1.

Uvodni zadaci

1.1. Na stranici $\overline{AC}$ trokuta ABC uzeta je bilo koja točka D. Dokažite da vrijedi: $|AB| + |BC| < 2|BD| + |AC|$.

1.2. Dokažite da je duljina težišnice povučene iz jednog vrha trokuta manja od polovice zbroja duljina dviju stranica koje se sastaju u tom vrhu, a veća od razlike polovice toga zbroja i polovice treće stranice.

1.3. Za pravokutan trokut vrijedi *Pitagorin poučak*: Zbroj kvadrata duljina kateta jednak je kvadratu duljine hipotenuze trokuta. Dokažite poučak.

1.4. Za pravokutan trokut vrijedi *Euklidov poučak*:

– Duljina visine (na hipotenuzu) pravokutna trokuta jednaka je geometrijskoj sredini duljina odsječaka što ih ta visina čini na hipotenuzi;

– Duljina katete pravokutna trokuta jednaka je geometrijskoj sredini duljine hipotenuze i duljine ortogonalne projekcije te katete na hipotenuzu. Dokažite poučak.

1.5. Za paralelogram vrijedi *Eulerova relacija*:

Zbroj kvadrata duljina dijagonala jednak je zbroju kvadrata duljina stranica paralelograma.

a) Dokažite Eulerovu relaciju.

b) Izrazite duljine težišnica trokuta u funkciji duljina stranica trokuta.

c) Dokažite da je zbroj kvadrata duljina težišnica trokuta jednak $\frac{3}{4}$ zbroja kvadrata duljina stranica trokuta.

1.6. Točka K je polovište stranice $\overline{AB}$ kvadrata $ABCD$, a točka L dijeli dijagonalu $\overline{AC}$ u omjeru $3:1$. Dokažite da je $\sphericalangle KLD$ pravi.

1.7. Neka je T bilo koja točka unutar zadana trokuta. Dokazati da je zbroj udaljenosti točke T od dvaju vrhova trokuta manji od zbroja duljina dviju stranica trokuta koje se sastaju u trećem vrhu.

1.8. Dokazati da je zbroj duljina težišnica trokuta veći od poluopsega, a manji od opsega trokuta.

1.9. Zbroj duljina dijagonala konveksnog četverokuta veći je od poluopsega, a manji od opsega četverokuta. Dokažite tu tvrdnju.

1.10. Neka su P, Q, R, S polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ četverokuta $ABCD$. Dokazati da je četverokut $PQRS$ paralelogram.

1.11. Dokažite da su u četverokutu, bez para usporednih stranica, polovišta dijagonala i polovišta dviju nasuprotnih stranica, vrhovi paralelograma.

1.12. U paralelogramu $ABCD$ polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ su točke M i N. Dokažite da pravci AM i AN sijeku dijagonalu $\overline{BD}$ u točkama koje ju dijele na tri dijela jednakih duljina.

1.13. Neka je T bilo koja točka osnovice $\overline{AB}$ jednakokračna trokuta ABC. Dokažite da zbroj udaljenosti točke T od krakova trokuta ne ovisi o izboru točke T na stranici $\overline{AB}$.

1.14. Unutar konveksna n-terokuta $A_1A_2A_3...A_n$ uzmite bilo koju točku T i spojite je s vrhovima n-terokuta. Pomoću trokuta A_1A_2T, $A_2A_3T, \ldots A_nA_1T$ izračunajte zbroj unutarnjih kutova n-terokuta.

1.15. Dokažite da zbroj vanjskih kutova konveksna mnogokuta ne zavisi o broju stranica mnogokuta. Izračunajte taj zbroj.

1.16. Dokažite da je zbroj dvaju vanjskih kutova četverokuta jednak zbroju dvaju unutarnjih kutova koji nisu susjedni.

1.17. Na pravcu p konstruirane su točke Q, M, S, N, P, tako da je $|QN| = |MP| = a$, $|MN| = b$, a S polovište dužine $\overline{MN}$. Neka je O takva točka da je $|OQ| = |OP| = a$. Dokažite da je $|OM|$ geometrijska sredina duljina a i b.

1.18. Na stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC odredi točku D, tako da usporednica sa stranicom $\overline{BC}$ tom točkom siječe stranicu $\overline{CA}$ u točki E, za koju vrijedi $|DE| = |CE|$.

1.19. Zadana su dva usporedna pravca p_1 i p_2. Na p_1 su točke A i D, a na p_2 točke B i C, tako da je $\overline{AC} \perp p_2$ i $|ED| = 2|AB|$, gdje je E presjek pravca AC i BD. Dokažite da je $\sphericalangle EBC = \frac{1}{3}\sphericalangle ABC$.

1.20. Nađite nuždan i dovoljan uvjet da mjerni brojevi površine i opsega trokuta budu jednaki.

1.21. Zadan je trokut ABC, pravac p i točka M na stranici $\overline{BC}$. Vrhovima trokuta povuku se usporednice s p. Usporednica kroz A siječe pravac BC u D, a usporednice kroz B i C pravac AM u točkama E i F. Dokažite da trokuti DEF i ABC imaju jednake površine.

1.22. U konveksnom peterokutu $ABCDE$ točke K, L, M, N su polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$. Dokažite da je dužina koju određuju polovišta dužina $\overline{KM}$ i $\overline{LN}$ usporedna sa stranicom $\overline{AE}$ i da je njena duljina jednaka četvrtini duljine stranice $\overline{AE}$.

