# 1.

# Uvod. Osnovne konstrukcije ravnalom i šestarom.

Pod imenom *Geometrijske konstrukcije* razumijevamo onaj dio geometrije u ravnini (planimetrije) koji planimetrijske probleme rješava konstruktivnom metodom, o čemu će ovdje biti riječi.

Definirajmo najprije:

**Definicija 1.1.** Bilo koji podskup točaka promatrane ravnine $\pi$ zvat ćemo *geometrijskom figurom ravnine* $\pi$.

Ovdje su svakako uključene geometrijske figure od konačno mnogo kao i beskonačno mnogo točaka. Tako se promatrana figura može sastojati od konačno mnogo pojedinačnih točaka. Pravac ili kružnicu (ili njihove dijelove) možemo također smatrati figurom jer se i "sastoje" od beskonačno mnogo točaka, stoga i svaku kombinaciju tih figura možemo također smatrati figurom.

*Konstruirati* neku figuru znači, najopćenitije, "nacrtati" tu figuru. Npr. nacrtati pravac, kružnicu itd.

Za konstrukciju (crtanje) geometrijskih figura moramo upotrijebiti izvjesne instrumente (sprave, pomagala). Ako hoćemo nacrtati neki pravac, moramo imati ravnalo. Za crtanje kružnica moramo imati šestar itd. Ovisi o nama koje ćemo sprave za crtanje smatrati dopuštenim. No, taj izbor ima za posljedicu ograničavanje područja rješavanja problema. Naime, kako ćemo vidjeti kasnije, ne mogu se svi mogući problemi rješavati uz dane sprave.

U prvom ćemo se dijelu ove knjige baviti samo tzv. euklidskim konstrukcijama. To su one konstrukcije kod kojih su dopuštene sprave:

1. *jednobridno ravnalo*, dakle, ravnalo kojemu možemo upotrebljavati samo jedan od dva međusobno paralelna brida;

2. *šestar* s promjenjivim po volji velikim rasponom [1].

[1] U buduće ćemo radi kratkoće govoriti samo "ravnalo" i "šestar"

***

Pogledajmo sada na koji nam je način dopušteno primijeniti ravnalo i šestar u danoj euklidskoj ravnini. Ponajprije moramo pretpostaviti da su dane dvije različite točke $O$ i $E$ u danoj ravnini. *Dužinu* $\overline{OE}$ *smatramo jediničnom dužinom.*

Ravnalom nam je dopušteno crtati pravac kroz dvije zadane različite točke, crtati dužinu ako su poznate njene krajnje točke i crtati zraku od dane početne točke kroz drugu danu točku.

Šestarom možemo još nacrtati svaki od dva kružna luka ako su mu poznate krajnje točke i središte.

Konstrukcije pomoću ravnala i šestara zovemo još i "euklidskim konstrukcijama". Naime, prva tri postulata (od pet) u Euklidovim "Elementima" kažu:

- da se može nacrtati dužina između dvije dane točke;
- da se neka dužina može produžiti neograničeno;
- da se oko svake točke može nacrtati kružnica s danim polumjerom.

Ova tri postulata očito sugeriraju i dopuštaju upotrebu ravnala i šestara. Ovdje je prešutno pretpostavljeno da se sjecišta dvaju pravaca, odnosno nekog pravca i kružnice kao i sjecišta dviju kružnica (ukoliko postoje) dadu uvijek neposredno uočiti sa crteža, tj. da se takva sjecišta smatraju uvijek određenima.

Dopuštenom uporabom ravnala i šestara na već navedeni način moguće je dakle, izvesti sljedeće temeljne operacije:

**1.** konstrukcija pravca kroz dvije dane različite točke;

**2.** konstrukcija sjecišta dvaju danih neparalelnih pravaca od kojih je jedan zadan s dvije različite točke;

**3.** konstrukcija kružnice sa središtem u danoj točki koja prolazi kroz drugu danu točku;

**4.** konstrukcija dvaju sjecišta dane kružnice i jednog pravca (koji siječe tu kružnicu) koji je zadan s dvije svoje različite točke; konstrukcija dvaju sjecišta danog pravca i jedne kružnice (koja siječe taj pravac) koja je zadana svojim središtem i jednom svojom točkom;

**5.** konstrukcija sjecišta jedne dane kružnice i još jedne kružnice (koja siječe prvu kružnicu) koja je zadana svojim središtem i još jednom svojom točkom.

**Definicija 1.2.** Svaki slijed od konačno mnogo izvedenih osnovnih operacija zvat ćemo *konstrukcijom pomoću ravnala i šestara*, odnosno *euklidskom konstrukcijom*.

Najvećim dijelom ovog prvog dijela knjige rješavat ćemo određene planimetrijske zadatke konstruktivnom metodom (pomoću konstrukcija figura). Takve ćemo zadatke zvati kraće *konstruktivnim zadacima*.

**Definicija 1.3.** *Konstruktivni zadatak* sastoji se u tome da se konstruira neka figura odabranim dopuštenim spravama (u našem je slučaju to ravnalo i šestar), ako je dana neka druga figura i izvjesni odnosi između dane i tražene figure.

Bilo koju figuru koja zadovoljava u zadatku postavljene uvjete zovemo *rješenjem zadatka*.

