Uvod

Najstarija i najviše korištena metoda nacrtne geometrije je Mongeova metoda koju ste upoznali u knjizi *Nacrtna geometrija I. dio*. Budući da se nacrtna geometrija obilato služi i drugim metodama, ovdje ćemo upoznati još neke od njih.

Za potrebe onih disciplina, za koje je primaran izgled objekta, vrlo je prihvatljiva metoda kosog projiciranja na jednu ravninu slike, pri čemu su objekti vezani uz prostorni koordinatni sustav. To je tzv. **aksonometrijska metoda** ili **aksonometrija**.

Jos zornije i prirodnije slike prostornih objekata postižu se metodom centralnog projiciranja poznatom pod nazivom **perspektiva**. Prikazivanje složenih predmeta i objekata ovim metodama omogućuje njihovo potpuno sagledavanje u prostoru, a dobro ukazuje i na proporcije pojedinih elemenata.

Kod prikazivanja objekata ogromnih dimenzija na terenu, kao što su ceste, željezničke pruge, mostovi i slično najčešće se koristi metoda ortogonalnog projiciranja na jednu horizontalnu ravninu dopunjena visinskim kotama točaka. Ova je metoda poznata pod nazivom **kotirana projekcija**, a nalazi svoju primjenu u geodeziji, građevinarstvu, rudarstvu i arhitekturi.

Kako su u inženjerskoj praksi konstruktivni problemi često vrlo kompleksni, te uz korektnu metričku obradu zahtjevaju i zoran prikaz objekta, najčešće se kombiniraju metode projiciranja.

Cilj nam je u ovom udžbeniku pobliže upoznati karakteristike svake od nabrojenih metoda, uočiti u kojem segmentu koja od njih ima prednost, te ih naučiti primjenjivati u praksi. Na kraju još valja napomenuti, da svaka od spomenutih metoda nalazi svoju primjenu i u kompjutorskoj grafici, te ju i tamo treba znati prepoznati.

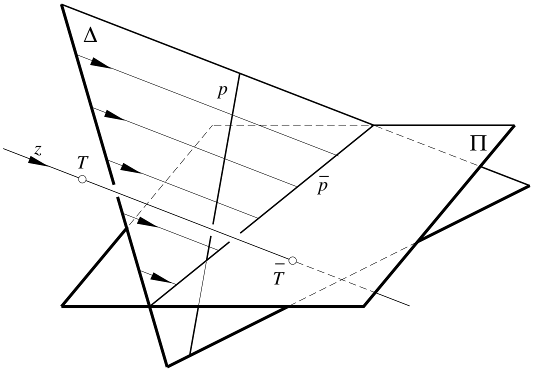
1. Aksonometrija

Pri projiciranju geometrijskih tijela s osnovicama u ravninama projekcija Mongeovom metodom ne postiže se uvijek najbolji učinak. Ako je potrebno geometrijska tijela ili neke složenije tvorevine sagledati "sa strane", dovodi ih se u opći položaj prema ravninama projekcija, pa tada projiciranje u smjeru tlocrta ili nacrta predstavlja pogled na objekt "sa strane" ili "iz kosa" (*Nacrtna geometrija – I. dio*). Mongeova metoda daje u tom smislu zadovoljavajuće rezultate ako se radi o relativno jednostavnim geometrijskim tijelima. Međutim, kod prikazivanja složenijih objekata u općem položaju ovom metodom ne postižemo njihovu zornost, a i konstruktivni postupci postaju složeniji. Zorni se učinak stoga ostvaruje na neki drugi, jednostavniji način. Moguće je, na primjer, svaki prostorni objekt smjestiti unutar koordinatnih ravnina tako, da su mu glavni bridovi i osnovne plohe paralelni s ravninama projekcija, a onda ga skupa s koordinatnim sustavom projicirati koso, s odabranim "pogledom" na jednu ravninu. Ovakvim se načinom projiciranja bavi **aksonometrijska metoda** projiciranja.

Kod upoznavanja Mongeove metode često smo se služili skicama prikazujući izgled nekog tijela u prostoru. Tada smo se prešutno koristili kosom projekcijom s kojom ćemo se sada detaljnije upoznati.

Pri kosom projiciranju treba imati uvijek na umu sljedeće evidentne činjenice:

- Projekcija točke je točka u kojoj zraka projiciranja probada ravninu slike. Kosu projekciju neke točke T označavat ćemo $\overline{T}$.
- Projekcija nekog pravca p je pravac $\overline{p}$ koji je presječnica ravnine slike Π s *projicirajućom ravninom* Δ položenom tim pravcem. *Projicirajuća ravnina nekog pravca je ravnina koja sadrži taj pravac i paralelna je sa zrakama projiciranja* (sl. 1.1).