1.23. Zadan je pravac p i na njemu točke A, B, C, D (u tom poretku). Točkama A i B povuku se dvije usporednice, a točkama C i D druge dvije usporednice koje sijeku prve dvije i čine paralelogram. Dokažite da sjecišta dijagonala paralelograma i pravca p ne zavise o izboru usporednica kroz A i B, odnosno C i D.

1.24. Zadan je $\sphericalangle BAC$ i točka M unutar kuta. Točkama A i M prolazi bilo koja kružnica, koja krakove zadanog kuta siječe u točkama P i Q. Dokažite da omjer $|MP| : |MQ|$ ne ovisi o izboru kružnice.

1.25. Zadana je polukružnica i njen promjer $\overline{AB}$. Na polukružnici je uzeta točka C. Nad stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ konstruiraju se, izvan trokuta ABC, kvadrati $ADEB$, $BFGC$, $CHKA$. Dokažite:

a) Trokuti ABC, BEF, CGH, AKD imaju jednake površine.

b) Zbroj kvadrata duljina stranica šesterokuta $DEFGHK$ ne zavisi o izboru točke C.

1.26. Neka su $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CD}$ promjeri trokutu ABC opisane kružnice. Dokažite da je površina šesterokuta $ADBECF$ jednaka dvostrukoj površini trokuta ABC.

1.27. Nad katetama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ pravokutna trokuta ABC konstruirani su izvan trokuta kvadrati $ACDE$ i $BCFG$. Dokažite da se dužine $\overline{AG}$ i $\overline{BE}$ sijeku na visini $\overline{CH}$ trokuta ABC.

1.28. Pravac povučen iz vrha A trokuta ABC dijeli težišnicu povučenu iz vrha C u omjeru $3:2$ (računajući od vrha C). U kojem omjeru taj pravac dijeli stranicu $\overline{BC}$?

1.29. Okomice povučene iz jednog vrha trokuta na simetrale vanjskih kutova trokuta uz druga dva vrha sijeku pravac određen s ta dva vrha u dvjema točkama. Dokažite da je udaljenost tih dviju točaka jednaka opsegu trokuta.

1.30. Ako su a, b, c duljine stranica, a v_a, v_b, v_c duljne odgovarajućih visina trokuta, dokažite ekvivalenciju:

$$v_c = v_a + v_b \iff a \cdot b = c \cdot (a+b).$$

1.31. Zadan je trokut ABC. Nožišta visina iz vrhova A i B na pravce nasuprotnih stranica označimo s A_1 i B_1. Dokažite da simetrala dužine $\overline{A_1B_1}$ raspolavlja dužinu $\overline{AB}$.

1.32. U ravnini je zadan trokut ABC i pravac p. Dokažite da je zbroj udaljenosti vrhova A, B, C od pravca p jednak zbroju udaljenosti polovišta A_1, B_1, C_1 stranica trokuta od pravca p.

1.33. U pravokutnom trokutu ABC točka D je nožište visine spuštene na hipotenuzu $\overline{AB}$. Neka su M i N polovišta dužina $\overline{CD}$ i $\overline{BD}$. Dokažite da su pravci $\overline{AM}$, i $\overline{CN}$ međusobno okomiti.

1.34. Pravac p povučen vrhom C trokuta ABC raspolavlja težišnicu iz vrha A. U kojem omjeru taj pravac dijeli stranicu $\overline{AB}$?

1.35. Dokažite da se raznostraničan trokut ne može pravcem podijeliti na dva sukladna trokuta.

1.36. Dokažite da brojevi: $a\sqrt{c^2-b^2}$, $b\sqrt{c^2-a^2}$, c^2, ne mogu biti duljine stranica nekog trokuta ni za koje pozitivne brojeve a, b, c.

1.37. Dokažite da u trokutu postoji najviše jedna stranica čija je duljina manja od duljine pripadne visine.

1.38. Neka su a, b duljine kateta, a v visina pravokutna trokuta. Dokažite da su dužine duljina $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{b}$, $\dfrac{1}{v}$ stranice pravokutna trokuta.

1.39. U rubnim točkama dužine $\overline{AB}$ duljine $2a$ podignute su okomice Ax i By. Krakovi pravoga kuta s vrhom u polovištu dužine $\overline{AB}$ (O) sijeku Ax i By u točkama A_1 i B_1.

a) Dokažite da su dužine $\overline{OA_1}$ ($\overline{OB_1}$) simetrale kutova $\sphericalangle AA_1B_1$ ($\sphericalangle BB_1A_1$).

b) Dokažite da je $|A_1B_1| = |AA_1| + |BB_1|$.

c) Izračunajte $|OP|$, gdje je P nožište okomice iz O na $\overline{A_1B_1}$ i nađite veličinu kuta $\sphericalangle APB$.

1.40. Dokažite da postoji trokut čije su stranice jednake i usporedne s težišnicama zadanog trokuta. Nađite odnos površina tih trokuta.

1.41. U šiljastokutnom trokutu ABC ortocentar je u točki H. Izračunajte veličinu kuta $\sphericalangle BCA$, ako je $|AB| = |CH|$.

1.42. U trokutu ABC povučene su težišnice $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$. Kutovi $\sphericalangle CAD$ i $\sphericalangle CBE$ su jednaki i iznose po 30°. Dokažite da je trokut ABC jednakostraničan.

