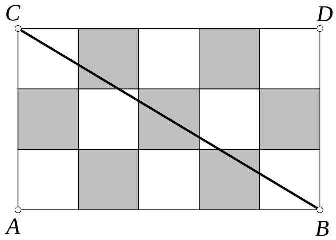
RJEŠENJA

XXXVIII.

1. (a) Neka je ABC pravokutni trokut čiji vrhovi se nalaze u vrhovima kvadrata, čije katete leže na stranicama kvadrata, pri čemu je $\sphericalangle A = 90^\circ$, $|AB| = n$ i $|AC| = m$. Promatrajmo $n \times m$ pravokutnik $ABDC$ kao što je prikazano na slici.



Sl. 1.1.

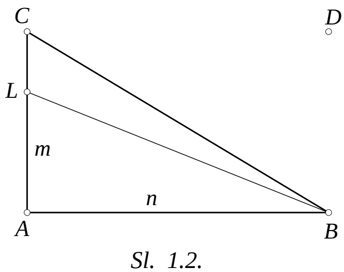
Za bilo koji poligon P označimo sa $S_1(P)$ ukupnu površinu crnog dijela od P i sa $S_2(P)$ ukupnu površinu bijelog dijela.

Kada su m i n iste parnosti bojanje pravokutnika $ABDC$ je centralno simetrično u odnosu na polovište hipotenuze $\overline{BC}$. Zato je $S_1(ABC) = S_1(BCD)$ i $S_2(ABC) = S_2(BCD)$ i

$$f(m,n) = |S_1(ABC) - S_2(ABC)| = \frac{1}{2}|S_1(ABDC) - S_2(ABDC)|.$$

Zato je $f(m,n) = 0$, ako su m, n oba parna a $f(m,n) = \frac{1}{2}$, ako su m, n oba neparna.

(b) Ako su m i n oba parna ili oba neparna tvrdnja slijedi iz a). Pretpostavimo da je m neparan i n paran. Promatrajmo točku L na $\overline{AC}$ tako da je $|AL| = m - 1$, kao što je prikazano na slici 7.2.



Sl. 1.2.

Kako je $m - 1$ parno, to je $f(m-1,n) = 0$, tj. $S_1(ABL) = S_2(ABL)$. Prema tome,

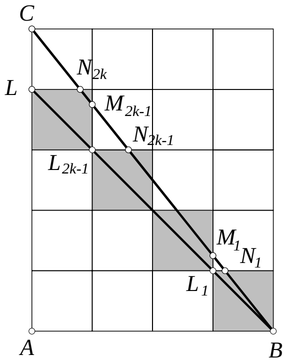
$$f(m,n) = |S_1(ABC) - S_2(ABC)| = |S_1(LBC) - S_2(LBC)|$$
$$\leqslant P(LBC) = \frac{n}{2} \leqslant \frac{1}{2}\max\{m,n\}.$$

(c) Odredimo $f(2k+1, 2k)$. Kao u b) promatrajmo točku L na $\overline{AC}$ tako da je $|AL| = 2k$. Budući da je $f(2k,2k) = 0$ i $S_1(ABL) = S_2(ABL)$, vrijedi

$$f(2k+1, 2k) = |S_1(LBC) - S_2(LBC)|.$$

Površina trokuta LBC jednaka je k. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je dijagonala $\overline{BL}$ crna (vidi sliku 7.3.). Tada se bijeli dio trokuta LBC sastoji od nekoliko trokuta: CLN_{2k}, $M_{2k-1}L_{2k-1}N_{2k-1}$, ..., $M_1L_1N_1$, od kojih je svaki sličan trokutu CAB. Njihova ukupna površina jednaka je

$$\begin{aligned} S_2(LBC) &= \frac{1}{2}\frac{2k}{2k+1}\left(\left(\frac{2k}{2k}\right)^2+\left(\frac{2k-1}{2k}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2k}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{4k(2k+1)}(1^2+2^2+\ldots+(2k)^2)=\frac{4k+1}{12}. \end{aligned}$$



Sl. 1.3.