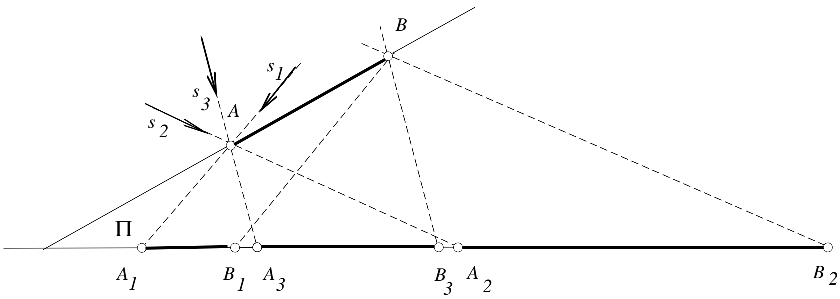


Sl. 1.1.

Osnovna svojstva kosog projiciranja su:

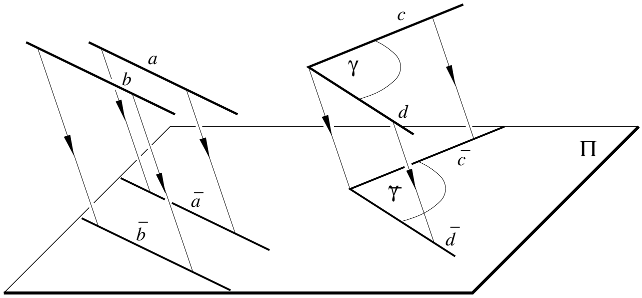
1. projekcija dužine je dužina čija duljina može biti manja, veća ili jednaka svojoj pravoj veličini, što ovisi o položaju dužine prema ravnini slike i o smjeru zrake projiciranja (sl. 1.2);

$$d(A_1, B_1) < d(A, B)$$
$$d(A_2, B_2) > d(A, B)$$
$$d(A_3, B_3) = d(A, B)$$



Sl. 1.2.

2. dužina, koja je paralelna s ravninom slike, uvijek se projicira u pravoj veličini;
3. paralelni se pravci projiciraju kao paralelni pravci;
4. kut što ga zatvaraju dva pravca općenito se projicira u kut koji je veći ili manji od svoje prave veličine. (Kut dvaju pravaca projicira se u pravoj veličini samo onda kad su mu krakovi paralelni s ravninom projekcije (sl. 1.3));

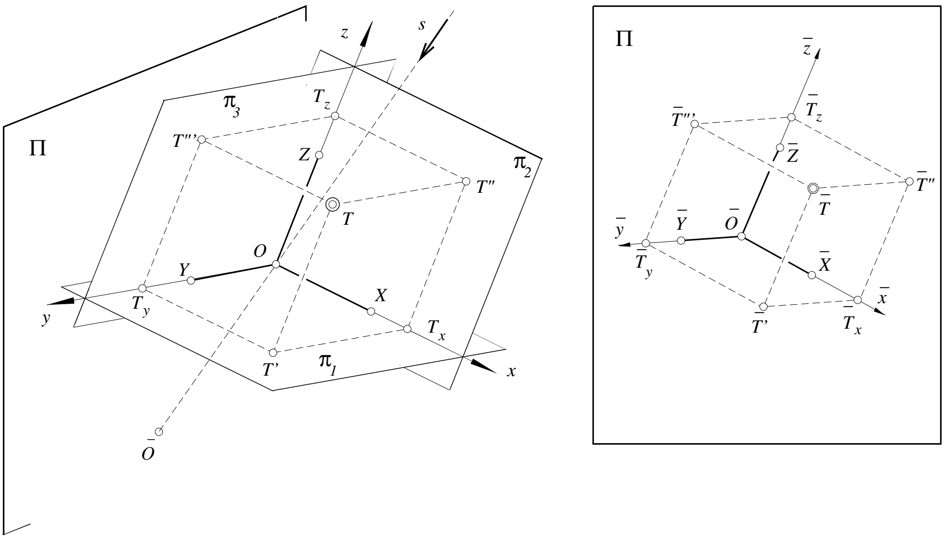


Sl. 1.3.

5. geometrijski lik, koji se nalazi u ravnini paralelnoj s ravninom slike, projicira se u sukladan lik.

1.1. Kosa aksonometrija

Neka je zadan prostorni pravokutni koordinatni sustav $O(x, y, z)$ s ishodištem u točki O i orjentiranim koordinatnim osima x, y, z. Ravnine $(x, y) = \Pi_1$, $(x, z) = \Pi_2$ i $(y, z) = \Pi_3$ promatrajmo kao tlocrtnu, nacrtnu i bokocrtnu ravninu. Ortogonalnim projiciranjem neke točke T iz prostora na ove tri ravnine određen je poznati "koordinatni kvadar" $TT'T_xT''T_zT'''T_yO$ točke T (sl. 1.4a).



a) b)

Sl. 1.4.