1.43. Dokažite da trokuti, koji se podudaraju u dvjema stranicama i imaju kuteve među tim stranicama suplementne, imaju jednake površine.

1.44. Svaki od dva slična nesukladna trokuta ima dvije stranice duljina 36 i 48. Izračunajte duljine nepoznatih stranica trokuta.

1.45. Zadana je kružnica i jedan njen polumjer $\overline{OA}$. Simetrala dužine $\overline{OA}$ siječe kružnicu u točkama P i Q. Dokažite da je luk $\overset{\frown}{PQ}$ jednak trećini cijele kružnice.

1.46. Zadan je pravac p i točka P izvan njega. Neka je $\mathscr{K}$ skup svih kružnica kojima je središte na p, a prolaze točkom P. Dokažite da postoji točka Q $(Q \neq P)$ kroz koju prolaze sve kružnice iz $\mathscr{K}$.

1.47. Zadana je kružnica $k(O;r)$ i njena točka C. Točka A je izvan kružnice takva da je $|AC| = r$. Sekanta $\overline{AC}$ siječe k u B, a sekanta $\overline{AO}$ u točkama D i E $(O \in \overline{AE})$. Dokažite da je $\sphericalangle BOE = 3\sphericalangle BAE$.

1.48. Dokažite da je trokut, kojemu su vrhovi dirališta bilo kojem trokutu upisane kružnice, šiljastokutan.

1.49. Zadana je kružnica k i jedan njen promjer $\overline{AB}$. Točka M je izvan kružnice k. Polupravci $\overline{MA}$ i $\overline{MB}$ sijeku kružnicu k u točkama C, odnosno, D. Dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ sijeku se u točki E. Dokažite da je dužina $\overline{ME}$ okomita na promjer $\overline{AB}$.

1.50. Kružnice k_1 i k_2 sijeku se u točkama A i B. Zajednička vanjska tangenta t dira k_1 u točki C, a k_2 u točki D. Izračunajte $\sphericalangle CAD + \sphericalangle CBD$.

1.51. Neka su $ABCD$, $BCEF$ i $EFGH$ kvadrati različiti kao skupovi. Dokažite da je $\sphericalangle AHD + \sphericalangle AED = \sphericalangle ACD$.

2.

Zadaci o trokutu

2.1. Zadan je pravokutan trokut ABC sa pravim kutom kod vrha C. Bilo koji pravac siječe katete $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ trokuta u točkama P i Q. Dokažite da vrijedi:

$$|AB|^2 + |PQ|^2 = |AP|^2 + |BQ|^2.$$

2.2. Duljine kateta pravokutna trokuta su a, b, duljina hipotenuze c, duljina visine na hipotenuzu je v. Dokažite da je trokut kome su duljine stranica $a+b$, v, $c+v$ također pravokutan.

2.3. Izrazite površinu pravokutna trokuta u funkciji duljine hipotenuze c i duljine polumjera upisane kružnice r.

2.4. Duljine kateta pravokutna trokuta su a i b, duljine ortogonalnih projekcija tih kateta na hipotenuzu su p i q. Nekq su m i n duljine ortogonalnih projekcija odsječaka duljina p i q na odgovarajuću katetu. Dokažite da je $m:n = a^3 : b^3$.

2.5. Središtem upisane kružnice trokuta ABC povučena je usporednica sa stranicom $\overline{AB}$, koja stranice $\overline{CA}$ i $\overline{CB}$ siječe u točkama P i Q. Dokažite da vrijedi:

$$|PQ| = |AP| + |BQ|.$$

2.6. Zadan je jednakokračan trokut ABC $(|AB| = |AC|)$. Odredite točku D tako da je A polovište dužine $\overline{BD}$. Dokažite da je trokut BCD pravokutan.

2.7. Izrazite duljine odsječaka što ih dirališta trokutu upisane kružnice čine na stranicama trokuta u funkciji duljina stranica trokuta.

2.8. Dokažite da je površina pravokutna trokuta jednaka umnošku odsječaka što ih diralište upisane kružnice trokuta čini na hipotenuzi.

2.9. Neka su a i b duljine kateta, a c duljina hipotenuze pravokutna trokuta opsega $2s$ i površine P. Dokažite da je: $s(s-c) = (s-a)(s-b) = P$.

2.10. Zadan je pravokutan trokut ABC. Katete $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ produlje se preko C do A_1 odnosno B_1, tako da je $|CB| = |CA_1|$ i $|CA| = |CB_1|$. Dokažite da su visina $\overline{CC_1}$ trokuta ABC i težišnica $\overline{CC_2}$ trokuta A_1B_1C na istom pravcu.

2.11. U jednakokračnom trokutu jedan kut iznosi 108°. Dokažite da je duljina simetrale kuta uz osnovicu jednak dvostrukoj duljini simtrale kuta nasuprot osnovici.

2.12. Točkom T stranice $\overline{AB}$ trokuta ABC povučene su usporednice s ostalim dvjema stranicama trokuta. Te usporednice sijeku stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ u točkama D i E i dijele trokut na dva trokuta i jedan paralelogram.

a) Izrazite površinu P trokuta ABC pomoću površina P_1 i P_2 trokuta ATD i TBE.

b) Dokažite da površina paralelograma ne može biti veća od polovice površine trokuta ABC.