Prema tome

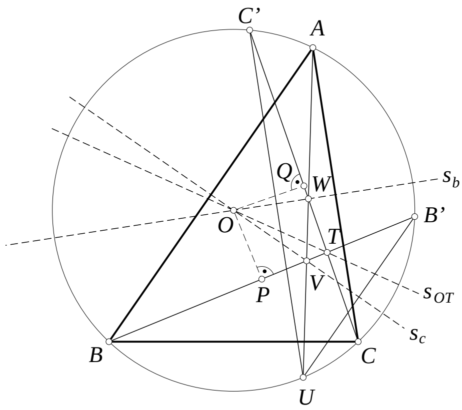
$$S_1(LBC)=k-\frac{1}{12}(4k+1)=\frac{1}{12}(8k-1)$$

i

$$f(2k+1,2k)=\frac{2k-1}{6}.$$

Ova funkcija može poprimiti po volji veliku vrijednost.

2. *Geometrijsko rješenje.* Neka su s_b i s_c simetrale stranica $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC.



Sl. 1.4.

S obzirom na osnu simetriju u odnosu na pravac s_b, točka A se preslika na C i U na C'. S obzirom na osnu simetriju u odnosu na pravac s_c, točka A se preslika na B i U na B'.

Središte kružnice O je jednako udaljeno od AU i CC' jer je ono na simetrali baza $\overline{AC}$ i $\overline{UC'}$ jednakokračnog trapeza $CAC'U$; i nadalje $|CC'| = |AU|$.

Iz istog razloga je točka O na simetrali baza $\overline{AB}$ i $\overline{UB'}$ jednakokračnog trapeza $ABUB'$; i nadalje $|BB'| = |AU|$.

Dakle, točka O je jednako udaljena od BB' i CC'. Točka $T = BB' \cap CC'$ je na simetrali kuta $\sphericalangle BTC' = \sphericalangle VTW$. Tada je

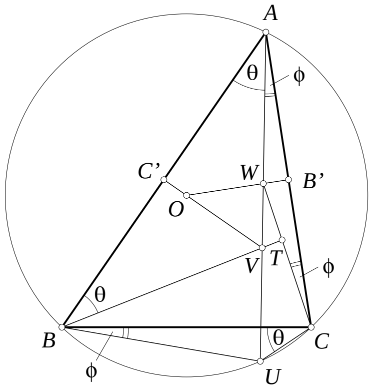
$$\begin{gathered}\triangle BTO \cong \triangle C'TO \\ (|OB| = |OC|, \quad |OT| = |OT|, \quad \sphericalangle BTO = \sphericalangle C'TO) \\ \Rightarrow |BT| = |C'T|.\end{gathered}$$

Sada je

$$|AU| = |CC'| = |CT| + |TC'| = |TC| + |TB|.$$

Službeno rješenje. Neka je $\alpha = \sphericalangle A$ najmanji kut, te neka su B', C' polovišta stranica $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ i $\theta = \sphericalangle BAU$, $\phi = \sphericalangle UAC$. Budući da je WB' simetrala stranice $\overline{AC}$, $\sphericalangle ACW = \phi$ i analogno jer je VC' simetrala stranice $\overline{AB}$, $\sphericalangle ABV = \theta$. Sada je

$$\sphericalangle BTC = \pi - (\beta - \theta + \gamma - \phi) = \alpha + (\theta + \phi) = \alpha + \alpha = 2\alpha.$$



Sl. 1.5.

