1. Skup kompleksnih brojeva

1.1. Skupovi brojeva

Ne postoji kvadratni korijen negativnog broja,
jer negativan broj nije kvadrat

Bhaskara, 12. stoljeće

Tijekom školovanja upoznali smo različite skupove brojeva. Bili su to skup prirodnih brojeva $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, skup cijelih brojeva $\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, skup racionalnih brojeva $\mathbf{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N}\}$, skup realnih brojeva $\mathbf{R}$ koji dobivamo ako skupu racionalnih dodamo iracionalne brojeve. Znamo također da vrijedi $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

Naučili smo i četiri osnovne algebarske operacije: zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje. Istaknimo sljedeća tri svojstva koja vrijede za operacije zbrajanja i množenja u bilo kojem gore navedenom skupu brojeva.

1) Komutativnost zbrajanja i množenja

$$x + y = y + x, \qquad x \cdot y = y \cdot x. \tag{1}$$

2) Asocijativnost zbrajanja i množenja

$$x + (y + z) = (x + y) + z, \qquad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z. \tag{2}$$

3) Distributivnost množenja prema zbrajanju

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z. \tag{3}$$

* * *

Proširenja skupova brojeva

Opišimo razloge radi čega i način na koji prelazimo od jednostavnijeg skupa brojeva na složeniji.

Svakako su najjednostavniji i temeljni brojevi **prirodni brojevi** koji nam služe u postupku *prebrojavanja*. Svakom nepraznom konačnom skupu brojanjem možemo odrediti broj njegovih elemenata.

Prirodne brojeve možemo zbrajati: time određujemo broj elemenata u dva (ili više) disjunktna skupa. Njih znamo množiti: time određujemo broj elemenata u uniji nekoliko jednakobrojnih disjunktnih skupova. Znamo da će zbroj dvaju prirodnih brojeva ponovo biti prirodan broj. Isto tako, umnožak dvaju prirodnih brojeva ponovo je prirodan broj. Kažemo da je skup $\mathbf{N}$ **zatvoren** za operacije zbrajanja i množenja.

Druge dvije operacije, oduzimanje i dijeljenje, nije moguće uvijek izvesti u skupu $\mathbf{N}$. Tako, na primjer, za prirodne brojeve m i n broj $m-n$ bit će prirodan samo ako je $m>n$. To znači da jednadžba

$$x+n=m \tag{4}$$

nema uvijek rješenje u skupu prirodnih brojeva. Kažemo da jednadžba (4) *nije uvijek rješiva u skupu* $\mathbf{N}$.

Dakako da mi znamo riješiti takvu jednadžbu. Tako, na primjer, jednadžba $x+4=3$ ima kao rješenje broj $x=-1$. Međutim, broj -1 *nije prirodan broj*. Da bismo mogli oduzeti bilo koja dva prirodna broja, skup $\mathbf{N}$ moramo *proširiti* do novog skupa brojeva. Taj veći skup mora obuhvaćati nulu i sve brojeve oblika $-x$, gdje je x prirodan broj. Mi znamo da je to skup cijelih brojeva $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3\ldots\}.$$

Skup $\mathbf{Z}$ dobivamo zahtijevajući da vrijede sljedeća tri svojstva:

Z_1) $\mathbf{Z}$ sadrži skup $\mathbf{N}$;
Z_2) broj -1 leži u skupu $\mathbf{Z}$;
Z_3) algebarske operacije zbrajanja i množenja zadovoljavaju svojstva (1)–(3).

Dovoljno je zahtijevati da broj -1 leži u novome skupu, odnosno, da je u njemu rješiva jednadžba $x+1=0$. Tad će, prema ostalim svojstvima i broj $(-1)+(-1)=-2$ ležati u skupu $\mathbf{Z}$, pa zatim i broj $(-2)+(-1)=-3$ itd.

* * *

Međutim, niti u ovom skupu nije uvijek moguće podijeliti dva broja. Već tako jednostavan problem kao što je dijeljenje skupa na dva jednaka dijela nije moguće izvesti pomoću cijelih brojeva. Općenitije, jednadžba

$$nx=m, \tag{5}$$

gdje su n i m cijeli brojevi, *nije uvijek rješiva* u skupu $\mathbf{Z}$.

Rješenja ove jednadžbe leže u novom skupu brojeva koji proširuje skup $\mathbf{Z}$. To je skup **racionalnih** brojeva $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{m}{n}:m\in\mathbf{Z},\ n\in\mathbf{N}\right\}.$$

U skupu racionalnih brojeva možemo zbrajati, oduzimati, množiti i dijeliti dva broja (osim dijeljenja s nulom) i rezultat će biti ponovno racionalan broj. Pritom operacije zbrajanja i množenja zadovoljavaju svojstva (1)–(3).