2.13. Na kružnici k, opisanoj jednakostraničnom trokutu ABC, uzmite na luku AB (koji ne sadrži vrh C) bilo koju točku T. Dokažite da je:

$$|TC| = |TA| + |TB|.$$

2.14. Dokažite *poučak o simetrali unutarnjeg kuta trokuta*:
Simetrala unutarnjeg kuta trokuta povučena iz jednog vrha dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru duljina drugih dviju stranica. (Dokažite da poučak vrijedi u istovjetnom izričaju i za simetralu vanjskog kuta trokuta.)

2.15. Dokažite poučak (*Giovanni Ceva*):

Ako točke P, Q, R priradaju stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuta ABC, pravci AP, BQ, CR sijeku se u jednoj točki ako i samo ako vrijedi:

$$|AR| \cdot |BP| \cdot |CQ| = |BR| \cdot |CP| \cdot |AQ|.$$

2.16. Dokažite poučak (*Menelaj Aleksandrijski*): Ako pravac p siječe pravce BC, CA, AB stranica trokuta ABC u točkama P, Q, R, tada i samo tada vrijedi

$$|AR| \cdot |BP| \cdot |CQ| = |BR| \cdot |CP| \cdot |AQ|.$$

2.17. Kut CAB trokuta ABC je 60°. Dokažite da su polovište stranice $\overline{BC}$ i nožišta visina iz vrhova B i C, vrhovi jednakostranična trokuta.

2.18. Ako su A_0, B_0, C_0 dirališta trokutu ABC upisane kružnice i stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, dokažite da se dužine $\overline{AA_0}$, $\overline{BB_0}$, $\overline{CC_0}$ sijeku u jednoj točki.

2.19. Dokažite da je udaljenost ortocentra trokuta od vrha trokuta jednaka dvostrukoj udaljenosti središta opisane kružnice od stranice nasuprot tome vrhu.

2.20. Neka su B_1 i C_1 nožišta visina povučenih iz vrhova B odnosno C trokuta ABC. Dokažite da simetrala dužine $\overline{B_1C_1}$ raspolavlja stranicu $\overline{BC}$.

2.21. Zadan je pravokutan trokut ABC s hipotenuzom $\overline{AB}$ i točkom D na kateti $\overline{CA}$.
a) Dokažite: ako je $|BD|^2 = |AD| \cdot |CD|$, tada je $|AD|^2 = |AB|^2 - 3|BD|^2$.
b) Provjerite vrijedi li obrat tvrdnje a).

2.22. Dokažite sljedeće tvrdnje: Trokut je pravokutan ako
a) je kut između visine i težišnice iz jednog vrha jednak razlici unutarnjih kuteva trokuta kod druga dva vrha
b) visina i težišnica povučene iz jednog vrha zatvaraju sa stranicama u tom vrhu sukladne kutove
c) simetrala jednog unutarnjeg kuta trokuta raspolavlja kut između visine i težišnice iz vrha toga kuta.

2.23. Na krakovima pravoga kuta s vrhom u točki O uzete su točke A i B, tako da je $|OA| = |OB|$. Na kružnom luku AB sa središtem u O uzeta je po volji točka P, kojom se povuče pravac usporedan sa $\overline{AB}$. Taj pravac siječe $\overline{OA}$ u C, a $\overline{OB}$ u D. Dokažite da vrijedi $|PC|^2 + |PD|^2 = |AB|^2$.

2.24. Zadan je pravokutan trokut ABC s pravim kutom kod vrha C. Nad katetama $\overline{CA}$, $\overline{CB}$ konstruirani su izvan trokuta kvadrati $CDEA$, $CBFK$.
a) Dokažite da su točke C, E, F leže na jednom pravcu

b) Dokažite da pravac visine $\overline{CC_1}$ zadanog trokuta raspolavlja dužinu $\overline{DK}$.

2.25. U pravokutnom trokutu simetrala pravog kuta raspolavlja kut između težišnice i visine povučenih iz vrha pravog kuta. Dokažite tu tvrdnju.

2.26. Težišnica povučena iz vrha pravog kuta pravokutna trokuta dijeli pravi kut u omjeru 1:2 i ima duljinu m. Odredite duljine stranica trokuta.

2.27. U pravokutnom trokutu ABC točka D je nožište visine spuštene na hipotenuzu $\overline{AB}$. Polovišta dužina $\overline{AD}$ i $\overline{BD}$ su točke P i Q. Dokažite da ortocentar trokuta PQC dijeli visinu $\overline{CD}$ u omjeru $3:1$.

2.28. Ako je M bilo koja točka hipotenuze $\overline{AB}$ pravokutna trokuta ABC, a P, Q njene ortogonalne projekcije na katete $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, dokažite da vrijedi:

a) $\dfrac{|PB|^2}{|MB|^2} + \dfrac{|QA|^2}{|MA|^2} = 1$,

b) $|MA| \cdot |MB| = |PB| \cdot |PC| + |QA| \cdot |QC|$.

2.29. Zadan je pravokutan trokut ABC s pravim kutem kod vrha C. Visina i simetrala kuta iz vrha C sijeku stranicu $\overline{AB}$ u točkama D i E. Simetrala kuta $\sphericalangle ADC$ siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki K, a simetrala kuta $\sphericalangle BDC$ stranicu $\overline{BC}$ u točki L. Dokažite da je $|KL| = |CE|$.