Neka je zadana ravnina projekcije ili ravnina slike Π, na koju se za sada ne postavljaju nikakvi uvjeti, te po volji smjer projiciranja zrakom s, koja nije okomita na ravninu slike niti je s njom paralelna. Projiciranjem koordinatnog sustava i točke T u smjeru zrake s na ravninu Π koordinatni se kvadar projicira u paralelepiped čiji izgled ovisi isključivo o položaju koordinatnog sustava prema ravnini slike Π i smjeru s projiciranja (sl. 1.4b).

Zadajmo na koordinatnim osima u prostoru jedinične dužine $\overline{OX}$, $\overline{OY}$ i $\overline{OZ}$ tako, da bude $d(O,X) = d(O,Y) = d(O,Z) = 1$. Paralelne projekcije ovih jediničnih dužina imaju općenito različite duljine, koje ovise o smjeru projiciranja i položaju koordinatnih osi prema ravnini slike Π. Može se dogoditi da projicirana jedinica bude manja, veća ili jednaka svojoj pravoj veličini.

Omjere, u kojima stoje duljine projiciranih dužina prema njihovom pravom iznosu, zovemo **prikratama** na koordinatnim osima i označavamo ih

$$\begin{aligned} d(\overline{O},\overline{X}) : d(O,X) &= p_x,\\ d(\overline{O},\overline{Y}) : d(O,Y) &= p_y,\\ d(\overline{O},\overline{Z}) : d(O,Z) &= p_z. \end{aligned}$$

Očigledno je da prikrate mogu po iznosu biti veće, manje ili jednake jedinici. Kada se radi o jediničnim dužinama, jasno je da vrijedi:

$$d(\overline{O},\overline{X}) = p_x, \quad d(\overline{O},\overline{Y}) = p_y, \quad d(\overline{O},\overline{Z}) = p_z.$$

Vrlo korisnu i zanimljivu činjenicu, koja je omogućila današnju uporabu aksonometrijskih metoda, dokazao je davne 1853. godine njemački matematičar Karl Wilchelm **Pohlke**. Ta osnovna tvrdnja glasi:

Zadamo li u ravnini tri dužine $\overline{\overline{O}\overline{A}}$, $\overline{\overline{O}\overline{B}}$ i $\overline{\overline{O}\overline{C}}$ različitih duljina sa zajedničkom krajnjom točkom $\overline{O}$ tako, da nisu sve tri na istom pravcu, tada postoji u prostoru takav ortogonalni koordinatni sustav i takve tri dužine $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ i $\overline{OC}$ jednakih duljina na njegovim koordinatnim osima, koje se paralelno u nekom smjeru projiciraju u zadane dužine $\overline{\overline{O}\overline{A}}$, $\overline{\overline{O}\overline{B}}$ i $\overline{\overline{O}\overline{C}}$.

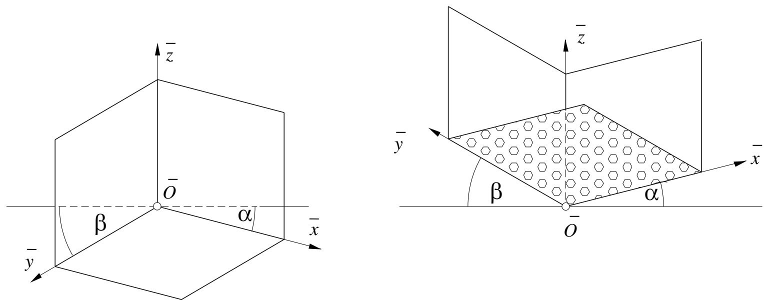
(Uočavamo da ovakav koordinatni sustav čak nije jednoznačan, nego ih ima beskonačno mnogo. Naime, čim se odredi jedan takav sustav, njegovim paralelnim pomicanjem u smjeru s projiciranja može ih se dobiti još beskonačno mnogo.)

Dokaz ove tvrdnje je vrlo složen i nećemo ga provoditi. Ona nam omogućuje da u ravnini po volji zadamo projekciju ortogonalnog koordinatnog sustava i jediničnih dužina na njegovim koordinatnim osima, te da u njemu crtamo aksonometrijske slike objekata. Pri tome moramo biti svjesni, da položaj danog objekta u prostoru u odnosu na ravninu slike ne možemo točno odrediti. Moguće je samo odrediti smjer projiciranja i položaj objekta u odnosu na koordinatni sustav, a to je, uz vrlo zoran prikaz objekta, najčešće i dovoljno.

Kako nam je cilj dobiti što zornije i prirodnije slike objekata, to ćemo projekcije koordinatnih osi i jediničnih dužina na njima zadavati na sljedeći način.