* * *

Operacija korjenovanja izvodi nas iz skupa racionalnih brojeva. Broj za koji vrijedi $x^2 = 2$ nije racionalan. Pozitivan broj koji zadovoljava tu jednadžbu jest $\sqrt{2}$. Njegov je decimalni prikaz beskonačan, a približna mu je vrijednost $\sqrt{2} = 1.414213\cdots$. $\sqrt{2}$ nazivamo **iracionalnim brojem**. Dodavajući skupu racionalnih brojeva sve iracionalne brojeve, dobit ćemo skup realnih brojeva $\mathbf{R}$. Pri tome u skupu $\mathbf{R}$ vrijede sva svojstva računskih operacija koja su vrijedila i u skupu $\mathbf{Q}$.

Primjer 1. Ako je $a = p_1 p_2 \dots p_k$, umnožak različitih prostih brojeva, onda $\sqrt{a}$ nije racionalan.

$\triangleright$ Pretpostavimo da je $\sqrt{a}$ racionalan. Onda vrijedi $\sqrt{a} = \dfrac{m}{n}$, pri čemu razlomak možemo skratiti tako da su m i n relativno prosti prirodni brojevi. Odatle slijedi $n^2 \cdot a = m^2$, tj.

$$n^2 \cdot p_1 p_2 \dots p_k = m^2.$$

Zaključujemo da je m^2 djeljiv prostim brojem p_1, zato mora i m biti djeljiv tim prostim brojem. Dakle, vrijedi $m = p_1 m_1$ za neki prirodni broj m_1. Sada slijedi

$$n^2 \cdot p_1 p_2 \dots p_k = p_1^2 \cdot m_1^2 \implies n^2 \cdot p_2 \dots p_k = p_1 \cdot m_1^2.$$

Desna strana je djeljiva s p_1, pa istim brojem mora biti djeljiva i lijeva strana. Kako su $p_1, p_2, \dots, p_k$ različiti prosti brojevi, s p_1 mora biti djeljiv broj n. Međutim, to je proturječje s pretpostavkom da su m i n relativno prosti. Zato $\sqrt{a}$ nije racionalan. $\triangleleft$

Prema ovom primjeru zaključujemo da su svi sljedeći brojevi iracionalni: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{15}$, itd. ali i ovakvi: $\sqrt{20}$, $\sqrt{72}$ i slični, jer se djelimičnim korjenovanjem mogu dovesti na oblik $2\sqrt{5}$, $6\sqrt{2}$.

Zadatak 2. Pokažite da je broj $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ iracionalan.

$\triangleright$ Stavimo $x = \sqrt{3}+\sqrt{5}$. Odavde je $x-\sqrt{3} = \sqrt{5}$ pa kvadrirajući dobivamo $x^2-2x\sqrt{3}+3 = 5$, odnosno $\sqrt{3} = \dfrac{x^2-2}{2x}$. Kad bi x bio racionalan, bio bi racionalan i $\sqrt{3}$, što nije istina. Zato je x iracionalan. $\triangleleft$

* * *

Slična se situacija ponavlja promotrimo li tek neznatno drukčiju jednadžbu: nema realnoga broja x takva da je $x^2 = -2$, jer kvadrat realnoga broja ne može biti negativan broj.

Želimo pronaći novi skup brojeva u kojem će ta jednadžba biti rješiva. Taj ćemo skup nazvati **skup kompleksnih brojeva**.

Skup kompleksnih brojeva

Skup kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$ takav je skup brojeva koji ima sljedeća tri svojstva:

C_1) On sadrži skup realnih brojeva.

C_2) On sadrži broj i za koji vrijedi $i^2 = -1$.

C_3) Operacije zbrajanja i množenja zadovoljavaju svojstva komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti (1)–(3).

Zadaci 1.1

1. Za koje je cijele brojeve n razlomak $\dfrac{2n+13}{n+2}$ cijeli broj?

2. Neka je $x = \dfrac{2}{5}$, $y = \dfrac{1}{3}$, $z = \dfrac{1}{2}$. Uvjerite se direktnim računom da u skupu racionalnih brojeva vrijedi zakon asocijativnosti $(x+y)+z = x+(y+z)$ i zakon distributivnosti $x(y+z) = xy+xz$.

3. Dokažite da broj $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ nije racionalan.

4. Za koje brojeve n je broj $\sqrt{n}$ racionalan?

5. Može li zbroj racionalnog i iracionalnog broja biti racionalan broj? Može li zbroj dvaju iracionalnih brojeva biti racionalan broj?

1.2. Algebarske operacije u skupu kompleksnih brojeva

Algebarski prikaz kompleksnoga broja

Rješenja jednadžbe $x^2+1=0$ nisu realni brojevi. Zato uvodimo novo ime i oznaku za njezino rješenje. Neka je i zamišljeno rješenje te jednadžbe, broj sa svojstvom $i^2+1=0$, odnosno $i^2=-1$. Taj novi broj i nazivamo **imaginarnom jedinicom**.

Imaginarna jedinica

Imaginarna jedinica i takav je broj za koji vrijedi $i^2+1=0$, to jest: $i^2=-1$.