Prema sinusovom poučku za trokut BTC je

$$\frac{|TB|}{\sin(\gamma-\phi)}=\frac{|TC|}{\sin(\beta-\theta)}=\frac{|BC|}{\sin 2\alpha}=\frac{2R\sin\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{R}{\cos\alpha},$$

gdje je R polumjer opisane kružnice. (Primijetite da je zbog uvjeta na α, $\cos\alpha>0$ i da je $\beta-\theta>0$ i $\gamma-\phi>0$.) Odavde slijedi

$$\begin{aligned}|TB|+|TC|&=\frac{R}{\cos\alpha}(\sin(\beta-\theta)+\sin(\gamma-\phi))\\&=\frac{2R\sin\dfrac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta-\gamma+\phi-\theta}{2}}{\cos\alpha}=2R\cos\frac{\beta-\gamma+\phi-\theta}{2}.\end{aligned}$$

Kako su točke U, A, B i C na kružnici, $\sphericalangle UBC=\phi$ i $\sphericalangle UCB=\theta$, odakle je

$$\begin{aligned}|AU|&=2R\sin(\beta+\phi)=2R\sin(\gamma+\theta)\\&=R(\sin(\beta+\phi)+\sin(\gamma+\theta))\\&=2R\sin\frac{\beta+\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma+\phi-\theta}{2}\\&=2R\cos\frac{\beta-\gamma+\phi-\theta}{2},\end{aligned}$$

odakle je $|AU|=|TB|+|TC|$.

3. Za svaku permutaciju $\pi=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ od $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ označimo sa $S(\pi)$ sumu $y_1+2y_2+\ldots+ny_n$. Neka je $r=(n+1)/2$. Treba pokazati da je $|S(\pi)\leqslant r$ barem za jednu permutaciju π.

Neka je π_0 identična permutacija, tj. $\pi_0=(x_1,\ldots,x_n)$, a $\tilde{\pi}=(x_n,\ldots,x_1)$. Ako je $|S(\pi_0)|\leqslant r|$ ili $|S(\tilde{\pi})|\leqslant r$, tada je istinita tvrdnja. Pretpostavimo zato da je $|S(\pi_0)|>r$ i $|S(\tilde{\pi})|>r$. Primijetimo da je

$$\begin{aligned}S(\pi_0)+S(\tilde{\pi})&=(x_1+2x_2+\ldots+nx_n)+(x_n+2x_{n-1}+\ldots+nx_1)\\&=(n+1)(x_1+\ldots+x_n),\end{aligned}$$

pa je $|S(\pi_0) + S(\tilde{\pi})| = n + 1 = 2r$. Kako je svaki od brojeva $S(\pi_0)$ i $S(\tilde{\pi})$ po modulu veći od r, oni moraju biti suprotnih predznaka. Jedan od njih je veći od r, a drugi manji od $-r$.

Počevši od permutacije π_0 možemo dobiti svaku permutaciju uzastopnim zamjenama susjednih elemenata. Posebno, postoji niz permutacija π_0, π_1, ..., π_m tako da je $\pi_m = \tilde{\pi}$ i, za svaki $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ permutacija π_{i+1} dobiva se iz π_i zamjenama dvaju uzastopnih članova.

To znači da ako je $\pi_i = (y_1, \ldots, y_n)$ i $\pi_{i+1} = (z_1, \ldots, z_n)$, tada postoji indeks $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ tako da je

$$z_k = y_{k+1}, \quad z_{k+1} = y_k, \quad z_j = y_j \quad \text{za} \quad j \neq k, k+1.$$

Budući da brojevi x_i po modulu nisu veći od r, dobivamo

$$\begin{aligned}|S(\pi_{i+1}) - S(\pi_i)| &= |kz_k + (k+1)z_{k+1} - ky_k - (k+1)y_{k+1}| \\ &= |y_k - y_{k+1}| \leqslant |y_k| + |y_{k+1}| \leqslant 2r.\end{aligned}$$

To znači da razlika između susjednih članova u nizu $S(\pi_0)$, $S(\pi_1)$, ..., $S(\pi_m)$ nije veća od $2r$.

Brojevi $S(\pi_0)$ i $S(\pi_m)$, promatrani kao brojevi na realnom pravcu, leže izvan intervala $[-r, r]$ i to s njegovih različitih strana. Odavde slijedi da se barem jedan od brojeva $S(\pi_i)$ nalazi u tom intervalu. Zato je $|S(\pi_i)| \leqslant r$ za neko π_i.