Projekciju osi z zadavat ćemo uvijek "vertikalno", jer smo naviknuti objekte gledati u uspravnom položaju. Osi $\bar{x}$ i $\bar{y}$ zatvarat će s osi $\bar{z}$ kuteve $90^\circ + \alpha$, odnosno $90^\circ + \beta$ ili $90^\circ - \alpha$ i $90^\circ - \beta$. Kutevi α i β biraju se tako, da slika bude što manje izobličena. Uobičajeno je zadavati:

$$15^\circ \leqslant \alpha \leqslant 30^\circ, \qquad 30^\circ \leqslant \beta \leqslant 60^\circ \quad (\text{sl. } 1.5).$$



a) b)

Sl. 1.5.

Na slici 1.5a zadana je projekcija koordinatnog sustava za "pogled na ravninu (x, y) odozgo", a na slici 1.5b za "pogled odozdo".

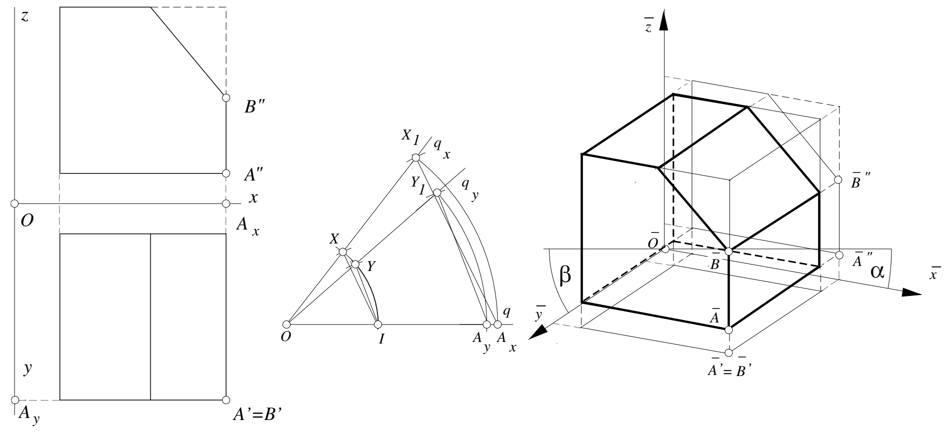
Projekcije jediničnih dužina, odnosno prikrate na koordinatnim osima zadaju se, na primjer, u sljedećim kombinacijama:

$$p_x = 0.8 \qquad p_y = 0.6 \qquad p_z = 0.9$$
$$p_x = 0.9 \qquad p_y = 0.7 \qquad p_z = 1$$
$$p_x = p_y = p_z = 1.$$

Ako su sve tri prikrate međusobno jednake, takvu aksonometriju zovemo **izometrija**.

Da bi se mogla crtati aksonometrijska slika nekog objekta ili predmeta, taj se predmet zadaje svojim ortogonalnim projekcijama. To može biti tlocrt i nacrt ili nacrt i bokocrt predmeta. Kako iz toga nastaje aksonometrijska slika predmeta, pokazuju sljedeći primjeri.

Primjer 1.1. Zadan je tlocrt i nacrt tijela oblika kocke kojoj je odrezan jedan njezin dio. Konstruirajte aksonometrijsku projekciju tog tijela, ako je zadano: $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $p_x = 0.9$, $p_y = 0.7$ i $p_z = 1$ (sl. 1.6).



a) b) c)

Sl. 1.6.

Prvo se pomoću zadanih kuteva α i β konstruira projekcija koordinatnog sustava $O(x, y, z)$ (sl. 1.6c).

Poznato je da će se sve dužine koje su paralelne s osi x, pri projiciranju prikratiti u jednakom omjeru koji u našem slučaju iznosi 0.9. Isto će se tako sve dužine paralelne s osi y prikratiti u omjeru 0.7, dok će dužine u smjeru osi z ostati neprikraćene, jer je prikrata po osi z jednaka 1. Stoga je praktično aksonometrijski tlocrt i aksonometrijski nacrt predmeta konstruirati s pomoću takozvanih **kuteva proporcionalnosti** (sl. 1.6b).

Na po volji odabran pravac q nanese se po volji duga jedinična dužina $\overline{OI}$, a na kružni luk polumjera $\overline{OI}$ tetiva $\overline{IX}$ tako da bude $d(I, X) = 0.9d(O, I)$, te tetiva $\overline{IY}$ tako da bude $d(I, Y) = 0.7d(O, I)$. Kut $\sphericalangle IOX$ je kut proporcionalnosti za prikraćivanje u smjeru osi x, a kut $\sphericalangle IOY$ u smjeru osi y.