* * *

Skup je realnih brojeva, prema pretpostavci C_1, sadržan u skupu kompleksnih brojeva. Prema tome, brojevi poput: 2, $\sqrt{3}$, -2, $-\frac{3}{2}$ sadržani su u skupu kompleksnih brojeva. Neka je y bilo koji realni broj. Imaginarna jedinica i kompleksan je broj. Prema svojstvu C_3 njihov umožak također je kompleksan broj. Zato su brojevi oblika yi — na primjer $2i$, $\sqrt{3}\,i$, $-2i$, $-\frac{3}{2}i$ — kompleksni brojevi. Brojeve tog oblika nazivamo posebnim imenom:

Imaginarni brojevi

Umnožak yi realnog broja y i imaginarne jedinice i zovemo **imaginarnim brojem**.

Zbroj kompleksnih brojeva ponovno je kompleksan broj. Zato su na primjer sljedeći brojevi kompleksni: $1+2i$, $2-\sqrt{3}\,i$, $\sqrt{3}-2i$ i sl.

Općenito, ako su x i y bilo koji realni brojevi, tad je broj oblika $x+yi$ kompleksan broj. Pokazat ćemo u nastavku da možemo definirati operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja s brojevima ovog oblika tako da rezultat opet bude broj ovog oblika. Zato je skup svih ovakvih brojeva traženo proširenje skupa realnih brojeva: to je najmanji skup brojeva koji zadovoljava svojstva $C_1 - C_3$.

Algebarski prikaz kompleksnog broja

Svaki se kompleksan broj z može napisati u obliku

$$z = x + yi, \tag{1}$$

gdje su x i y realni brojevi. x nazivamo **realni dio**, a y **imaginarni dio** kompleksnog broja z. Pišemo $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Prikaz (1) naziva se **algebarski** (ili **standardni**) **prikaz** kompleksnog broja z.

Jednakost kompleksnih brojeva. Dva su kompleksna broja $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ jednaka ako i samo ako im se podudaraju realni i imaginarni dijelovi:

$$z_1 = z_2 \quad \text{ako i samo ako vrijedi} \quad x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2.$$

Zaista, iz $x_1 + y_1 i = x_2 + y_2 i$ slijedi $x_1 - x_2 = (y_2 - y_1)i$, i ukoliko bi bilo $y_1 \neq y_2$, onda bi vrijedilo $i = \dfrac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} \in \mathbf{R}$, što je nemoguće. Zato je $y_1 = y_2$ i onda nužno $x_1 = x_2$.

Zbrajanje, oduzimanje i množenje kompleksnih brojeva

U skupu kompleksnih brojeva mogu se definirati sve algebarske operacije: zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje.

Zbrajanje i oduzimanje definiramo na prirodan način, koristeći se pretpostavljenim svojstvima asocijativnosti i distributivnosti kompleksnih brojeva:

$$(2 + 5i) + (3 - 2i) = 2 + 5i + 3 - 2i = 5 + 3i,$$
$$(1 - 3i) - (2 + 4i) = 1 - 3i - 2 - 4i = -1 - 7i.$$

* * *

Kompleksne brojeve množimo poštujući sva navedena pravila i uvažavajući svojstvo imaginarne jedinice: $i^2 = -1$. Na primjer,

$$(2 + 5i) \cdot (3 - 2i) = 6 + 15i - 4i - 10i^2 = 6 + 11i + 10 = 16 + 11i,$$
$$(1 - 3i) \cdot (2 + 4i) = 2 - 6i + 4i - 12i^2 = 2 - 2i + 12 = 14 - 2i.$$

Zbroj, razlika i umnožak kompleksnih brojeva

Ako su $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ bilo koja dva kompleksna broja, njihov zbroj, razlika i umnožak kompleksni su brojevi koji se računaju ovako:

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)i \tag{2}$$
$$z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + (y_1 - y_2)i \tag{3}$$
$$z_1 \cdot z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)i \tag{4}$$

Na prvi pogled, čini se da se umnožak kompleksnih brojeva računa složenom formulom; međutim, ona se dobiva na prirodan način, poštivajući svojstva komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti. Formulu za umnožak kompleksnih brojeva ne moramo pamtiti, već računske operacije izvodimo imajući na umu sljedeće pravilo:

Kompleksni brojevi zbrajaju se i množe poput algebarskih izraza (binoma) uvažavajući pritom svojstvo: $i^2 = -1$.

Tako, na primjer, 'izvod' formule (4) glasi:

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (x_1+y_1i)(x_2+y_2i) = && \text{(distributivnost)} \\ &= x_1x_2 + y_1x_2i + x_1y_2i + y_1y_2i^2 = && (i^2=-1) \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 + (x_1y_2+x_2y_1)i. \end{aligned}$$

Pritom smo koristili uobičajena svojstva operacija s realnim brojevima.

* * *

Evo nekoliko primjera.