* * *

Može se svakako dogoditi da zadatak ima jedno ili više rješenja. Zadatak se smatra *riješenim* ako

a) postoji konačno mnogo figura $F_1$, $F_2, \dots, F_n$ koje zadovoljavaju uvjete zadatka,

b) svaka daljnja figura koja zadovoljava uvjete zadatka jednaka je jednoj od $F_1$, $F_2, \dots, F_n$.

U ovom slučaju kažemo da *zadatak ima $n$ rješenja*.

**Primjer 1.1.** Konstruirajte trokut ako su mu dane dvije stranice i kut među njima.

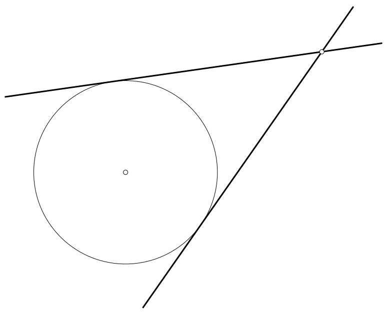
Položaj tog trokuta ovisi o tome kako smo izabrali položaj stranica. To bi značilo da zadatak ima beskonačno mnogo rješenja. No, svi su ti trokuti međusobno sukladni. Kažemo dakle da zadatak ima jedno rješenje (do na sukladnost).

U svezi s ovim razmatranjima, evo još nekoliko pojmova.

- *Određeni zadatak*

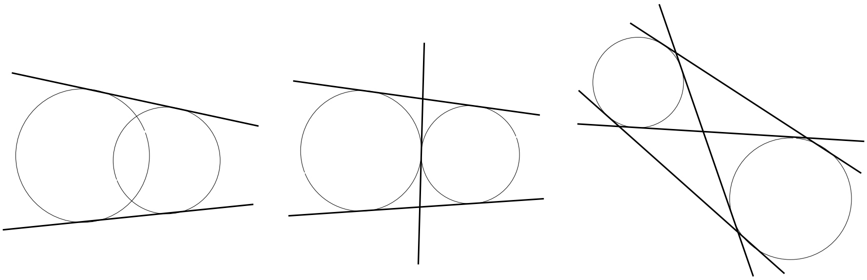
Smatramo da je zadatak određen ako postoji konačan broj rješenja.

**Primjer 1.2.** a) Konstruirati tangente iz dane točke izvan kružnice, na tu kružnicu. (2 rješenja.)



*Sl. 1.1. Primjer određenog zadatka. Iz točke van kružnice mogu se povući točno dvije tangente*

b) Konstruirati zajedničke tangente dviju kružnica od kojih jedna ne leži unutar druge. (Moguća 2, 3 ili 4 rješenja.)



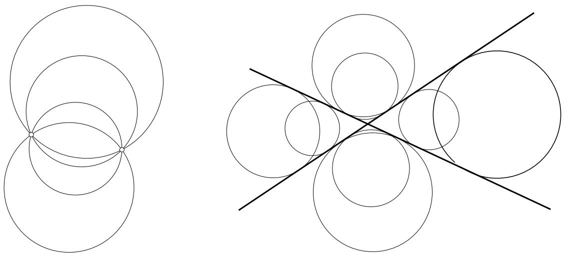
*Sl. 1.2. Ovisno o položaju kružnica, broj zajedničkih tangenti ovakvih dviju kružnica može biti 2, 3 ili 4*

• *Neodređeni zadatak*

Smatramo da je zadatak neodređen ako postoji beskonačno mnogo rješenja.

**Primjer 1.3.** a) Konstruirati kružnicu koja prolazi dvjema danim točkama.

b) Konstruirati kružnicu koja dira dva dana pravca.



*Sl. 1.3. Primjeri neodređenih zadataka. Postoji beskonačno mnogo kružnica koje prolaze kroz dvije zadane točke ili dodiruju zadana dva pravca*

• *Nema rješenja*

U ovom slučaju ne postoji figura koja zadovoljava postavljene uvjete.

**Primjer 1.4.** a) Konstruirati tangente na danu kružnicu iz točke unutar kružnice.

b) Konstruirati zajedničke tangente dviju koncentričnih kružnica.

• *Preodređeni zadatak*

U ovom slučaju je dano više uvjeta nego što je potrebno, tako da ne postoji figura koja zadovoljava sve uvjete.

**Primjer 1.5.** a) Konstruirati kružnicu koja prolazi kroz proizvoljne četiri zadane točke.

b) Konstruirati zajedničku tangentu triju kružnica.

* * *

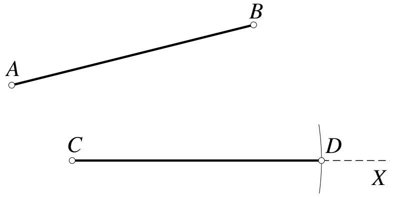
Razmotrit ćemo dalje izvjesne konstruktivne zadatke, koji se ističu po svojoj jednostavnosti i koje ćemo nazivati *temeljnim konstrukcijama.* Svaki se daljnji rješivi konstruktivni zadatak tada može izvesti nizom temeljnih konstrukcija, što nam svakako olakšava pregled i rješavanje takvog zadatka. Pri rješavanju nekog konstruktivnog zadatka bit će osnovno otkriti takav jedan niz od konačno mnogo temeljnih konstrukcija koje dovode do rješenja prvobitnog zadatka.