4. (a) Neka je $n > 1$ cijeli broj. Pretpostavimo da postoji $n \times n$ srebrna matrica A. Neka je x neki element is skupa $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ koji se ne pojavljuje na dijagonali. (Takav element postoji, jer ima n elemenata na dijagonali, ali ukupno $2n-1$ elemenata.) Uniju i-tog retka i i-tog stupca nazvat ćemo i-ti križ. Inače, element x pojavljuje se u svakom križu točno jedanput. Ako je x (i, j)-ti element od A, tada on pripada i-tom i j-tom križu. Reći ćemo da su u ovom slučaju ova dva križa obilježena sa x. (Npr. u drugom primjeru pod (b) prvi i četvrti križ su obilježeni sa 6.) To znači da smo svih n križeva podijelili u parove x-obilježenih, pa je zato n paran. Kako je $n = 1997$ neparan broj, ne postoji srebrna matrica za taj n.

(b) Za $n = 2$ je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

srebrna matrica. Za $n = 4$ ima više primjera, od kojih je jedan npr.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 7 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sada se indukcijom može konstruirati beskonačno mnogo srebrnih matrica, kao što pokazuje ovaj primjer:

$$B = \begin{bmatrix} A & Y \\ X & A \end{bmatrix}$$

gdje je A srebrna matrica s elementima $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$,

$$X = \begin{bmatrix} 2n & 2n+1 & \ldots & 3n-1 \\ 3n-1 & 2n & \ldots & 3n-2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 3m+1 & 3n+2 & \ldots & 2n \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 3n & 3n+1 & \ldots & 4n-1 \\ 4n-1 & 3n & \ldots & 4n-2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 3n+1 & 3n+2 & \ldots & 3n \end{bmatrix}.$$

Matrica B je također srebrna.

5. Jednadžbu

$$x^{y^2} = y^x \tag{1}$$

zapišimo u obliku

$$\left(\frac{x}{y^2}\right)^{y^2} = y^{x-2y^2}. \tag{2}$$

Očito mora biti $x^2 \neq 2y^2$.

Ako je $x > 2y^2$, onda je $\dfrac{x}{y^2} = k \in \mathbf{N}$, $x = ky^2$, pa se iz (2) dobiva

$$k^{y^2} = y^{ky^2-2y^2}, \quad \text{tj. } k = y^{k-2}.$$

Za $k = 1$, rješenje je $(1, 1)$.
Za $k = 2$ nema rješenja.
Za $k = 3$, rješenje je $(27, 3)$.
Za $k = 4$, rješenje je $(16, 2)$.
Za $k \geqslant 5$ je

$$\begin{aligned} y^{k-2} &\geqslant 2^{k-2} = 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \\ &\geqslant 2 \cdot 2 \cdot \frac{k-3}{k-2} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} = 4(k-3) > k \quad \text{za } k \geqslant 5. \end{aligned}$$

Ako je $x < 2y^2$ iz (2) se dobiva

$$\left(\frac{y^2}{x}\right)^{y^2} = y^{2y^2-x} \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{x} = m \in \mathbf{N}, \quad y^2 = mx.$$

Odavde i iz (1) se dobiva

$$x^{2y^2} = y^{2x} \quad \Rightarrow \quad x^{2mx} = (mx)^x, \quad x^{2m} = mx \ \text{ tj. } x^{2m-1} = m.$$

Za $m = 1$, rješenje je $(1; 1)$, već nađeno.
Za $m \geqslant 2$ je

$$\begin{aligned} x^{2m-1} &\geqslant 2^{2m-1} = 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \\ &\geqslant \frac{2m-1}{2m-2} \cdot \frac{2m-2}{2m-3} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} = 2m-1 > m, \end{aligned}$$

pa u ovom slučaju nema nijednog rješenja.

