njih do sada definiranim skupovnim operacijama mogu rekonstruirati svi podaci. Primjer loše definiranih skupova su skupovi učenika složenih prema dobivenoj ocjeni: $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5$ (zašto?).

**12.** Neka je $\mathcal{U}$ skup učenika jednog razreda. Nađite komplemente skupa svih djevojčica, zatim skupa svih odličnih, te skupa svih učenika koji iz tjelesnog imaju ocjenu 1 ili 5. Skupa svih djevojčica koje iz tjelesnog imaju 5. Koji su sve skupovi ovdje bili u igri? Skicirajte ih.

**13.** Neka je $S$ neki skup školskih svjedodžbi. $S$ će u ovoj vježbi biti univerzalni skup. Neka je $O_1$ skup svjedodžbi s barem jednom ocjenom izvrstan, $O_s$ skup svjedožbi sa svim izvrsnim ocjenama. Prikažite te skupove Vennovim dijagramima. Opišite riječima skupove $O_1^c$, $O_s^c$, $O_1 \setminus O_s$.

Neka je $N_1$ skup svjedodžbi s barem jednom jedinicom. Ucrtajte i taj skup na Vennov dijagram. Opišite riječima skupove $O_1 \setminus O_5 \setminus N_1$, $O_1 \setminus (O_5 \cup N_1)$, $N_1 \setminus O_1$, $O_1 \setminus N_1$, $O_1 \cap N_1$, $O_5 \cap N_1$.

Neka je $O_2$ skup svjedodžbi s barem dvije izvrsne ocjene. Nacrtajte Vennov dijagram sa skupovima $S, O_1, O_2$ i $O_s$. Opišite riječima skupove $O_2^c$, $O_1 \setminus O_2$, $O_2 \setminus O_s$.

**14.** Jeste li prethodnu vježbu prošli na brzinu? Ponovite je još jednom. Definirajte svoje podskupove skupa $S$ i pogledajte koje se zanimljive unije, presjeci i razlike mogu pomoću njega definirati.

**15.** Je li razlika skupova asocijativna operacija? Komutativna? Što možete reći o skupovima $(A \setminus B) \setminus C$ i $(A \setminus C) \setminus B$?

**16.** Kako možemo izraziti $(A \setminus B) \setminus C$ pomoću $B \cup C$? U kakvoj je vezi $(A \setminus B) \setminus C$ s $B \cap C$?

**17.** Izrazite barem na dva različita načina $(A \setminus B) \setminus C$ kao uniju disjunktnih skupova. I jednom kao skupovnu razliku nekih dvaju skupova.

**18.** U ormaru su hlače, suknje, košulje i puloveri koji se mogu dobro kombinirati u okviru uobičajenih načina oblačenja. Opišite skup svih mogućih oblačenja tih predmeta, ako treba obući hlače i pretoplo je za pulover. Koji skup odgovara oblačenju suknje, ako za navečer treba ponijeti i pulover? Skupu svih oblačenja? Što se događa ako je neki od ovih skupova prazan?

**19.** Opišite barem na dva načina Kartezijev produkt skupa košulja iz prethodnog zadatka sa samim sobom. Zatim još Kartezijev produkt skupa hlača sa skupom košulja i još jednom sa skupom košulja.

**20.** Kako se mogu sve mogućnosti ispunjavanja sportske prognoze prikazati pomoću Kartezijevog produkta?

**21.** Ako je $S$ skup svih vrsti sladoleda u jednoj slastičarnici, kako možemo interpretirati $\mathcal{P}(\mathcal{S})$, partitivni skup skupa $S$? Čemu odgovara skup svih naručivanja sladoleda?

**22.** Ako je $R$ skup učenika nekog razreda, a $S_1, S_2, \ldots, S_n$ skupovi učenika koji sudjeluju na 1.,2.,$\ldots$,$n$-toj slobodnoj aktivnosti, je li skup $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ particija skupa $R$?

**23.** Neka su za razred iz prethodne vježbe i za prirodne brojeve između 1 i 12 skupovi $R_i$ zadani kao skupovi svih učenika rođenih u $i$-tom mjesecu. Je li $\{R_1, R_2, \ldots, R_{12}\}$ particija skupa $R$?

**24.** Nađite jednu relaciju između skupa svih računa izdanih na jedan dan u nekoj trgovini i skupa svih artikala koji se prodaju u toj trgovini.