Primjer 1. Načinimo naznačene operacije

$$(3+2i)(1-2i) = 3+2i-6i-4i^2 = 7-4i,$$
$$(2+i)^2 = 4+4i+i^2 = 3+4i,$$
$$(1+i\sqrt{5})(1-i\sqrt{5}) = 1+i\sqrt{5}-i\sqrt{5}-i^2(\sqrt{5})^2 = 1+5 = 6. \quad \triangleleft$$

Primjer 2. Neka su a i b realni brojevi.

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 = abi - abi - b^2i^2 = a^2+b^2,$$
$$(a+bi)^2 = a^2+2abi+b^2i^2 = a^2-b^2+2abi,$$
$$(a+bi)^3 = a^3+3a^2bi+3ab^2i^2+b^3i^3$$

Vrijedi: $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$. Zato je

$$(a+bi)^3 = a^3-3ab^2+(3a^2b-b^3)i.$$

Izračunajte sami $(a-bi)^3$. $\triangleleft$

Primjer 3. Odredimo realni i imaginarni dio sljedećih kompleksnih brojeva:
A. $(1-i)(2+i)$; **B.** $(1+i)^2$; **C.** $(1-i\sqrt{3})^3$.

$\triangleright$ Moramo odrediti algebarski prikaz zadanih kompleksnih brojeva.

A. $z = (1-i)(2+i) = 2-2i+i-i^2 = 2-i+1 = 3-i$. Dakle, $\operatorname{Re} z = 3$, $\operatorname{Im} z = -1$.

B. $z = (1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i-1 = 2i$. Odavde, $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = 2$.

C. $z = (1-\sqrt{3}\,i)^3 = 1-3\sqrt{3}\,i+3(\sqrt{3}\,i)^2-(\sqrt{3}\,i)^3 = 1-3\sqrt{3}\,i-9+3\sqrt{3}\,i = -8$, te je $\operatorname{Re} z = -8$, $\operatorname{Im} z = 0$. $\triangleleft$

Primjer 4. Odredimo realna rješenja jednadžbe

$$(4x+i)(2-i)+(2x+yi)(1-2i)=7-8i.$$

▷ Sređivanjem lijeve strane jednakosti, dobivamo

$$8x+2i-4xi-i^2+2x+yi-4xi-2yi^2=7-8i,$$
$$10x+2y+1+(-8x+y+2)i=7-8i.$$

Ovi su kompleksni brojevi jednaki ako im se podudaraju realni i imaginarni dijelovi, zato mora biti

$$10x+2y+1=7,$$
$$-8x+y+2=-8.$$

Rješavanjem ovog sustava dobivamo $x=1$, $y=-2$. ◁

* * *

Izračunajmo čemu su jednake potencije broja i. Vrijedi: $i^2=-1$, $i^3=i^2\cdot i=-i$, $i^4=i^3\cdot i=-i^2=1$, $i^5=i^4\cdot i=i$. Dalje se račun ponavlja: $i^6=i^5\cdot i=i^2=-1$, $i^7=-i$ itd.

Svaki se prirodni broj n može napisati u obliku $n=4k+r$, gdje je r ostatak pri dijeljenju s 4, $r\in\{0,1,2,3\}$. Zapamtimo da je uvijek $i^{4k}=\left(i^4\right)^k=1$. Tad je

$$i^n=i^{4k+r}=i^{4k}\cdot i^r=1\cdot i^r=i^r.$$

Na primjer, $i^{23}=i^{4\cdot5}\cdot i^3=i^3=-i$, $i^{1998}=i^{4\cdot499+2}=i^2=-1$ i slično.

Potencije imaginarne jedinice

Neka je k prirodan broj. Za potencije imaginarne jedinice vrijedi:

$$i^{4k}=1,\qquad i^{4k+1}=i,\qquad i^{4k+2}=-1,\qquad i^{4k+3}=-i.$$

Primjer 5.

$$i^{79}=i^{4\cdot19+3}=i^3=-i,$$
$$i^{727}=i^{27}=i^1=i,$$
$$i^{3246}=i^{46}=i^2=-1.\ ◁$$

Kompleksno konjugirani brojevi

Neka je $z=x+yi$ bilo koji kompleksni broj. Sa $\bar{z}$ označavamo broj

$$\bar{z}:=x-yi$$

koji nazivamo **kompleksno konjugiranim** broju z.

Tako je $\overline{2+3i}=2-3i$, $\overline{3-i}=3+i$, $\overline{2i}=-2i$, $\overline{3}=3$, $\overline{-4}=-4$.

Primijetimo da vrijedi: $\overline{\overline{z}} = \overline{x - yi} = x + yi = z$; zato je z kompleksno konjugiran broju $\overline{z}$. Par z, $\overline{z}$ nazivamo parom **kompleksno konjugiranih** brojeva. To je, dakle, par koji se razlikuje samo u predznaku imaginarnog dijela!