2.30. Izračunajte omjer duljina stranica jednakostraničnog trokuta upisanog i opisanog zadanoj kružnici.

2.31. Zadan je jednakokračan trokut ABC, $|AB| = |AC|$. Okomica podignuta u točki P stranice $\overline{BC}$ na stranicu $\overline{BC}$ siječe pravace AB i AC u točkama M i N. Dokažite da zbroj $|PM| + |PN|$ ne zavisi o izboru točke P.

2.32. U jednakokračnom trokutu ABC ($|AC| = |BC|$), točka D je polovište stranice $\overline{AC}$, a O središte trokutu ABC opisane kružnice. Točka T je težište trokuta BDC. Dokažite da su pravci BD i TO međusobno okomiti.

2.33. U jednakokračnom trokutu ABC, ortogonalna projekcija polovišta D stranice $\overline{AB}$ na krak $\overline{BC}$ je točka E. Dokažite da je pravac koji prolazi vrhom C i polovištem F dužine $\overline{DE}$ okomit na pravac AE.

2.34. Izvan zadanog paralelograma $ABCD$ konstruirani su međusobno slični jednakokračni trokuti ABB_1 i CBC_1. Dokažite da je trokut DB_1C_1 također sličan trokutima ABB_1 i CBC_1.

2.35. U pravokutnom trokutu ABC, D je polovište hipotenuze $\overline{AB}$, a S je središte trokutu upisane kružnice. Izračunajte šiljaste kutove trokuta ABC, ako je $|CS| = |DS|$.

2.36. Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ trokuta ABC uzete su točke D i E, tako da je $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Ako je S sjecište dijagonala četverokuta $BCED$, dokažite da je AS pravac težišnice trokuta ABC.

2.37. U jednakokračnom trokutu ABC ($|CA| = |BC|$) visina $\overline{AA_1}$ dijeli kut $\sphericalangle CAB$ u omjeru $1:2$ (računajući od osnovice $\overline{AB}$). Dokažite da je $|CH| = |AB|$, gdje je H ortocentar trokuta ABC.

2.38. U pravokutan trokut ABC upišite pravokutnik, tako da mu na svakoj kateti leže dva, a na hipotenuzi jedan vrh i da zbroj kvadrata duljina stranica pravokutnika bude najmanji.

2.39. U vrhovima A i B jednakostranična trokuta ABC podignute su okomice Ax i By na $\overline{AB}$ u istoj poluravnini u kojoj je i vrh C. Vrhom C povuče se pravac koji okomice Ax i By siječe u točkama M i N. Točka S je sjecište simetrale dužine $\overline{MN}$ i stranice $\overline{AB}$.

a) Dokažite da je trokut SNM jednakostraničan.

b) Izrazite površinu trokuta MNS, pomoću duljine stranice trokuta ABC i veličine kuta $\sphericalangle ACS = \varphi$.

2.40. Dva jednakokračna trokuta imaju osnovice jednakih duljina. Veličine kuteva nasuprot osnovicama odnose se kao $2:1$. Dokažite da za površine trokuta vrijedi $P_2 > 2P_1$.

2.41. Točka D dijeli osnovicu $\overline{AB}$ jednakokračnog trokuta ABC na dva dijela:

$|AD| = p$ i $|BD| = q$ (p<q). Trokutima ADC i DBC su upisane kružnice, koje zajedničku stranicu $\overline{CD}$ diraju u točkama E i F. Izrazi udaljenost $|EF|$ u funkciji p i q.

2.42. Dokažite da točke simetrične ortocentru s obzirom na stranice šiljastokutnog trokuta pripadaju kružnici opisanoj trokutu.

2.43. Ako su a, b, c duljine stranica trokuta, a za kuteve α, β vrijedi $\alpha - \beta = 90^\circ$, dokažite da je tada: $(a^2 - b^2)^2 = c^2 \cdot (a^2 + b^2)$. (Ovakav se trokut zove pseudopravokutan.)

2.44. Pod duljinom simetrale unutarnjeg kuta trokuta podrazumijevat ćemo duljinu odsječka te simetrale od vrha do sjecišta s nasuprotnom stranicom. Izrazite duljine simetrala kutova trokuta pomoću duljina stranica trokuta.

2.45. Dokažite: Ako je u trokutu duljina težišnice iz jednog vrha jednaka polovici nasuprotne stranice, tada je kut kod tog vrha jednak zbroju druga dva kuta, tj. trokut je pravokutan.

2.46. Simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli nasuprotnu stranicu na dvije dužine. Dokažite da je duljina svake od tih dužina manja od duljine stranice trokuta, koja s tom dužinom ima zajednički vrh.

2.47. Duljina visine pravokutnog trokuta je v. Udaljenost nožišta te visine od kateta trokuta su x i y. Dokažite da vrijedi $v^3 = cxy$, gdje je c duljina hipotenuze trokuta.

2.48. Izrazite udaljenost sjecišta simetrala unutarnjih kutova uz osnovicu s krakovima jednakokračna trokuta pomoću duljina stranica trokuta.

2.49. U trokutu ABC uzete su na stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ točke M, N tako da je $|AM| = |BN|$ i $\overline{MN} \| \overline{AC}$. Izrazite $|MN|$ pomoću duljina stranica trokuta.

2.50. Dokažite:

Središte trokutu upisane kružnice dijeli simetralu kuta trokuta u omjeru duljine odgovarajuće stranice i zbroja duljina drugih dviju stranica.

2.51. U trokutu ABC zadane su duljine stranica $|BC| = a$, $|AB| = c$. Izračunajte duljinu treće stranice, ako se zna da je kut pri vrhu C jednak polovici kuta pri vrhu B.