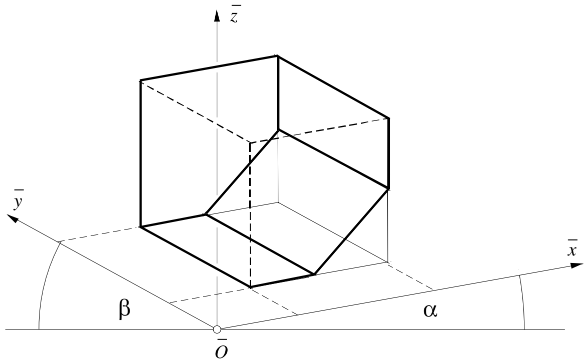
Ako se konstruira trokut OA_xX_1 sličan trokutu OIX, tako da osnovna stranica OA_x bude jednaka apscisi točke A, tada je $d(A_x, X_1) = 0.9d(O, A_x)$ (Sličnost trokuta!), dakle je to duljina aksonometrijske slike apscise točke A, koju nanosimo na aksonometrijsku projekciju osi x.

Analogno se konstruira i aksonometrijska slika ordinate $\overline{OA_y}$ točke A. To je dužina $\overline{A_yY_1}$, koja se nanosi na projekciju osi y. Iz dobivenih se točaka $\overline{A_x}$ i $\overline{A_y}$ povuku paralele s koordinatnim osima $\overline{y}$ odnosno $\overline{x}$, a u njihovom se sjecištu dobije aksonometrijski tlocrt $\overline{A'}$ točke A. Slično se odrede aksonometrijski tlocrti i ostalih točaka, a spojnice određuju aksonometrijski tlocrt zadanog predmeta. Koristeći paralelnost nasuprotnih stranica paralelograma, pojednostavljen je konstruktivni postupak (sl. 1.6c).

Sličnim se postupkom odredi aksonometrijski nacrt predmeta. Zatim se uz pomoć ovih dviju aksonometrijskih projekcija određuje aksonometrijska slika cijelog objekta tako, da se međusobno sijeku ordinale paralelne s osi $\overline{z}$ povučene iz aksonometrijskih tlocrta s ordinalama, koje su povučene paralelno s osi $\overline{y}$ iz aksonometrijskih nacrta odgovarajućih točaka (sl. 1.6c).

Uobičajeno je vidljive bridove objekta izvlačiti debljom, punom crtom, a one nevidljive iscrtkano i nešto tanje.

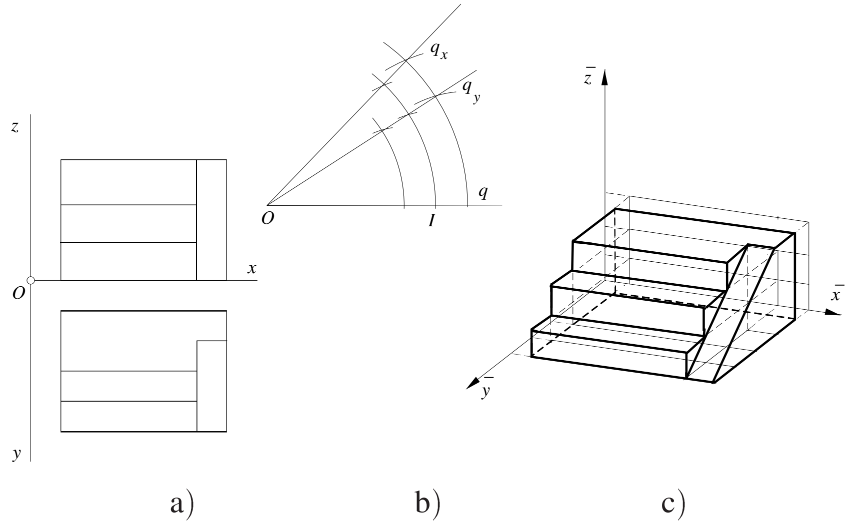
Ponekad je zanimljivije promatrati neki objekt odozdo, primjerice kocku koja je izrezana s donje strane. Tada se kutevi α i β uzimaju s negativnim predznakom kao što je to učinjeno na slici 1.7.



Sl. 1.7.

Napomena. Ako se u zadatku izričito ne traži pogled odozdo, onda se crta s pogledom odozgo.

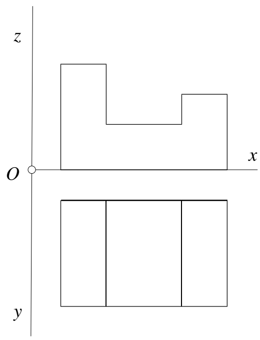
Primjer 1.2. Konstruirajte aksonometrijsku sliku objekta zadanog ortogonalnim projekcijama na slici 1.8a, ako je zadano: $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $p_x = 0.8$, $p_y = 0.6$, $p_z = 1$.



Sl. 1.8.

Kao i u predhodnom primjeru, i ovdje se uz pomoć kuteva proporcionalnosti konstruiraju aksonometrijske slike tlocrta i nacrta objekta, a zatim i aksonometrijska projekcija samog objekta. Pri crtanju bridova vodite računa o njihovoj vidljivosti!