**25.** Nađite barem dvije relacije na skupu $H \times K$, gdje je $H$ skup hlača, a $K$ skup košulja u nečijem ormaru.

**26.** Definirajte barem dvije relacije na skupu svih učenika jednog razreda.

**27.** "Znati nečije ime" je obično refleksivna relacija. Nađite još jednu relaciju koja je refleksivna i jednu koja nije refleksivna.

**28.** Može se očekivati da je "biti poznanik" simetrična relacija. Nađite još jednu simetričnu relaciju.

**29.** "Prepisao domaću zadaću iz nekog predmeta" je relacija koja nije simetrična (premda je možda od neke dvojice prijatelja jedan zadužen za domaće zadaće iz engleskog, a drugi za matematiku). Nađite još jednu relaciju koja nije simetrična.

**30.** "Biti potomak" je tranzitivna relacija. Nađite još jednu tranzitivnu relaciju.

**31.** "Biti prijatelj" nije tranzitivna relacija (premda bi to netko mogao očekivati). Nađite još jednu relaciju koja nije tranzitivna.

**32.** Nađite primjer relacije koja je refleksivna, ali nije niti simetrična niti tranzitivna. U ovom i slijedećim zadacima pokušajte naći "žive" primjere. Tek ako vam to ne uspije, uzmite skup nekih prirodnih brojeva i konstruirajte relaciju nabrajanjem elemenata.

**33.** Nađite primjer relacije koja je simetrična, ali nije niti refleksivna niti tranzitivna.

**34.** Nađite primjer relacije koja je tranzitivna, ali nije niti refleksivna niti simetrična.

**35.** Nađite primjer relacije koja je refleksivna i simetrična, ali nije tranzitivna.

**36.** Nađite primjer relacije koja je refleksivna i tranzitivna, ali nije simetrična.

**37.** Što bi bilo s relacijama koje su simetrične i tranzitivne?

**38.** Nađite primjer relacije koja je i refleksivna i simetrična i tranzitivna.

**39.** Koja od navedenih svojstava ima relacija "išli/idu u isti razred" na skupu svih ljudi? Koja svojstva možemo očekivati na skupu svih prvoškolaca? Koja svojstva ima relacija "biti isto godište"?

**40.** Relaciju između dvaju skupova možemo prikazati tako da Kartezijev produkt prikažemo kao tablicu, te da za svaki par u relaciji na odgovarajuće mjesto u tablici upišemo križić. Drugi prikaz je pomoću grafova: nacrtamo skupove na kojima je definirana relacija, te za svaki par $(a, b)$ iz relacije nacrtamo strelicu od $a$ prema $b$. Ako je relacija zadana na jednom skupu, taj skup crtamo samo jednom. Prikažite neke od relacija iz prethodnih primjera tablično i grafovski.

Kako se u tabličnom zapisu relacije očituju svojstva refleksivnosti, simetričnosti i tranzitivnosti? Kako se ta svojstva očituju u grafovskom prikazu? Što možete reći o relacijama ekvivalencije?

**41.** Nađite klase ekvivalencije za relaciju ekvivalencije "biti isto godište".

**42.** Privatne telefonske brojeve u nekom gradu možemo svrstati u blokove prema njihovim prvim dvjema znamenkama. Uvjerite se da je to particija skupa svih privatnih telefonskih brojeva. Kako može glasiti odgovarajuća relacija ekvivalencije? Nađite barem dva rješenja.

**43.** Tipični primjeri injekcija su razna pridruživanja matičnih brojeva. Unutar jednog sustava (npr. jedne knjižnice) ne smiju postojati dva korisnika s istim matičnim brojem. S druge strane moraju postojati "slobodni" matični brojevi — oni koji će biti pridruženi budućim korisnicima.

Nađite još dvije funkcije čija se injektivnost koristi u svakodnevnom životu. Neka barem jedna od njih ne bude injektivna.

**44.** Objasnite zašto ima smisla ostavljati otisak prsta na policiji.

**45.** Neka je $V$ skup svih odraslih voćaka u jednom voćnjaku. Nađite skup $Y_1$ i preslikavanje $f_1 : V \to Y_1$ koje je injekcija. Nađite zatim skup $Y_2$ i preslikavanje $f_2 : V \to Y_2$ koje za neke voćnjake nije injekcija. Izaberite zatim dvije domene i dva preslikavanja u skup tih voćaka, od kojih jedna jest, a druga nije injekcija.