## Temeljne konstrukcije

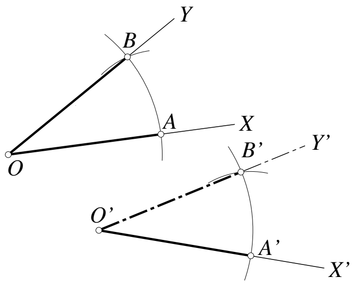
### I. Prijenos dužina

Zadana je jedna dužina $\overline{AB}$ i jedan polupravac $CX$ (sl. 1.4). Nanesite na polupravac $CX$ od početne točke $C$, dužinu $\overline{CD}$ koja je jednaka dužini $\overline{AB}$ ( $|AB| = |CD|$ ).

Točku $D$ na polupravcu $CX$ dobijemo očito kao sjecište polupravca $CX$ s kružnicom kojoj je $C$ središte, a $r = |AB|$ polumjer. Upotrijebili smo ovdje temeljnu operaciju 4.



*Sl. 1.4. Prijenos dužine*



*Sl. 1.5. Prijenos kuta*

### II. Prijenos kutova

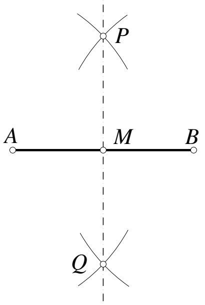
Dan je konveksni kut $\sphericalangle XOY$ i polupravac $O'X'$. Treba konstruirati s jedne određene strane dane zrake $O'X'$ kut $\sphericalangle X'O'Y'$ tako da je jednak danom kutu $\sphericalangle XOY$.

Opišemo kružni luk s bilo kojim polumjerom oko točke $O$ i s istim polumjerom oko $O'$ (sl. 1.5). Luk oko $O$ siječe krakove kuta $\sphericalangle XOY$ u točkama $A$ i $B$, a kružni luk oko $O'$ siječe krak $X'$ u točki $A'$. Zatim se oko $A'$ opiše luk s polumjerom $|AB|$, kojim se siječe opisani luk oko $O'$ na odgovarajućoj strani u točki $B'$. Luk $\overset{\frown}{AB}$ jednak je očito, luku $\overset{\frown}{A'B'}$, pa je i $\sphericalangle XOY = \sphericalangle X'O'Y' = \sphericalangle A'O'B'$. Koristili smo se ovdje temeljnim operacijama 4 i 5.

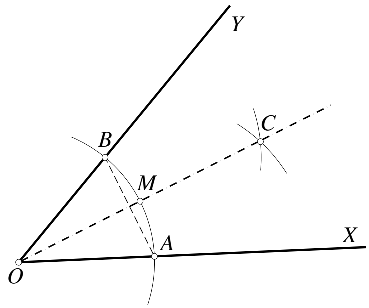
**III. Konstrukcija simetrale i polovišta dužine**

Dana je dužina $\overline{AB}$. Treba konstruirati simetralu (os) te dužine, tj. treba konstruirati geometrijsko mjesto točaka koje su jednako udaljene od točaka $A$ i $B$.

Povučemo li oko $A$ i oko $B$ kružne lukove s dovoljno velikim polumjerom $r > \frac{1}{2}|AB|$, tada se ta dva luka sijeku u točkama $P$ i $Q$ koje su očito jednako udaljene od $A$ i od $B$ (sl. 1.6). Pravac $PQ$ je očito tražena simetrala, a sjecište $M$ od $PQ$ i $AB$ je polovište dužine $\overline{AB}$. Ovdje su uporabljene temeljne operacije 5 i 2.




*Sl. 1.6. Simetrala dužine*




*Sl. 1.7. Simetrala kuta*

**IV. Konstrukcija simetrale kuta i polovišta luka**

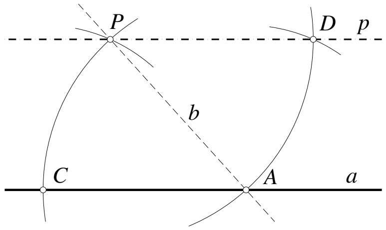
Za dani kut $\sphericalangle XOY$ neka se konstruira njegova simetrala, tj. geometrijsko mjesto točaka jednako udaljenih od oba kraka kuta. Takva simetrala raspolavlja dani kut.

Za dani kut $\sphericalangle XOY$ neka su $A$ i $B$ sjecišta njegovih krakova sa kružnim lukom s centrom u $O$ i bilo kojim polumjerom. (sl. 1.7). Simetrala dužine $\overline{AB}$ je sada očito simetrala kuta $\sphericalangle XOY$. Kako ta simetrala očito prolazi centrom $O$, to je dovoljno konstruirati prema prethodnoj konstrukciji jednu točku $C$ te simetrale. Simetrala $OC$ ujedno siječe luk $\overset{\frown}{AB}$ u njegovom polovištu $M$. Ovdje smo očito uporabili temeljne operacije 1, 4 i 5.

**V. Konstrukcija pravca koji prolazi danom točkom i koji je paralelan s danim pravcem**

Za dani pravac $a$ i točku $P$ koja ne leži na pravcu $a$ treba konstruirati jednoznačno određeni pravac $p$ koji prolazi točkom $P$ i paralelan je s danim pravcem $a$.

Položimo točkom $P$ bilo koji pravac $b$ koji siječe dani pravac $a$ u nekoj točki $A$ (sl. 1.8). Luk s centrom u $A$ kroz $P$ siječe pravac $a$ u točki $C$. Kut $\sphericalangle PAC$ prenesemo sada (v. temeljnu konstrukciju II) u položaj $APD$. Pravac $p = PD$ je očito paralelan s pravcem $a$. Lik $PDAC$ je naime paralelogram. Ovdje smo upotrijebili sve temeljne operacije.