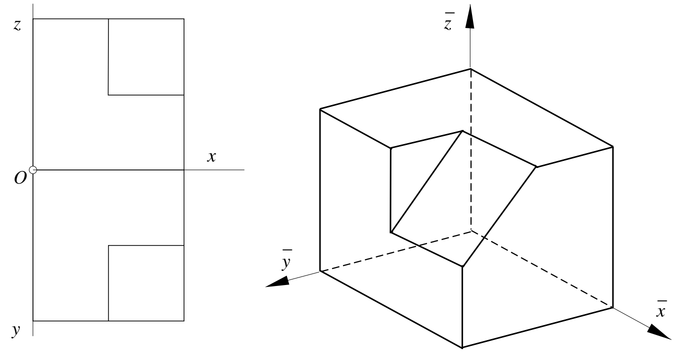
Zadatak 1.1. Objekt, koji je zadan ortogonalnim projekcijama na slici 1.9 prikažite u kosoj aksonometriji ako je zadano: $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $p_x = 0.9$, $p_y = 0.7$, $p_z = 1$.



Sl. 1.9.

Zadatak 1.2. Zadajte tlocrt i nacrt tijela oblika kocke, koje je prislonjeno uz sve tri koordinatne ravnine, a izrezana mu je prednja, lijeva, gornja osmina. Prikažite ovo tijelo u kosoj aksonometriji, ako je zadano: $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$ i $p_x = p_y = p_z = 1$. Kako biste nazvali ovu aksonometriju?

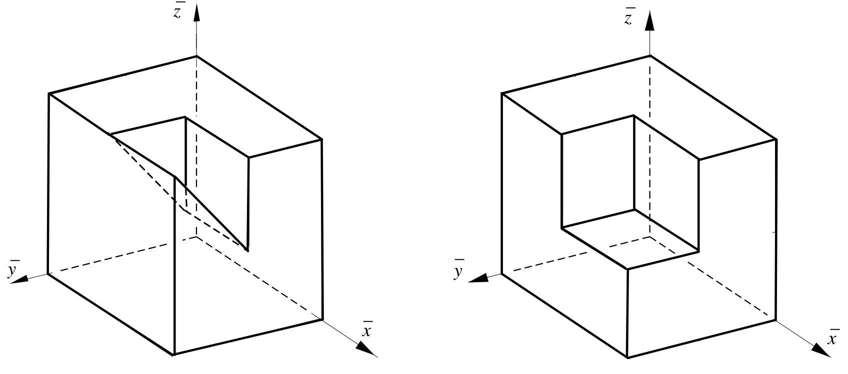
Primjer 1.3. Na slici 1.10a zadane su ortogonalne projekcije tijela oblika kocke kojoj je izrezan jedan njen dio. Da li je ovim tlocrtom i nacrtom jednoznačno zadan objekt u prostoru?



a) b)

Sl. 1.10.

Nije teško zaključiti da slika 1.10b prikazuje aksonometrijsku projekciju objekta prikazanog tlocrtom i nacrtom na slici 1.10a. To se, međutim ne može reći i za sliku 1.11a. Naime, u ovom slučaju tlocrt sa slike 1.10a odgovara ovom objektu, ali ne i nacrt. Zašto? Uvjerite se sami da i slika 1.11b nudi zadovoljavajuće rješenje.

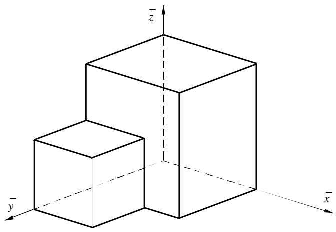


a) b)

Sl. 1.11.

Iz ovog primjera možemo zaključiti da ponekad objekt zadan svojim dvjema ortogonalnim projekcijama ne mora imati jedinstveno rješenje. Ako se želi objekt zadati jednoznačno, mora mu se zadati i bokocrtna projekcija. Uvjerite se u to tako, da predmetima na slikama 1.10b, i 1.11a,b odredite bokocrte!

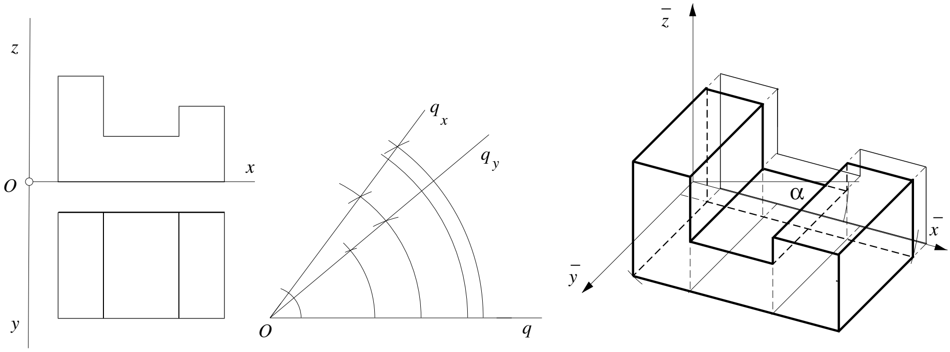
Zadatak 1.3. Nacrtajte tlocrt i nacrt objekta koji je prikazan u kosoj aksonometriji na slici 1.12. Da li dobivene projekcije odgovaraju još nekom objektu različitom od onog zadanog? Nacrtajte aksonometrijsku projekciju barem jednog rješenja.