**46.** Tipični primjeri surjekcija su razna preslikavanja sa skupa nekih ljudi na skupove poslova koje treba obaviti. Svaka osoba smije raditi samo jedan posao, svaki posao treba biti obavljen. Pritom nije bitno je li neki posao obavljalo više ljudi.

Nađite još dvije funkcije čija se surjektivnost koristi u svakodnevnom životu. Neka barem jedna od njih ne bude injektivna.

**47.** Sa skupa svih fizičkih i pravnih osoba koje posjeduju stan postoji jedna prirodna surjekcija na skup svih stanova. Izrecite je! Slično nažalost ne vrijedi za skup svih vlasnika pasa i skup svih pasa.

**48.** Sa skupa svih ljudi u skup svih boja ne postoji surjekcija "imati oči određene boje". Redefinirajte kodomenu tako da navedeno preslikavanje bude bijekcija. Generalizirajte.

**49.** Tipični primjeri bijekcija su razna kodiranja. Ako neki predmet zamijenimo nekom oznakom, onda dva predmeta ne smiju imati istu oznaku. S druge strane, svaki kod u nekom sistemu odgovara nekom realnom predmetu. To omogućava da podatke o predmetima držimo u računalu, a ne u skladištu pokraj predmeta i da unatoč tome za svaki predmet možemo doći do podataka o njemu i da za svaki podatak možemo reći o kojem se predmetu radi.

Nađite još dva primjera bijekcija. Potrudite se da budu bitno različita od ovog primjera.

**50.** Neka slijedeći primjer pokaže kako ponekad nesvjesno koristimo preslikavanja. Mali Mirko studira matematiku, jednako kao njegov stariji brat Veljko. Razlika je jedino u tome što Mirko ne pohađa redovito predavanja. Jednog dana zamoli Mirko Veljka da mu da svoje zabilješke s predavanja prof. Mijenića želeći se spremiti za ispit iz linearne algebre. Nakon toga Veljko osvane s bilježnicom iz kombinatorike. Objasnite što se dogodilo? Što bi se dogodilo da je prof. Mijenić Veljku predavao dva predmeta? Koliko je predmeta prof. Mijenić predavao Mirku?

**51.** Nađite nekoliko permutacija skupa učenika jednog razreda.

**52.** Neka je funkcija $p$ sa skupa svih ljudi starijih od godinu dana na skup svih zubara: svakom čovjeku je pridružen "njegov" zubar (ovdje je na djelu bila idealizacija — što smo sve pretpostavili da bi $p$ bila funkcija?). Kojem objektu u ordinaciji zubara $z$ odgovara $p^{-1}(z)$?

**53.** Svakom preslikavanju $f : X \to Y$ možemo pridružiti skup svih praslika po tom preslikavanju: $\ker f := \{f^{-1}(y) | y \in f(X)\}$. Taj skup zovemo *jezgrom preslikavanja* $f$. Dokažite da je jezgra preslikavanja particija domene.

Posljedica te činjenice je da svaka funkcija prirodno inducira jednu relaciju ekvivalencije na svojoj domeni: dva elementa domene su u relaciji ako i samo ako im se slike pri zadanoj funkciji podudaraju. To svojstvo često nesvjesno koristimo pri zadavanju relacija ekvivalencije: kažemo da su $x$ i $y$ u relaciji ako i samo ako imaju istu vrijednost svojstva $S$, pri čemu je svojstvo $S$ takvo, da je jednoznačno određeno elementom za kojeg se određuje.

Na primjer, relaciju "imati jednak broj godina" moći ćemo uzeti kao primjer relacije ekvivalencije, dok relacija "imati rasnog psa iste pasmine" nije relacija ekvivalencije na skupu svih vlasnika rasnih pasa. Analizirajte svoje primjere relacija ekvivalencije!

**54.** Što možete reći o jezgri za preslikavanje koje je injekcija, surjekcija, bijekcija?

**55.** U jednoj (dalekoj) zemlji studenti voze bicikle. Svaki student ima točno jedan bicikl. Poznat je tip bicikla svakog studenta. Jedna tvornica guma želi nagraditi dobre studente tako da im pokloni komplet guma za njihove bicikle. Koji su skupovi i koja preslikavanja ovdje u igri?