*Sl. 1.8. Konstrukcija paralele*

**VI. Konstrukcija okomice iz dane točke na dani pravac**

Neka je dana točka $P$ i pravac $a$. Treba konstruirati pravac $n$ koji prolazi točkom $P$, a okomit je na pravac $a$.

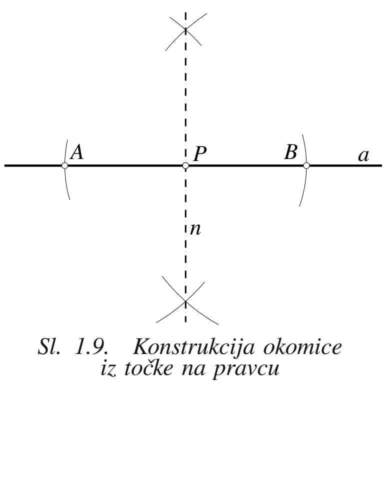
Ovdje možemo razlikovati dva slučaja.

a) Dana točka $P$ leži na danom pravcu $a$.

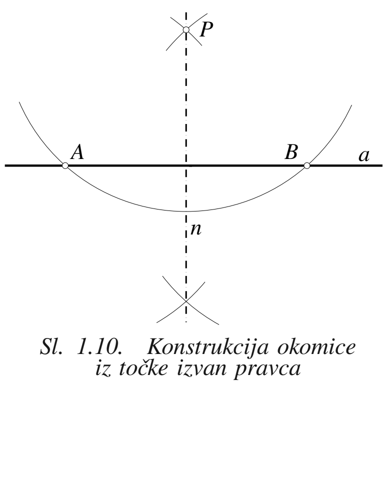
U ovom slučaju konstruiramo kružni luk s centrom u točki $P$ i bilo kojim polumjerom. Taj kružni luk siječe dani pravac $a$ u točkama $A$ i $B$ (sl. 1.9). Točka $P$ očito je polovište dužine $\overline{AB}$, pa je tražena okomica $n$ tada očito os dužine $\overline{AB}$ (v. temeljnu konstrukciju III.)

b) Dana točka $P$ ne leži na danom pravcu $a$.

Kružni luk s centrom u danoj točki $P$ i dovoljno velikim odabranim polumjerom, siječe dani pravac $a$ u točkama $A$ i $B$ (sl. 1.10). Tražena okomica $n$ je tada os dužine $\overline{AB}$ (v. temeljnu konstrukciju III.), koja očito prolazi i točkom $P$. Ovdje smo upotrijebili temeljne operacije 1, 4 i 5.




*Sl. 1.9. Konstrukcija okomice iz točke na pravcu*

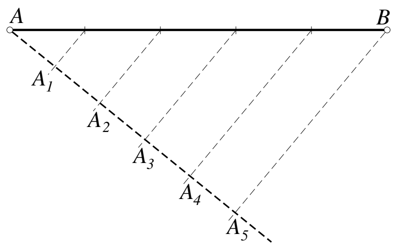



*Sl. 1.10. Konstrukcija okomice iz točke izvan pravca*

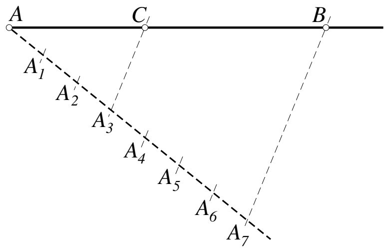
## VII. Dijeljenje dužine na jednake dijelove i u danom omjeru

Neka je dužina $\overline{AB}$ koju treba podijeliti na $n$ jednakih dužina. Ovdje uzmimo da je $n = 5$ radi konkretne konstrukcije.

Položimo zraku sa $A$ kao početnom točkom u nekom pogodno odabranom smjeru. Nanesimo na tu zraku počevši od $A$ pet puta neku odabranu dužinu $|AA_1| = |A_1A_2| = |A_2A_3| = |A_3A_4| = |A_4A_5|$ (sl. 1.11). Povučemo zatim paralele s $\overline{A_5B}$ točkama $A_1, \dots A_5$ koje dijele dužinu $\overline{AB}$ na pet jednakih dijelova, što se lako dokaže pomoću sličnih trokuta (Tales).




*Sl. 1.11. Dijeljenje dužine na jednake dijelove*




*Sl. 1.12. Dijeljenje dužine u danom omjeru*

Ako moramo dužinu $\overline{AB}$ podijeliti u omjeru $3 : 4$, tada kao i malo prije, na neku zraku kroz $A$ nanesemo $3 + 4 = 7$ dijelova i tako dobijemo točke $A_1, \dots, A_7$. Paralela sa $A_7B$ kroz točku $A_3$ siječe dužinu $\overline{AB}$ u točki $C$ takvoj da je $|AC| : |CB| = 3 : 4$, što se lako dokaže pomoću sličnosti trokuta $ACA_3$ i $ABA_7$ (sl. 1.12). Ovdje smo upotrijebili temeljne operacije 2 i 4 i temeljnu konstrukciju V.