6. Ako je $n = 2k + 1$ bilo koji neparan cijeli broj veći od 1, tada svaki prikaz od n u traženom obliku ima "$1''$ kao jedan od sumanada. Ako ga uklonimo dobivamo prikaz broja $2k$. I obratno, ako dodamo "$1''$ prikazu broja $2k$ dobivamo prikaz od $2k+1$. Ovo pridruživanje je bijektivno. Zato vrijedi ova rekurzivna formula

$$f(2k+1) = f(2k). \tag{1}$$

Nadalje, ako je $n = 2k$ bilo koji pozitivan paran cijeli broj, tada svaki prikaz od n ima jedan od ova dva oblika: ili sadrži jedan sumand "$1''$ ili nema takvog sumanda. U prvom slučaju možemo oduzeti jednu "1" i dobiti prikaz od $2k - 1$. Na taj način se dobije bijekcija između prikaza prvog oblika od $2k$ i svih prikaza od $2k-1$. U prikazima drugog oblika (ovdje nijedan član nije jednak 1), možemo svaki član podijeliti s 2 i dobiti prikaz broja k. Ovo pridruživanje je bijektivno. Time dobivamo drugu rekurzivnu formulu

$$f(2k) = f(2k-1) + f(k). \tag{2}$$

Svaka od ovih formula vrijedi za svaki cijeli broj $k \geqslant 1$. Očigledno je $f(1) = 1$. Stavimo li $f(0) = 1$, formula (1) vrijedi i za $k = 0$. Iz (1) i (2) slijedi da je funkcija f nepadajuća.

Prema (1), broj $f(2k-1)$ u formuli (2) se može zamijeniti s $f(2k-2)$, pa dobivamo

$$f(2k) - f(2k-2) = f(k), \quad \text{za } k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Uzimajući broj $n \geqslant 1$ i sumirajući ove jednakosti za $k = 1, 2, \ldots, n$, dobivamo ovu formulu

$$f(2n) = f(0) + f(1) + \ldots + f(n) \quad \text{za } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3}$$

Gornja ocjena se sada lako dobije: u fomuli (3) nijedan sumand nije veći od posljednjeg. Kako je $2 = f(2) \leqslant f(n)$ za $n \geqslant 2$, dobivamo

$$\begin{aligned} f(2n) &= 2 + (f(2) + \ldots + f(n)) \leqslant 2 + (n-1)f(n) \\ &\leqslant f(n) + (n-1)f(n) = nf(n) \quad \text{za } n = 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$

Specijalno, u našem slučaju je

$$\begin{aligned} f(2^n) &\leqslant 2^{n-1} \cdot f(2^{n-1}) \leqslant 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdot f(2^{n-2}) \\ &\leqslant \ldots \leqslant 2^{(n-1)+(n-2)+\ldots+1} \cdot f(2) = 2^{n(n-1)/2} \cdot 2. \end{aligned}$$

Kako je $2^{n(n-1)/2} \cdot 2 < 2^{n^2/2}$ za $n > 3$, vrijedi gornja ocjena.

Da dokažemo donju ocjenu, pokažimo najprije da vrijedi nejednakost

$$f(b+1) - f(b) \geqslant f(a+1) - f(a) \tag{4}$$

za cijele brojeve $b \geqslant a \geqslant 0$ jednake parnosti. Naime: ako su a i b oba parni, tada su prema (1) s obje strane nule; ako su a i b neparni, tada je prema (2) $f(b+1) - f(b) = f((b+1)/2)$, $f(a+1) - f(a) = f((a+1)/2)$ nejednakost (4) vrijedi jer je funkcija f nepadajuća.