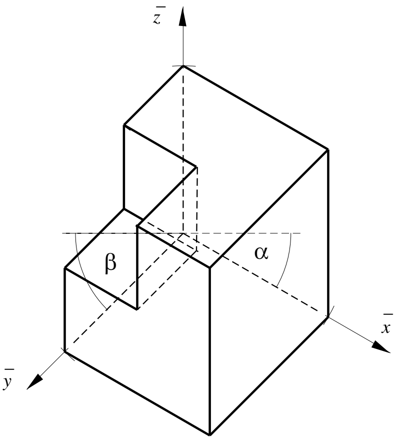
Sl. 1.12.

Rješenja zadataka

1.1.

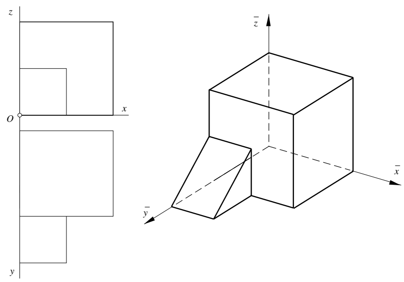


1.2.



Ova se aksonometrija zove *izometrija*.

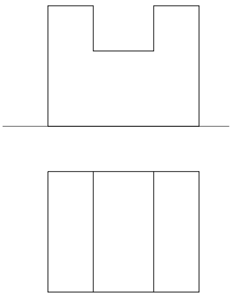
1.3.



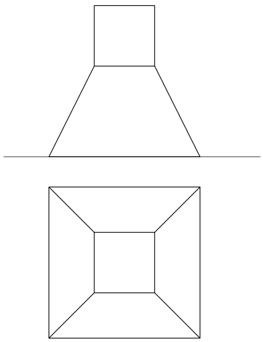
Zadaci za vježbu

Objekte koji su u sljedećim zadacima zadani ortogonalnim projekcijama prikažite u kosoj aksonometriji s pogledom odozgo. Preporuča se odabir kuteva $\alpha \cong 15^\circ$ i $\beta \cong 30^\circ$. Prikrate birajte po volji. (Rješenja su dana u izometriji).

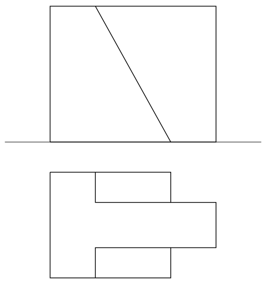
1.



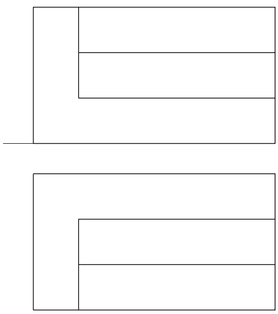
2.



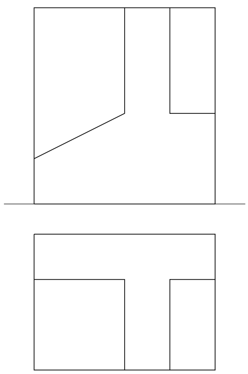
3.



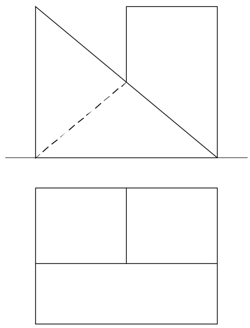
4.



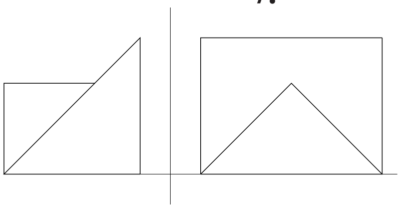
5.



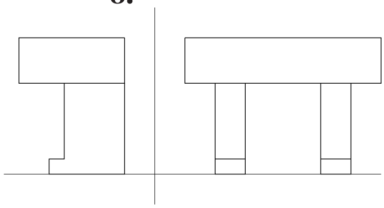
6.



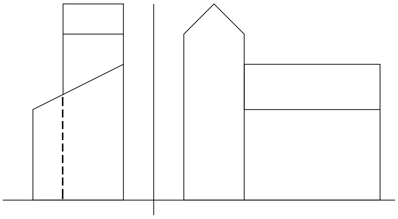
7.