Njihovim zbrajanjem i oduzimanjem dobivamo

$$\begin{aligned} z + \overline{z} &= (x + yi) + (x - yi) = 2x, \\ z - \overline{z} &= (x + yi) - (x - yi) = 2yi. \end{aligned}$$

Zato je

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \qquad y = \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}).$$

Zadatak 6. Pokažite sljedeća svojstva operacije kompleksnog konjugiranja:

A. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; **B.** $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$; **C.** $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

▷ **A.**

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i)} \\ &= \overline{(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i} \\ &= (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i \\ &= x_1 - y_1 i + x_2 - y_2 i = \overline{z_1} + \overline{z_2} \end{aligned}$$

Istovjetno se dokazuje **B.** Pokažimo **C.**

$$\begin{aligned} \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i} \\ &= x_1 x_2 - y_1 y_2 - (x_1 y_2 + x_2 y_1)i \\ &= (x_1 - y_1 i)(x_2 - y_2 i) \\ &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}. \end{aligned}$$ ◁

Zadaci 1.2

1. Izračunajte:
A. $(3 - 5i) + (-2 + 3i)$; **B.** $(1 - 2i) + (3 - 5i)$;
C. $i(i - 1) + (2 + i)(i - 1)$; **D.** $(3 - 2i)(1 + i)(2 + 3i)$.

2. Izračunajte:
A. $(1 + i)^2$; **B.** $(1 - 2i)^2$; **C.** $(2 - i)^2$; **D.** $(1 + 2i)^3$;
E. $(3 + 2i)^3$; **F.** $(i + 2)^3$; **G.** $(1 - i)^4$; **H.** $(2 + i)^4$.

3. Izračunajte:
A. $1 + i^3 + i^6 + i^9$; **B.** $1 + i + i^2 + \ldots + i^9 + i^{10}$;
C. $(1 + i^{50})(1 - i^{51})$; **D.** $i^{111} + i^{222} + \ldots + i^{999}$.

4. Za koju je vrijednost realnoga broja t umnožak $[(10 - t) + (2 + t)i](1 - i)$ realan broj?

5. Izračunajte vrijednost izraza za zadanu vrijednost kompleksnoga broja:
A. $z^3 - z^2 + 2z$, za $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$;
B. $z^3 + 3z^2 - z + 1$, za $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 2 - i$;
C. $z^4 - z^2 + 2$, za $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$.

6. Neka je $z = x + yi$. Odredite realni i imaginarni dio kompleksnih brojeva z^2 i z^3.

7. Odredite realna rješenja jednadžbi:
A. $(1 + 2i)x + (3 - i)y = -1 + 3i$;
C. $3x + (1 - i)(x - y) = -11 + 5i$;

8. Pokažite da operacije zbrajanja i množenja kompleksnih brojeva imaju sljedeća svojstva:

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$	komutativnost zbrajanja,
$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$	asocijativnost zbrajanja,
$z_1 z_2 = z_2 z_1$	komutativnost množenja,
$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$	asocijativnost množenja,
$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$	distributivnost množenja.

1.3. Dijeljenje kompleksnih brojeva

Modul kompleksnog broja

Za umnožak dvaju kompleksno konjugiranih brojeva vrijedi:

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2.$$

Ovaj je umnožak uvijek realan nenegativan broj. Nadalje, $z \cdot \bar{z} = 0$ ako i samo ako je $x^2 + y^2 = 0$. Kako su ovo realni brojevi, zaključujemo da mora biti $x = 0$ i $y = 0$, odnosno, $z = 0$.

Modul kompleksnog broja

Modul kompleksnoga broja $z = x + yi$ definira se formulom

$$|z| := \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1}$$

Modul $|z|$ jednak je nuli onda i samo onda ako je $z = 0$. Za svaki drugi kompleksni broj z modul $|z|$ pozitivan je realan broj.

Primjer 1.

$$|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5,$$
$$|2 - 3i| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13},$$
$$|4i| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4,$$
$$|-2| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2,$$
$$|x - yi| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$|x - i - 2 - yi| = |(x - 2) - (y + 1)i| = \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2},$$
$$|(x + i)^2 - 1| = |x^2 + 2xi + i^2 - 1| = |(x^2 - 2) + 2xi| = \sqrt{(x^2 - 2)^2 + 4x^2}.$$

Primjećujemo da je modul realnog broja upravo apsolutna vrijednost tog realnog broja. Prema tome, *modul je poopćenje pojma apsolutne vrijednosti* na kompleksne brojeve. Zbog toga umjesto riječi modul često koristimo i izraz **apsolutna vrijednost** kompleksnoga broja.