**56.** Ako je $f$ preslikavanje koje korisnicima neke knjižnice pridružuje njihove njihove matične brojeve, možete li zamisliti kad se koristi njeno inverzno preslikavanje?

**57.** Neka je $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$. Dokažite, odnosno nađite primjere koji ilustriraju slijedeće tvrdnje:

(a) ako je $g \circ f$ surjekcija, onda je $g$ surjekcija; $f$ nije nužno surjekcija
(b) ako je $g \circ f$ injekcija, onda je $f$ injekcija; $g$ nije nužno injekcija

**58.** Neka je $f : X \to Y$. f je surjekcija ako i samo ako postoji funkcija $g : Y \to X$ takva da je $f \circ g = 1_Y$.

*Rješenje.* $\Leftarrow$. Ovaj smjer trebali ste dokazati u prethodnoj vježbi ($1_Y$ je surjekcija).

$\Rightarrow$. Definiramo funkciju $g : Y \to X$ tako da je $g(y) \in f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\})$ za svako $x \in X$. To možemo napraviti jer je $f$ surjekcija, pa je $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ za svako $y \in Y$. Tako definirana funkcija $g$ zadovoljava $f \circ g = 1_Y$ (provjerite to!).

$\hookleftarrow$ Prema prethodnoj vježbi znamo da je $g$ sigurno injekcija.

↬ Pokušajte izračunati koliko postoji dobrih $g$-ova za zadanu surjekciju f. Kad je $g$ jedinstven?

↫ U svakoj je školi funkcija $f$ koja učenicima pridružuje njihove razrede surjekcija. Značenje desnog inverza možemo opisati ovako: neka je $g$ funkcija koja iz svakog razreda izabire njegovog predstavnika u nastavničkom vijeću. Tada će moći na sjednice biti pozvani predstavnici razreda koji će ujedno biti i učenici tog razreda. To ne bi moglo vrijediti da funkcija $f$ nije surjekcija, tj. da postoje razredi bez učenika.

Uvjerite se na ovom primjeru da $g$ nije nužno i lijevi inverz funkcije $f$. Kako bi trebali izgledati razredi, odnosno funkcija $f$ da bi $g$ bio i lijevi inverz?

**59.** Neka je $f : X \to Y$. f je injekcija ako i samo ako postoji funkcija $g : Y \to X$ takva da je $g \circ f = 1_X$.

*Rješenje.* $\Leftarrow$. Ovaj smjer trebali ste dokazati u pretprethodnoj vježbi ($1_X$ je injekcija).

$\Rightarrow$. Definiramo funkciju $g : Y \to X$ tako da je $\{g(y)\} = f^{-1}(y)$ za svako $x \in f(X)$, a bilo što inače. To možemo napraviti jer je $f$ injekcija, pa je $f^{-1}(y)$ jednočlan za svako $y \in f(X)$. Tako definirana funkcija $g$ zadovoljava $g \circ f = 1_X$ (provjerite to!).

↫ Prema pretprethodnoj vježbi znamo da je $g$ sigurno surjekcija.

↬ Pokušajte izračunati koliko postoji dobrih $g$-ova za zadanu injekciju f. Kad je $g$ jedinstven?

↫ Funkcija $f$ koja svakom građaninu neke zemlje pridružuje njegov matični broj je injekcija. U Hrvatskoj joj je kodomena skup svih trinaestoznamenkastih brojeva. Neka je $g$ preslikavanje sa skupa svih trinaestoznamenkastih brojeva u skup svih građana Republike Hrvatske koja svakom broju koji je nečiji JMBG pridružuje upravo tu osobu, a ostalima bilo koga (npr. prvu osobu s većim JMBG). Da je $g$ lijevi inverz od $f$ znači da možemo na dokumente pisati svoj matični broj umjesto imena i prezimena, a da se pri tome neće izgubiti informacija o osobi (u najgorem slučaju će trebati nazvati policiju i pitati o kome se radi). To ne bismo mogli napraviti ako bismo "dijelili" matični broj s još nekom osobom.

Opišite riječima što bi u ovom primjeru značilo da je $g$ i desni inverz od $f$. Kad bi $g$ bio i desni inverz?

↫ Ovaj i prethodni zadatak često se u dokazima koriste zajedno. Dokažemo li da funkcija ima obostrani inverz, ona je bijekcija.