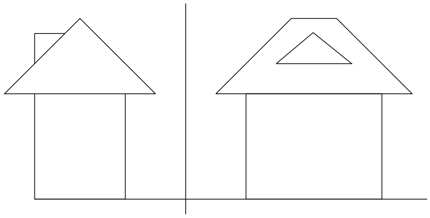
8.



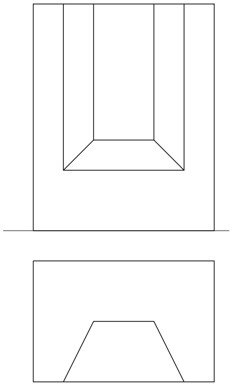
9.



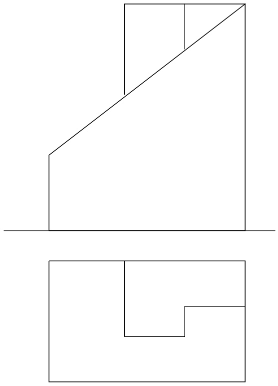
10.



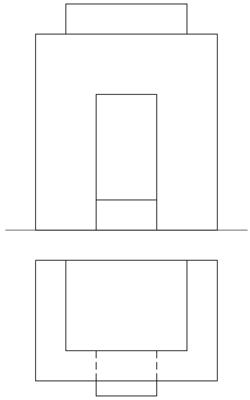
11.



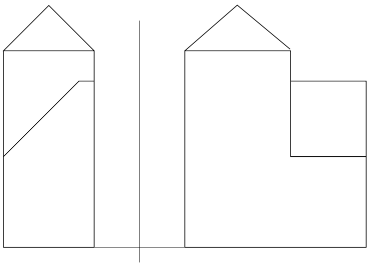
12.



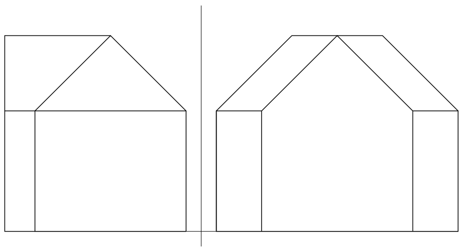
13.



14.

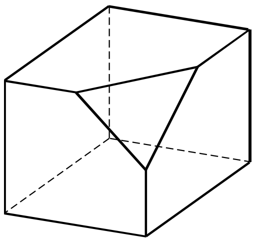


15.

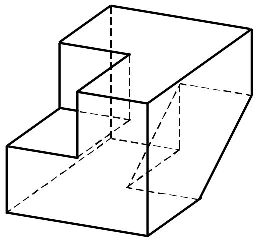


Nacrtajte tlocrte, nacrte i bokocrte objekata prikazanih u kosoj aksonometriji u sljedećim zadacima:

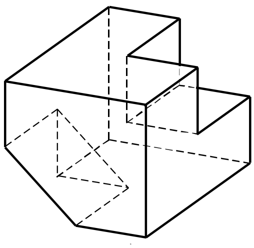
16.



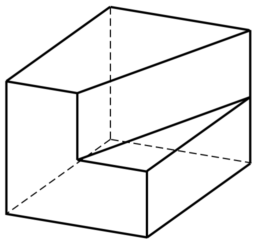
17.



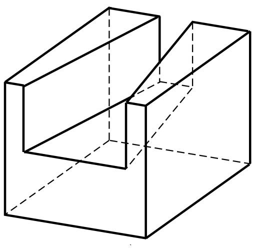
18.



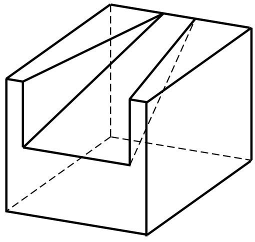
19.



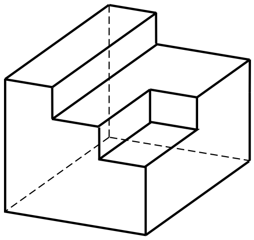
20.



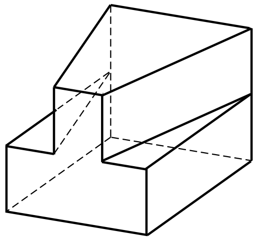
21.



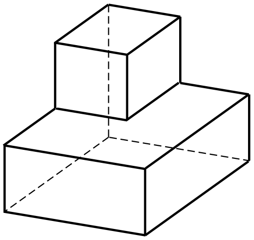
22.



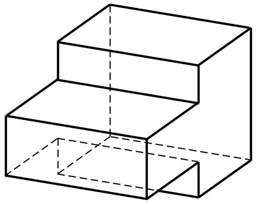
23.



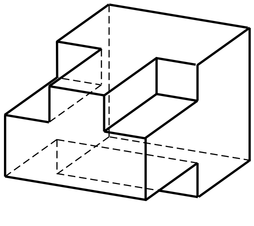
24.



25.



26.



27.