* * *

Modul zadovoljava sljedeće — s obzirom na svoju definiciju — neobično svojstvo:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|. \tag{2}$$

Pokažimo tu jednakost. Neka je $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$. Tad vrijedi:

$$\begin{aligned}
|z_1 \cdot z_2| &= |(a+bi)(c+di)| \\
&= |(ac-bd+(ad+bc)i| \\
&= \sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2} \\
&= \sqrt{a^2c^2-2abcd+b^2d^2+a^2d^2+2abcd+b^2c^2} \\
&= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} = |z_1| \cdot |z_2|.
\end{aligned}$$

Ovakav račun, s korištenjem algebarskog prikaza kompleksnog broja, treba izbjegavati kad je god to moguće. Jednostavniji je sljedeći postupak:

$$\begin{aligned}
|z_1 \cdot z_2| &= \sqrt{z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1 \cdot z_2}} = \sqrt{z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2} \\
&= \sqrt{z_1 \cdot \overline{z}_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z}_2} = \sqrt{|z_1|^2 \cdot |z_2|^2} = |z_1| \cdot |z_2|
\end{aligned}$$

Pri tome smo koristili formulu $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$.

Dijeljenje kompleksnih brojeva

Formula

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$

pomaže nam osloboditi se iracionalnosti u nazivniku algebarskih izraza. Primjenjujemo je u računima nalik na sljedeći:

$$\frac{1}{3-\sqrt{2}} = \frac{1}{3-\sqrt{2}} \cdot \frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{2}}{3^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{3+\sqrt{2}}{7}.$$

Slično tome, formulom

$$x^2 + y^2 = (x-yi)(x+yi)$$

možemo se 'osloboditi imaginarnosti' u nazivniku ovakvih izraza:

$$\frac{1}{3-2i} = \frac{1}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i} = \frac{3+2i}{3^2+2^2} = \frac{3+2i}{13}.$$

Ovim je zapravo opisan postupak dijeljenja kompleksnih brojeva. Da bi podijelili dva kompleksna broja (pri čemu je djelitelj različit od nule), moramo pokazati da se rezultat dijeljenja može svesti na standardni zapis kompleksnoga broja.

Dijeljenje kompleksnih brojeva

Dva se kompleksna broja $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, ($z_2 \neq 0$) dijele na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} \\
&= \frac{ac+bd+(cb-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{cb-ad}{c^2+d^2}\, i.
\end{aligned} \tag{3}$$

Ovu formulu nećemo pamtiti, već ćemo u svakom konkretnom primjeru ponoviti postupak.

Primjer 2.

$$\frac{3+2i}{1-2i} = \frac{3+2i}{1-2i}\cdot\frac{1+2i}{1+2i} = \frac{3+2i+6i+4i^2}{1+4} = \frac{-1+8i}{5} = -\frac{1}{5}+\frac{8}{5}\,i.$$

Zadatak 3. Odredite realni i imaginarni dio sljedećih kompleksnih brojeva:

A. $\dfrac{1}{1-i}$; **B.** $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$.

▹ Moramo odrediti algebarski prikaz zadanih kompleksnih brojeva.

A. $z = \dfrac{1}{1-i} = \dfrac{1}{1-i}\cdot\dfrac{1+i}{1+i} = \dfrac{1+i}{1-i^2} = \dfrac{1+i}{2} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\,i\,.$

Dakle, $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2}$.

B. $z = \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3 = \left(\dfrac{1-i}{1+i}\cdot\dfrac{1-i}{1-i}\right)^3 = \left(\dfrac{1-2i+i^2}{2}\right)^3 = (-i)^3 = i.$

Odavde, $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = 1$. ◃

* * *

Korištenjem modula možemo recipročnu vrijednost kompleksnog broja napisati na način:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar z}{z\cdot\bar z} = \frac{\bar z}{|z|^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}\,i,$$

a dijeljenje dvaju brojeva ovako:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\cdot\frac{1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

Primijetimo da pri tome vrijedi:

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{\bar z}{|z|^2}\right| = \frac{|\bar z|}{|z|^2} = \frac{|z|}{|z|^2} = \frac{1}{|z|}.$$

Prema ovoj formuli zaključujemo

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_1\cdot\frac{1}{z_2}\right| = |z_1|\cdot\left|\frac{1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}. \tag{4}$$

Formula za modul umnoška može se iskoristiti na sljedeći način: iz $|z_1\cdot z_2| = |z_1|\,|z_2|$ slijedi

$$|z^2| = |z\cdot z| = |z|\cdot|z| = |z|^2,$$
$$|z^3| = |z^2\cdot z| = |z^2|\cdot|z| = |z|^3$$

i dalje, na isti način:

$$|z^n| = |z|^n. \tag{5}$$

Primjer 4. Ako je $|z_1| = 1$, $|z_2| = 1$ i $z_1 z_2 \neq -1$, pokažimo da je $z = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ realan broj.