## VIII. Konstrukcija trokuta ako su mu poznate sve tri stranice

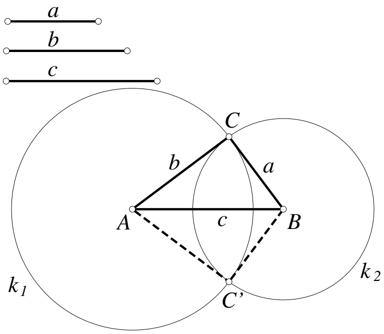
Neka su dane tri dužine duljina $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$. Konstruirajte trokut $ABC$ kojemu su $a$, $b$ i $c$ duljine stranica.*

Kako je poznato, tri dužine mogu biti stranice nekog trokuta samo onda ako njihove duljine zadovoljavaju nejednakosti trokuta

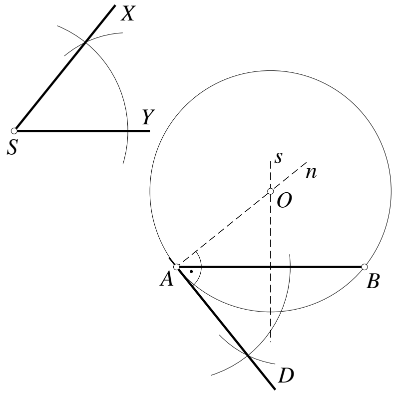
$$a < b + c; \quad b < a + c; \quad c < a + b.$$

Nanesimo na neki pravac ravnine od njegove točke $A$ dužinu duljine $c = |AB|$ (sl. 1.13). Sada opišimo oko točke $A$ kao središta kružnicu s polumjerom $b$, a oko točke $B$ kao središta kružnicu s polumjerom $a$. Te dvije kružnice sijeku se u dvije točke $C$ i $C'$ koje leže simetrično s obzirom na $\overline{AB}$.

* Duljine dužina označavat ćemo malim latinskim slovima, a katkad će to biti i imena tih dužina. Iz konteksta će biti jasno o čemu se radi.




*Sl. 1.13. Konstrukcija trokuta s poznate tri stranice*




*Sl. 1.14. Konstrukcija kružnog luka iz kojeg se dužina vidi pod danim kutom*

Vidimo da uz određeni položaj dužine $\overline{AB}$ imamo dva trokuta $ABC$ i $ABC'$ koji zadovoljavaju uvjete zadatka, ali koji su međusobno sukladni, pa kažemo da ovaj zadatak ima jedno rješenje.

Ovdje možemo spomenuti neke posebne slučajeve ove konstrukcije. Ako je naime, $a = b$ tada očito za rješenje dobijemo jednakokračan trokut. Ako pak imamo $a = b = c$ tada je rješenje jednakostraničan trokut. Upotrijebili smo temeljne operacije 4 i 5.

## IX. Konstrukcija kružnog luka iz čijih se točaka vidi neka dužina pod danim kutom

Dana je dužina $\overline{AB}$ i kut $\sphericalangle XSY$. Treba konstruirati kružni luk tako da je kut $\sphericalangle XSY$ obodni kut tetive $\overline{AB}$.

Središte $O$ traženog kružnog luka mora se očito nalaziti na osi $s$ tetive $\overline{AB}$ (v. temeljnu konstrukciju III).

Prenesemo sad zadani kut $\sphericalangle XSY$ u položaj $\sphericalangle BAD$ (sl. 1.14), (v. temeljnu konstrukciju II). Sada je traženo središte kružnog luka u sjecištu osi $s$ i pravca $n$, koji je okomit na $AD$ i prolazi točkom $A$. Upotrijebili smo temeljne konstrukcije II i III i temeljne operacije 1 i 5.

## Temeljne konstrukcije trokuta

Provest ćemo sada neke najjednostavnije konstrukcije trokuta koje se temelje na poznatim teoremima o kongruenciji (sukladnosti) trokuta. Poznato je naime, da su dva trokuta kongruentna (sukladna) ako se podudaraju u:

1. sve tri stranice;
2. dvije stranice i kutu među njima;
3. jednoj stranici i dva uz tu stranicu priležeća kuta;
4. dvije stranice i kutu nasuprot većoj stranici.

U svakom od tih slučajeva, ako su dani spomenuti elementi možemo konstruirati trokut koji je određen do na sukladnost.

### 1. temeljna konstrukcija trokuta

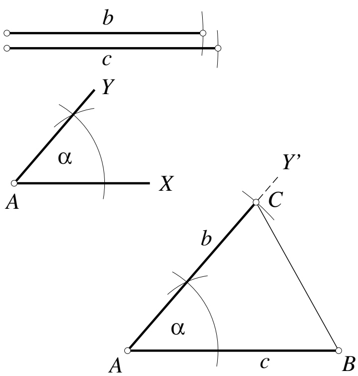
Konstruirajte trokut ako su zadane tri dužine duljina $a$, $b$, $c$ kao stranice tog trokuta.

Ovu smo konstrukciju trokuta već opisali u temeljnoj konstrukciji VIII. Rješenje ove konstrukcije postoji uz uvjet da vrijede nejednakosti trokuta. Svi trokuti konstruirani na osnovi danih stranica međusobno su sukladni.

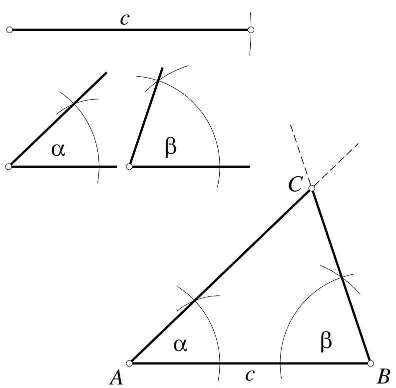
### 2. temeljna konstrukcija trokuta

Konstruirajte trokut ako su zadane dvije stranice i kut među njima.