2.52. Neka su m i n odsječci što što ih čine simetrala unutarnjeg kuta trokuta ABC povučena iz vrha C, na stranici $\overline{AB}$. Izrazite m i n u funkciji duljina stranica trokuta a, b, c.

2.53. Dva su kuta u jednom trokutu α, β, a dva kuta drugog trokuta su $\alpha, 180^\circ - \beta$. Dokažite da su stranice tih trokuta nasuprot jednakim kutovima razmjerne stranicama nasuprot suplementnim kutovima.

2.54. U trokutu ABC zadana je težišnica $\overline{AE}$. Točkom D stranice $\overline{BC}$ povuče se usporednica s $\overline{AE}$, koja stranicu $\overline{AB}$ siječe u točki F, a produžetak stranice $\overline{CA}$ u točki G. Dokažite da $|DF| + |DG|$ ne zavisi o izboru točke D.

2.55. Iz vrha C trokuta ABC povučena je simetrala kuta $\overline{CD}$ $(D \in \overline{AB})$. Usporednica s $\overline{CA}$ kroz D siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki E. Izrazite $|DE|$ u funkciji duljina stranica trokuta ABC.

2.56. Ako je O ortocentar trokuta ABC, izračunaj $\sphericalangle BOC + \sphericalangle BAC$.

2.57. U trokutu ABC zadani su kutovi $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCA = \gamma$. Izračunajte kut φ što ga zatvaraju visina i simetrala kuta kod vrha A.

2.58. U trokutu ABC Točka O polovište je težišnice $\overline{CC_1}$. Usporednica s $\overline{BC}$ točkom O siječe stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ u točkama D i E. Dokažite da je omjer $|DC| : |DA|$ stalan.

2.59. Dužina kojoj su rubne točke u jednom vrhu i na suprotnoj stranici trokuta, raspolavlja težišnicu iz jednog od druga dva vrha.

a) U kojem omjeru ta dužina dijeli stranicu trokuta?

b) U kojem omjeru sjecište te dužine i težišnice dijeli samu dužinu?

2.60. Dokažite: Ako je duljina visine trokuta jednaka duljini pripadne stranice, tada su opsezi svih pravokutnika upisanih u trokut kojima su dva vrha na toj stranici međusobno jednaki.

2.61. U trokutu ABC povučene su visine $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$. Dokažite da su trokuti ABC, AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 slični.

2.62. Na stranici $\overline{AB}$ jednakostraničnog trokuta ABC, polumjera opisane kružnice duljine r, uzeta je točka D tako da je $|AD| = \dfrac{|AB|}{3}$, a na stranici $\overline{BC}$ točka E, tako da je $|BE| = \dfrac{|BC|}{3}$. Dokažite da je $|DE| = r$.

2.63. Zadani su trokuti ABC i $A_1B_1C_1$, tako da je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A_1B_1C_1 = \beta$ i $\sphericalangle CAB = \alpha = 180^\circ - \sphericalangle C_1A_1B_1$. Dokažite da za stranice trokuta vrijedi:

$$|BC| \cdot |B_1C_1| = |CA| \cdot |C_1A_1| + |AB| \cdot |A_1B_1|.$$

2.64. Polovištem M stranice $\overline{AB}$ trokuta ABC povučena je usporednica sa simetralom kuta $\sphericalangle ACB$. Ta usporednica siječe pravce BC i AC u točkama D i E. Dokažite da je $|BD| = |AE|$.

2.65. Kutovi α, β, γ trokuta ABC zadovoljvaju relaciju $2\gamma = \alpha - \beta$.

a) Dokažite da je α tup kut.

b) Na produžetku stranice $\overline{AB}$ preko A konstruirajte točku E, tako da je $|EC| = |CA|$, te dokažite da je $\overline{CA}$ simetrala kuta $\sphericalangle ECB$.

c) Dokažite da duljine stranica trokuta a, b, c zadovoljavaju relaciju $c^2 = a \cdot (a - b)$.

2.66. Težištem jednakostranična trokuta povučen je pravac koji ne sadrži niti jedan vrh trokuta. Dokažite da je zbroj udaljenosti dvaju vrhova koji se nalaze s iste strane pravca jednak udaljenosti trećeg vrha od pravca.

2.67. Ortocentar trokuta dijeli svaku visinu na dva odsječka. Dokažite da je umnožak duljina odsječaka na svakoj visini stalan.

2.68. Dokažite: ortocentar H, težište T i središte opisane kružnice S trokuta leže na istom pravcu, tako da T dijeli dužinu $\overline{HS}$ u unutarnjem omjeru $2:1$ (taj se pravac zove *Eulerov* pravac.)

2.69. Zadan je kosokutan trokut ABC s najduljom stranicom $\overline{AB}$ ($|AB| = c$). Na stranici $\overline{AB}$ odabrana je točka D, tako da je $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BAC = \alpha$. Označimo li $|CD| = s$, $|BD| = p$, dokažite da vrijedi: $a = \sqrt{pc}$, $s = \dfrac{ab}{c}$.

2.70. Trokut kojemu su vrhovi nožišta visina zadanog trokuta zove se pripadni nožišni trokut. Dokažite: visine trokuta su simetrale unutarnjih kutova pripadnog nožišnog trokuta.