▷ Broj z realan je ako i samo ako vrijedi $z = \bar{z}$. Prema uvjetima je zadatka:

$$1 = |z_1|^2 = z_1 \bar{z}_1, \qquad 1 = |z_2|^2 = z_2 \bar{z}_2.$$

Zato je, koristeći pravila konjugiranja:

$$\bar{z} = \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{1 + \bar{z}_1 \bar{z}_2} \cdot \frac{z_1 z_2}{z_1 z_2} = \frac{\bar{z}_1 z_1 z_2 + \bar{z}_2 z_1 z_2}{z_1 z_2 + \bar{z}_1 \bar{z}_2 z_1 z_2} = \frac{z_2 + z_1}{z_1 z_2 + 1} = z,$$

i z je realan. ◁

Zadaci 1.3

1. Izračunajte

A. $\dfrac{1}{1+i}$; **B.** $\dfrac{2}{1-2i}$; **C.** $\dfrac{1-i}{1+i}$;

D. $\dfrac{1+3i}{i}$; **E.** $\dfrac{i}{3-i}$; **F.** $\dfrac{i^2-1}{i^3+1}$;

G. $\dfrac{i}{i-1} + \dfrac{i+1}{i}$; **H.** $\dfrac{i-1}{i-2} + \dfrac{i+1}{i+2}$.

2. Odredite realni i imaginarni dio sljedećih kompleksnih brojeva:

A. $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2$; **B.** $\left(\dfrac{1}{i} + \dfrac{i}{2}\right)^3$; **C.** $\left(\dfrac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$;

D. $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$; **E.** $\left(\dfrac{2}{1+i\sqrt{3}}\right)^4$; **F.** $\dfrac{i^{107}+i^{57}}{i^{107}-i^{57}}$.

3. Neka je $z = x + iy$. Odredite realni i imaginarni dio kompleksnog broja $\dfrac{1}{z^2}$.

4. Odredite $|z|$, ako je:

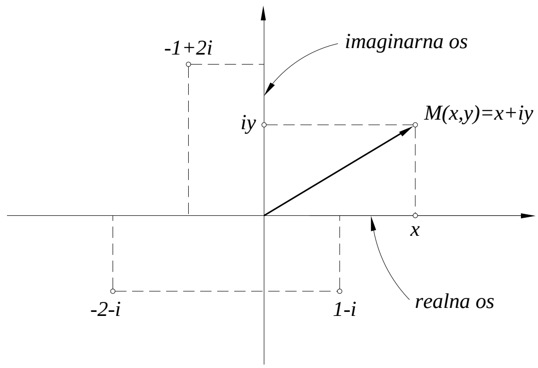
A. $z = (1 - i\sqrt{2})(\sqrt{2} + 2i)$; **B.** $z = \dfrac{1 - \sqrt{2} + i\sqrt{3}}{1 + \sqrt{2} - i\sqrt{3}}$;

C. $z = (\sqrt{2} - i\sqrt{3})^3$; **D.** $z = \dfrac{-i(1+i)^4}{(1 - i\sqrt{3})^3}$.

5. Dokaži da je broj $\dfrac{z - \bar{z}}{1 + z\bar{z}}$ imaginaran broj za svaki kompleksan broj z koji nije realan broj.

1.4. Kompleksna ravnina

Svakom kompleksnom broju $z = x + yi$ odgovara uređen par realnih brojeva (x, y). Želimo li grafički prikazati kompleksan broj, prirodno je takvu broju pridružiti točku $M(x, y)$ u ravnini xOy. Tako skup $\mathbf{C}$ možemo poistovjetiti s ravninom u kojoj je uveden Kartezijev koordinatni sustav.

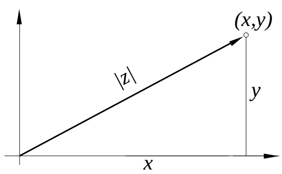


Sl. 1.1. Svakoj točki $M(x, y)$ Kartezijeve ravnine odgovara kompleksni broj $z = x + yi$. Na osi apscisa nalaze se realni brojevi, na osi ordinata imaginarni

Os Ox Kartezijeva sustava u ravnini naziva se **realna os** u $\mathbf{C}$. Na njoj (i samo na njoj) leže realni brojevi. Os Oy naziva se **imaginarna os**, ona sadrži **imaginarne brojeve**. Ovu ravninu nazivamo **kompleksna ravnina** ili **Gaussova ravnina**.

Udaljenost kompleksnih brojeva

Modul kompleksnoga broja definiran je ovako: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ovaj broj, prema Pitagorinu poučku, jednak je udaljenosti točke $M(x, y)$ do ishodišta.



Sl. 1.2. Modul kompleksnoga broja $z = x + yi$ jednak je udaljenosti točke (x, y) do ishodišta koordinatnog sustava

Neka su zadana dva kompleksna broja $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$. Tad vrijedi:

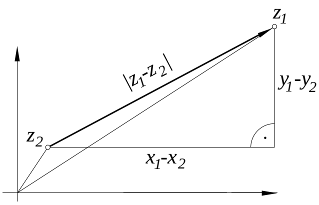
$$|z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

U ovom izrazu prepoznajemo formulu za udaljenost dviju točaka. Zato je $|z_1 - z_2|$ udaljenost između točaka z_1 i z_2 u kompleksnoj ravnini.