Ako su dakle, prema 2. teoremu o sukladnosti trokuta zadane dvije stranice $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$, ($b = |AC|$, $c = |AB|$) i kut $\alpha$ među njima, tada najprije konstruiramo dužinu $\overline{AB}$ na po volji odabranom mjestu. Prenesemo zatim kut $\alpha = \sphericalangle XAY$ u položaj $\sphericalangle BAY'$ te na kraku $AY'$ nanesemo dužinu $\overline{AC}$ ($b = |AC|$) (sl. 1.15). Time smo konstruirali trokut $ABC$ koji je određen do na sukladnost.



*Sl. 1.15. Druga konstrukcija trokuta*



*Sl. 1.16. Treća konstrukcija trokuta*

**3. temeljna konstrukcija trokuta**

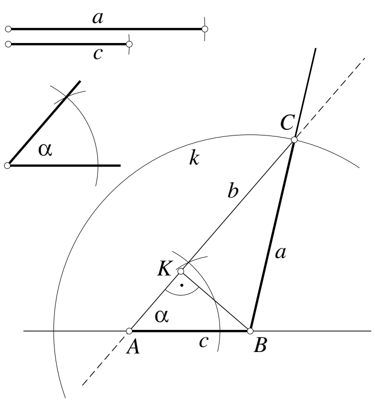
Konstruirajte trokut kojemu je zadana jedna stranica i oba uz nju priležeća kuta.

Zadajmo dakle prema 3. teoremu o sukladnosti stranicu $\overline{AB}$ i oba uz tu stranicu priležeća kuta $\alpha$ i $\beta$ ( $\alpha+\beta<180^\circ$ ). Konstruirajmo najprije stranicu $\overline{AB}$ na odabranom mjestu i prenesimo zadane kutove $\alpha$ i $\beta$ na tu stranicu (sl. 1.16). Vrh $C$ je tada sjecište drugih krakova tih kutova.

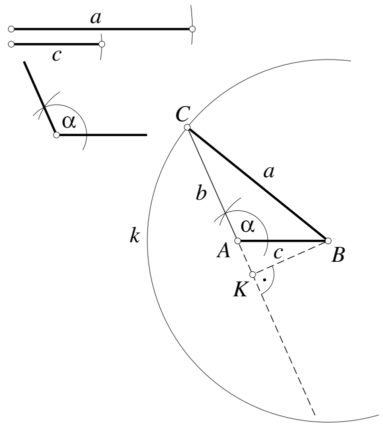
**4. temeljna konstrukcija trokuta**

Konstruirajte trokut ako su mu zadane dvije stranice te kut koji se nalazi nasuprot veće stranice.

Neka su dakle zadane stranice $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ te kut $\alpha<90^\circ$ nasuprot veće stranice $\overline{BC}$. Konstruiramo najprije stranicu $\overline{AB}$ u odabranom položaju i prenesemo dani kut $\alpha$ na položaj uz vrh $A$ (sl. 1.17). Iz točke $B$ zatim položimo okomicu na drugi krak kuta $\alpha$. Nožište te okomice označimo sa $K$. Opišimo još kružnicu $k$ sa središtem u točki $B$ i polumjerom $a=|BC|$. Sjecište $C$ drugog kraka $AK$ kuta $\alpha$ i kružnice $k$ je treći vrh traženog trokuta $ABC$.



*Sl. 1.17. Četvrta konstrukcija trokuta*



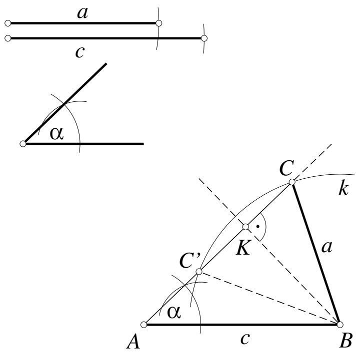
*Sl. 1.18. Ista konstrukcija, s tupim kutom $\alpha$*

Na sl. 1.18 je riješen isti zadatak, samo što je sada $\alpha>90^\circ$ tupi kut.

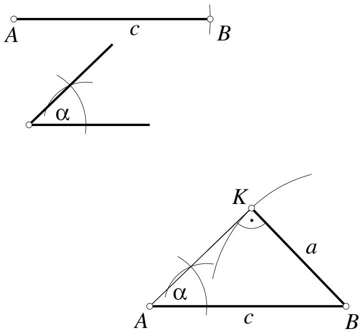
Ovdje možemo razlikovati nekoliko slučajeva:

**1.** $a>c$. Taj slučaj je upravo riješen na slikama 1.17 i 1.18. On točno odgovara četvrtom teoremu o sukladnosti trokuta.

**2.** $c>a$. Riješimo ovaj zadatak na potpuno analogan način kao i prethodni (sl. 1.19). Ovdje je odmah vidljivo da dva rješenja $ABC$ i $ABC'$ postoje točno onda ako je $\alpha<90^\circ$ i $a>|BK|$, a jedno rješenje postoji onda ako je $\alpha<90^\circ$ i $a=|BK|$. Rješenje je tada pravokutan trokut $ABK$ (sl. 1.20).