2.71. Nuždan i dovoljan uvjet da je jedan kut u trokutu jednak 45° jest da je pripadni nožišni trokut pravokutan. Dokažite tu tvrdnju.

2.72. Neka su M i N nožišta okomica povučenih iz vrha A na simetrale vanjskih kutova pri vrhovima B i C trokuta ABC. Dokažite da je udaljenost $|MN|$ jednaka poluopsegu trokuta ABC.

2.73. U šiljastokutnom trokutu ABC, polovište visine $\overline{CC_1}$ je točka $D(C_1 \in \overline{AB})$, a ortocentar H trokuta je polovište dužine $\overline{DC_1}$. Dokažite da je kut $\sphericalangle ADB$ pravi.

2.74. Nad visinama trokuta kao promjerima konstruiraju se polukružnice. Dužine okomite na visine imaju rubove u ortocentru i na pripadnoj polukružnici. Dokažite da te dužine imaju stalnu duljinu.

2.75. Dokažite: ako je razlika veličina kutova uz jednu stranicu trokuta jednaka 90°, tada je visina trokuta na tu stranicu jednaka geometrijskoj sredini odsječaka što ih ta visina čini na pravcu te stranice.

2.76. Dokažite da spojnica nožišta dviju visina trokuta odsijeca od trokuta njemu sličan trokut.

2.77. Polupravac s početkom u ortocentru trokuta, a koji prolazi polovištem jedne stranice trokuta siječe kružnicu opisanu tom trokutu u istoj točki u kojoj i promjer komu je jedna rubna točka suprotni vrh toj stranici. Dokažite tu tvrdnju.

2.78. Iz vrha A trokuta ABC povuku se težišnica t, simetrala kuta s i visina v. Neka je $\sphericalangle(t,s) = \varphi$ i $\sphericalangle(s,v) = \varepsilon$.

Dokažite: ako je $\varphi < \varepsilon$, trokut je šiljastokutan; ako je $\varphi = \varepsilon$, trokut je pravokutan, a ako je $\varphi > \varepsilon$, trokut je tupokutan.

2.79. Na različitim stranama pravca AB su točke C i D takve da trokuti ABC i ABD imaju jednake površine. Dokažite da pravac AB raspolavlja dužinu $\overline{CD}$.

2.80. U unutrašnjosti trokuta ABC zadana je točka M, takva da je $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MCB$ i $\sphericalangle MBA = \sphericalangle MCA$. Dokažite da je točka M time jednoznačno određena i odredite tu točku.

2.81. Dokažite da su polovišta dviju stranica trokuta i ortogonalna projekcija vrha u kojem se sastaju te dvije stranice , na simetralu kuta jednog od dva preostala vrha , kolinearni.

2.82. Točke A_1, B_1, C_1 su polovišta stranica trokuta ABC, a A_0, B_0 C_0 su nožišta visina trokuta iz vrhova A, B, C. Dokažite da je duljina izlomljene crte $A_1B_0C_1A_0B_1C_0A_1$ jednaka opsegu trokuta ABC.

2.83. U trokutu ABC kut pri vrhu C dva puta je veći od kuta pri vrhu B. Simetrala kuta pri vrhu C siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki D. Dokažite da vrijedi: $|AC|^2 = |AD| \cdot |AB|$.

2.84. Neka je M bilo koja točka unutar jednakostranična trokuta ABC, a A_1, B_1, C_1 ortogonalne projekcije točke M na stranicu $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AC}$. Dokažite da zbroj $|AC_1| + |BA_1| + |CB_1|$ ne zavisi o izboru točke M.

2.85. Nad stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ trokuta ABC konstruirani su (izvan trokuta) kvadrati $BDEC$ i $ACFG$. Dokaži da se pravci AD, BG i visina $\overline{CK}$ trokuta ABC sijeku u jednoj točki.

2.86. U trokutu su zadane duljina jedne stranice i veličina nasuprotnog kuta. Dokažite da udaljenost nožišta visina trokuta iz vrhova koji određuju poznatu stranicu ne zavisi o položaju trećeg vrha.

2.87. U unutrašnjosti šiljastokutnog trokuta ABC zadana je točka P, tako da je $\sphericalangle APB = \sphericalangle ACB + 60°$, $\sphericalangle BPC = \sphericalangle BAC + 60°$, $\sphericalangle CPA = \sphericalangle CBA + 60°$. Pravci AP, BP, CP sijeku kružnicu opisanu trokutu ABC u točkama A_1, B_1, C_1 (različitim od vrhova A, B, C). Dokažite da je trokut $A_1B_1C_1$ jednakostraničan.

2.88. Ako je $k_1(O_1; r)$ upisana, a $k_2(O_2; R)$ opisana kružnica trokuta, dokažite da je: $|O_1O_2| = \sqrt{R(R-2r)}$.

2.89. U trokutu ABC visine spuštene na stranice $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ nisu manje od odgovarajućih stranica. Odredite kutove trokuta.

2.90. Zadan je trokut ABC kojemu su S_1, S_2 središta upisane odnosno opisane kružnice. Dokažite da je veličina kuta kojemu je vrh u jednom vrhu trokuta, a krakovi mu prolaze kroz S_1 odnosno S_2 jednaka polovici razlike veličina unutarnjih kutova trokuta kod druga dva vrha.

2.91. Dokažite: pravac koji prolazi središtem trokutu upisane kružnice i jednim vrhom trokuta siječe tom trokutu opisanu kružnicu u točki koja je središte opisane kružnice trokuta kojemu su vrhovi preostala dva vrha i središte upisane kružnice polaznog trokuta.