Carl Friedrich Gauss (Braunschweig, 30. travnja 1777. – Göttingen, 23. veljače 1855.) prema mnogima je najveći matematičar svih vremena. S 19 godina riješio je problem konstrukcije pravilnog sedamnaesterokuta. S 22 godine prvi je dokazao osnovni stavak algebre, prema kojem svaki polinom ima barem jednu (kompleksnu) nul točku. Bitan je njegov doprinos u svim područjima matematike, tako da mnogi pojmovi i tvrdnje nose njegovo ime. Bio je i veliki praktičar. S 24 godine izračunao je putanju planetoida Cerere, a zatim i planetoida Palade. Dugo je vremena upravljao zvjezdarnicom u Göttingenu i za to je vrijeme priredio i matematičke tablice koje su bile u uporabi do današnjih dana.

Udaljenost dviju točaka $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ jednaka je modulu razlike odgovarajućih kompleksnih brojeva:

$$d(M_1, M_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$



Sl. 1.3. Broj $|z_1 - z_2|$ jednak je udaljenosti točaka z_1 i z_2

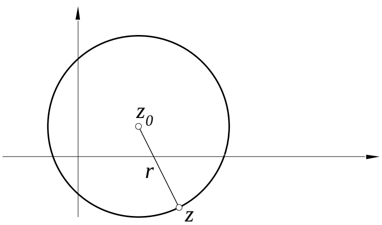
Neka je $z_0 = x_0 + iy_0$ čvrsta točka. Skup

$$k = \{z : |z - z_0| = r\} \tag{1}$$

skup je svih točaka $z \in \mathbf{C}$ kojih je udaljenost do točke z_0 jednaka r. To je kružnica sa središtem z_0 i polumjerom r. Takvu kružnicu označavamo s $k(z_0; r)$.

Izračunavši modul broja $z - z_0$, dobit ćemo *jednadžbu kružnice* sa središtem u točki $z_0 = (x_0, y_0)$ i polumjerom r:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \tag{2}$$



Sl. 1.4. Kružnica u kompleksnoj ravnini opisana je formulom $|z - z_0| = r$.

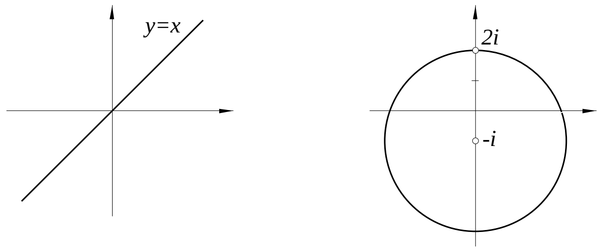
Ako umjesto jednakosti u formuli (2) stavimo znak $\leqslant$, dobit ćemo skup svih točaka kompleksne ravnine udaljenost kojih do točke z_0 manja je ili jednaka broju r — to je krug sa središtem u točki z_0 polumjera r.

Zadatak 1. Koji su skupovi točaka određeni sljedećim jednadžbama:
A. $\mathrm{Re}\, z = \mathrm{Im}\, z$; **B.** $|z+i| = 3$; **C.** $z\,\overline{z} + i(z-\overline{z}) = 2$; **D.** $|z| = \sqrt{2}, \quad |z+i| = |z+1|$?

▷ **A.** Neka je $z = x+iy$. Uvrstimo li ovakav z u gornju relaciju, dobivamo $y = x$, pravac (sl. 1.5.a).

B. Svi kompleksni brojevi z za koje vrijedi $|z+i| = 3$ udaljeni su za 3 od točke $-i$, dakle, leže na kružnici sa središtem u $-i$ i polumjerom 3 (sl. 1.5.b). Računanjem apsolutne vrijednosti dobivamo njezinu jednadžbu u Kartezijevu sustavu:

$$x^2 + (y+1)^2 = 9.$$



Sl. 1.5.

C. Stavimo $z = x+iy$:

$$\begin{aligned}
&z\,\overline{z} + i(z-\overline{z}) = 2\\
\iff\ &(x+iy)(x-iy) + i(x+iy-x+iy) = 2\\
\iff\ &x^2 + (y-1)^2 = 3.
\end{aligned}$$

Riječ je o kružnici sa središtem u točki $S(0,1)$ i polumjerom $\sqrt{3}$.

D. Stavimo $z = x+iy$. Drugi uvjet daje $x = y$ i zatim iz prvog $z_1 = 1+i$, $z_2 = -1-i$. ◁

Zadaci 1.4

1. Odredite u kompleksnoj ravnini skup točaka određenih uvjetom:

A. $|z| = |z-2|$; **B.** $|z+i| = |z-1-i|$;

C. $\left|\dfrac{z-1}{z+2i}\right| = 1$; **D.** $\left|\dfrac{z-i}{z-1}\right| = 1$.

2. Odredite u kompleksnoj ravnini skup točaka određenih uvjetom:

A. $|z-1| = 2$; **B.** $|z-2i| = 2$;

C. $1 < |z-1| < 3$; **D.** $0 < |z-1| \leqslant 2$.