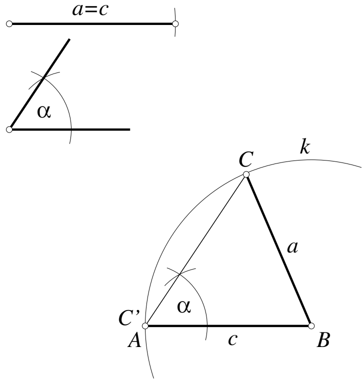



*Sl. 1.19.*




*Sl. 1.20.*

**3.** $c = a$. Prema sl. 1.21 slijedi da uz $\alpha < 90^\circ$ postoji samo jedno rješenje. To rješenje je jednakokračan trokut.




*Sl. 1.21.*

**4.** $c > a$ i $a < |BK|$. Nema rješenja.

Napomenimo ovdje da samo slučaj 1 odgovara 4. teoremu o sukladnosti.

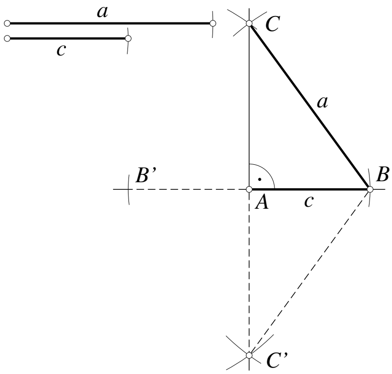
Ovdje se također vidi da ako je $\alpha$ oštar kut tada postoje rješenja za $a \geqslant c$ i $c > a \geqslant |BK|$. Ako je $\alpha$ tupi ili pravi kut, tada mora biti $a > c$ i tada postoji točno jedno rješenje.

* * *

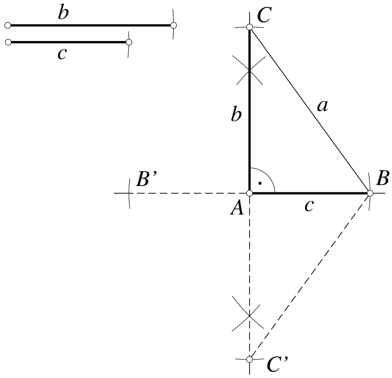
Ako neki trokut zadamo pomoću stranica $a$, $c$ i kuta $\alpha$ i uzmemo još da je $\alpha$ pravi kut, tada dolazimo do ove dvije jednostavne konstrukcije pravokutnog trokuta.

**1.** Konstruirajte pravokutni trokut kojemu su dane kateta $\overline{AB}$, $c = |AB|$ i hipotenuza $\overline{BC}$, $a = |BC|$ $(a > c)$.

Prenesemo katetu $\overline{AB}$ u željeni položaj. U točki $A$ podignemo okomicu $b$ na tu katetu. Kružni luk oko središta $B$ s polumjerom $a = |BC|$ siječe okomicu $b$ u trećem vrhu $C$ traženog trokuta (sl. 1.22). Odmah je jasno da uz dani položaj katete $\overline{AC}$ postoje dva trokuta koji zadovoljavaju uvjete zadatka, ali su međusobno sukladni, pa zadatak ima jedno rješenje.




*Sl. 1.22. Konstrukcija pravokutnog trokuta s zadanom hipotenuzom i katetom*



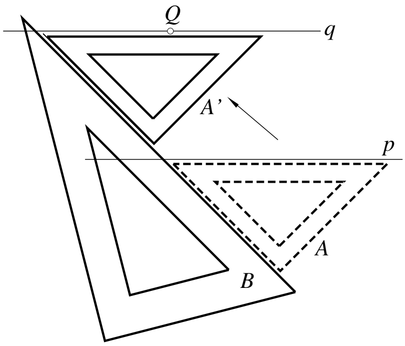

*Sl. 1.23. Konstrukcija pravokutnog trokuta s zadanim katetama*

**2.** Konstruirajte pravokutni trokut ako su mu zadane dvije katete $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$.

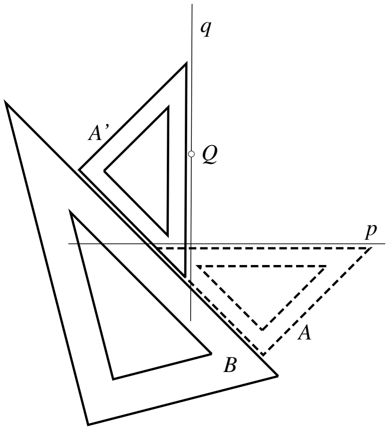
Prenesemo najprije katetu $\overline{AB}$ u željeni položaj. U točki $A$ podignimo okomicu $b$ na $AB$ i na tu okomicu nanesimo od točke $A$ duljinu $b = |AC|$. Tako dobijemo treći vrh $C$ traženog trokuta. I ovdje je odmah jasno da uz čvrsti položaj katete $\overline{AB}$ postoje dva trokuta $ABC$ i $ABC'$ (sl. 1.23), a budući su međusobno sukladni, zadatak ima jedno rješenje. Ova konstrukcija je očito utemeljena na 2. teoremu o sukladnosti trokuta. Tu su naime zadane dvije katete i kut (pravi) među njima.