2.92. Zadan je trokut ABC stranica duljina a, b, c. Ako se stranice trokuta produlje, preko oba vrha, za duljinu stranice nasuprotne tome vrhu, dobije se šesterokut.

a) Dokažite da su po dvije nasuprotne stranice toga šesterokuta usporedne.

b) Dokažite da se šesterokutu može opisati kružnica i da se njezino središte poklapa sa središtem zadanome trokutu upisane kružnice.

c) Izrazite polumjer opisane kružnice šesterokuta u funkciji a, b, c.

2.93. Dokažite da polovišta stranica pravokutna trokuta, vrh trokuta kod pravog kuta te nožište visine na hipotenuzu leže na jednoj kružnici.

2.94. Zadan je trokut ABC. Neka su A_1, B_1 nožišta visina iz vrhova A, B, a A_2, B_2 sjecišta pravaca tih visina s kružnicom k opisanom trokutu ABC, sa središtem u O.

a) Dokažite: $\sphericalangle CB_1A_1 = \sphericalangle ABC$; $\sphericalangle CA_1B_1 = \sphericalangle CAB$.

b) Dokažite : $\overline{A_2B_2} \perp \overline{OC}$.

c) Dokažite da je $\overline{A_1B_1}$ usporedno sa tangentom na k u C.

2.95. U trokutu ABC nožišta visina na suprotnim stranicama su A_1, B_1, C_1. Središte trokutu opisane kružnice je O, a duljina njenog polumjera je R.

a) Dokažite da je $\overline{OA} \perp \overline{B_1C_1}$.

b) Izračunajte površinu trokuta ABC u funkciji R i opsega trokuta $A_1B_1C_1$.

2.96. Zadan je trokut ABC i jedna njegova unutarnja točka M. Iz M su povučeni polupravci okomiti na stranice trokuta. Na tim se polupravcima uzmu odsječci s jednim rubom u M čije su duljine jednake duljinama odgovarajuće stranice. Izrazite površinu trokuta čiji su vrhovi drugi rubovi tih odsječaka pomoću površine trokuta ABC.

2.97. Stranica $\overline{BC}$ trokuta ABC podijeljena je točkama M i N na tri dijela jednakih duljina ($|BM| = |MN| = |NC|$). Neka je P točka dužine $\overline{MN}$. Usporednice s $\overline{PA}$ točkama M i N sijeku stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ u točkama D i E. Dokažite da dužine $\overline{PD}$ i $\overline{PE}$ dijele trokut na tri dijela jednakih površina.

2.98. Zadan je trokut ABC i pravac p, koji s trokutom nema zajedničkih točaka. Neka su M, N, P polovišta okomica spuštenih iz vrhova A, B, C na pravac p. Dokažite da je površina trokuta MNP jednaka polovici površine trokuta ABC.

2.99. U trokutu ABC je $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC + 90^\circ$.

a) Dokažite da visina iz vrha C trokuta ABC leži na tangenti zadanom trokutu opisane kružnice.

b) Dokažite da su duljine simetrala unutarnjeg i vanjskog kuta kod vrha C trokuta ABC međusobno jednake.

c) Dokažite da za duljine stranica $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ vrijedi:

$$c = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

2.100. Dokažite da za trokut vrijedi *Stewartov* poučak: Ako su u trokutu ABC duljine stranica a, b, c, a D bilo koja točka stranice $\overline{BC}$, tada vrijedi: $a \cdot (d^2 + mn) = b^2 m + c^2 n$, gdje je $d = |AD|$, $m = |BD|$, $n = |DC|$.

2.101. Dokažite da od svih trokuta sa zadanom stranicom i njoj pripadnom visinom, najmanji opseg ima jednakokračan trokut.

2.102. U jednakokračnom trokutu ABC ($|AB| = |AC|$) povučena je simetrala kuta $\sphericalangle ABC$ koja stranicu $\overline{CA}$ siječe u točki D. Okomica na tu simetralu u točki D siječe pravac BC u točki E. Dokažite da je $|BE| = 2 \cdot |DC|$.

2.103. Unutar trokuta ABC uzeta je točka P tako da je $\sphericalangle PAC = \sphericalangle PBC$. Nožišta okomica povučenih iz točke P na stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ su točke M i N. Dokažite da je $|DM| = |DN|$, gdje je D polovište stranice $\overline{AB}$.

2.104. Visine trokuta ABC su $\overline{AA_0}$, $\overline{BB_0}$, $\overline{CC_0}$, a njegov ortocentar je točka H. Dokažite da je zbroj $\dfrac{|AH|}{|AA_0|} + \dfrac{|BH|}{|BB_0|} + \dfrac{|CH|}{|CC_0|}$ stalan.

2.105. Zadan je trokut ABC. Na polupravcu BA uzme se točka D tako da je $|BD| = |AC|$. Točke E i F su polovišta dužina $\overline{BC}$ odnosno $\overline{AD}$. Izračunajte kut pravaca EF i AC (u funkciji veličine unutarnjih kutova trokuta ABC).

2.106. Zadan je pravokutan trokut ABC s pravim kutom pri vrhu C, kojeg visina iz vrha C dijeli na dva trokuta. Dokažite da je spojnica središta tim trokutima upisanih kružnica okomita na simetralu pravog kuta zadana trokuta.