## Geometrijske konstrukcije pomoću dva trokuta

Geometrijske konstrukcije (a isto tako i tehničke konstrukcije, odnosno crteže) izvodimo u praksi sa šestarom i dva trokuta. Jedan od ta dva trokuta je pravokutan i jednakokračan, dok je drugi pravokutan i raznostraničan (kutovi uz hipotenuzu su $30^\circ$ i $60^\circ$). Sigurno je da uporaba ovakva dva trokuta umjesto jednobridnog ravnala podosta pojednostavnjuje konstruiranje, no tu se odmah postavlja pitanje kako takve konstrukcije pomoću šestara i dva trokuta stoje u odnosu prema konstrukcijama pomoću ravnala i šestara. Odmah je jasno da se sve konstrukcije koje se mogu izvesti uporabom ravnala i šestara mogu izvesti također uporabom dva trokuta i šestara. To lako provjerimo time da izvedemo naše temeljne konstrukcije pomoću dva trokuta i šestara. Neke se od tih temeljnih konstrukcija izvedu mnogo jednostavnije nego samo s ravnalom i šestarom. Naime, ako hoćemo kroz neku točku $Q$ povući pravac $q$ koji je paralelan s danim pravcem $p$ (temeljna konstrukcija V.), to možemo izvesti paralelnim pomicanjem, trokuta $A$ uzduž hipotenuze trokuta $B$ (sl. 1.24).




*Sl. 1.24. Povlačenje paralele*




*Sl. 1.25. Spuštanje okomice*

Slično konstruiramo pravac kroz danu točku $Q$ koji je okomit na dani pravac $p$ (temeljna konstrukcija VI.). Sada moramo trokut $A$ zaokrenuti za $90^\circ$ i paralelno pomicati u položaj $A'$ kako je to na slici 1.25 prikazano.

Osim toga, s ovakva dva trokuta je lako konstruirati i kutove od $30^\circ$, $45^\circ$ i $60^\circ$. No, i to su konstrukcije koje lako izvedemo samo ravnalom i šestarom.

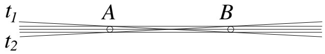
Iz svega ovoga slijedi da uporabom dva trokuta umjesto jednobridnog ravnala možemo izvesti točno sve one konstrukcije koje možemo izvesti samo jednobridnim ravnalom i šestarom.

Mi preporučamo uporabu dvaju trokuta pri izvođenju geometrijskih konstrukcija iz čisto praktičnih razloga, jer se mnoge konstrukcije dadu izvesti jednostavnije. S druge strane, one teorijski ne donose ništa novo, pa ćemo ih dalje nazivati konstrukcije pomoću ravnala i šestara.

## Točnost geometrijskih konstrukcija

Teorijski gledano, pravac je jednodimenzionalna geometrijska figura. Mogli bismo reći da pravac nema “širine”. Na crtežu pravac prikazujemo kao trag što ga čini olovka ili pero. No, takav trag je zapravo jedna “traka” širine 0.1–0.3 mm.

Isto tako točku prikazujemo u stvari “kružićem” promjera 0.4–0.8 mm.

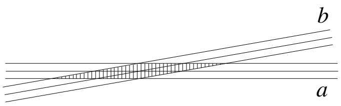



*Sl. 1.26. Netočnost položaja pravca povučenog kroz dvije točke*

K tome dodajmo još nesavršenost naših pomagala i netočnost procjena, pa kao posljedicu dobijemo geometrijsku konstrukciju (crtež) koja manje ili više odstupa od "idealne" geometrijske konstrukcije. Prirodno je da bismo htjeli da takvo odstupanje bude čim manje, odnosno da ne prelazi neku granicu. U tu svrhu trebali bismo se držati nekih pravila, koja omogućuju čim točnije crteže, a koja ćemo ovdje razmotriti.

Ako hoćemo spojiti dvije dane točke $A$ i $B$ pravcem $p$, prislonimo ravnalo uz te dvije točke i povučemo pravac, kako je to na slici 1.26 prikazano uvećano. Pogreška pri prislanjanju ravnala može biti takva da spojnica leži negdje unutar područja između dvije zajedničke tangente $t_1$ i $t_2$ točaka (kružića) $A$ i $B$. Idealna spojnica bi pri tom bila spojnica središta kružića $A$ i $B$. Spomenuto područje bi se svakako povećavalo ako bismo zamislili udaljenost između $A$ i $B$ sve manjom, što je na slici 1.26 očito. Iz toga odmah možemo zaključiti:

Ako hoćemo da pravac $p$ kao spojnica dvije točke $A$ i $B$ ima položaj čim točniji (čim bliži idealnom), tada moramo izbjegavati gdje god je to moguće spojnice vrlo blizih točaka $A$ i $B$.




*Sl. 1.27. Presjek dvaju pravaca*

Imamo dva pravca $a$ i $b$. Treba odrediti (uočiti) njihovo sjecište $P$. Gledamo li to povećano (kao na slici 1.27), tada se ta dva pravca (odnosno trake) sijeku u jednom rombu (na slici prikazanom crtkano). Ako se $a$ i $b$ sijeku pod pravim kutom tada je spomenuti romb zapravo kvadrat. U tom slučaju je lako i točnije odrediti sjecište. Ako se pak oni sijeku pod malim kutom, tada je spomenuti romb jako izdužen, pa je očito teže odrediti točan položaj sjecišta $P$. Slijedi dakle:

Želimo li položaj sjecišta dvaju pravaca odrediti (uočiti) čim točnije, tad moramo izbjegavati gdje god je to moguće sječenje pravaca pod malim kutom. Najbolje je ako ta dva pravca zatvaraju kut blizu pravome.

Na kraju primjetimo još samo da također treba izbjegavati crtanje kružnice s vrlo velikim ili vrlo malim otvorom šestara. Razlog tome je očit.