Uzmimo sada cijele brojeve $r \geqslant k \geqslant 1$, r paran, i uvrstimo redom u (4) brojeve $a = r - j$, $b = r + j$ za $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Zbrajanjem dobivenih nejednakosti dobivamo

$$f(r+k) - f(r) \geqslant f(r+1) - f(r-k+1).$$

Jer je r paran, $f(r+1) = f(r)$ i

$$f(r+k) + f(r-k+1) \geqslant 2f(r) \quad \text{za} \ k = 1, \dots, r.$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti za $k = 1, \dots, r$ dobivamo

$$f(1) + f(2) + \dots + f(2r) \geqslant 2rf(r).$$

Prema (3), suma na lijevoj strani je jednaka $f(4r) - 1$ i

$$f(4r) \geqslant 2rf(r) + 1 > 2rf(r) \quad \text{za svaki cijeli broj} \ r > 2.$$

Uzimajući $r = 2^{m-2}$, dobivamo

$$f(2^m) > 2^{m-1}f(2^{m-2}). \tag{5}$$

Da bi $r = 2^{m-2}$ bilo parno, m mora biti cijeli broj veći od 2; primijetimo da (5) vrijedi i za $m = 2$.

Napokon, neka je n bilo koji cijeli broj veći od 1. Ako je l pozitivan cijeli broj takav da je $2l < n$, primijenimo nejednakost (5) za $m = n, n-1, \dots, n-2l+2$ i dobivamo

$$\begin{aligned} f(2^n) &> 2^{n-1} \cdot f(2^{n-2}) > 2^{n-1} \cdot 2^{n-3} \cdot f(2^{n-4}) \\ &> \dots > 2^{(n-1)+(n-3)+\dots+(n-2l+1)} \cdot f(2^{n-2l}) = 2^{l(n-l)} \cdot f(2^{n-2l}). \end{aligned}$$

Ako je n paran, stavimo $l = n/2$; ako je n neparan, neka je $l = (n-1)/2$. Dobivaju se ove nejednakosti

$$\begin{aligned} f(2^n) &> 2^{n^2/4} \cdot f(2^0) = 2^{n^2/4} \text{za} \ n \ \text{paran}, \\ f(2^n) &> 2^{(n^2-1)/4} \cdot f(2^1) = 2^{(n^2-1)/4} \cdot 2 > 2^{n^2/4} \text{za} \ n \ \text{neparan}. \end{aligned}$$

Dobili smo traženu ocjenu za $n \geqslant 2$. (Ona vrijedi i za $n = 1$, što se može neposredno provjeriti.)

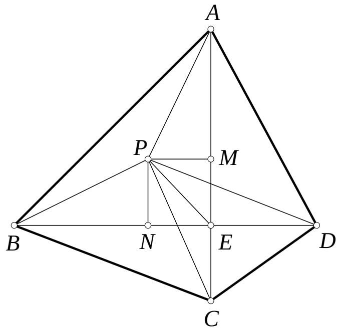
XXXIX.

1. Neka je E sjecište pravaca AC i BD. Radi simetrije možemo pretpostaviti da je P unutar $\triangle ABE$. Označimo s M i N odgovarajuća nožišta okomica iz P na AC i BD. Sada ćemo, bez pretpostavke da je $|PA| = |PB|$ i $|PC| = |PD|$, izraziti površine $P(ABP)$ i $P(CDP)$ kako slijedi:

$$\begin{aligned} 2P(ABP) &= 2P(ABE) - 2P(PAE) - 2P(PBE) \\ &= (|AM| + |PN|)(|BN| + |PM|) - (|AM| + |PN|)|PM| \\ &\quad - (|BN| + |PM|)|PN| \\ &= |AM| \cdot |BN| - |PM| \cdot |PN|, \\ 2P(CDP) &= 2P(CDE) + 2P(PCE) + 2P(PDE) \\ &= (|CM| - |PN|)(|DN| - |PM|) + (|CM| - |PN|)|PM| \\ &\quad + (|DN| - |PM|)|PN| \\ &= |CM| \cdot |DN| - |PM| \cdot |PN|. \end{aligned}$$

Odavde je

$$2[P(ABP) - P(CDP)] = |AM| \cdot |BN| - |CM| \cdot |DN|. \tag{}$$



Sl. 2.1.

Sada ćemo iskoristiti uvjete $|PA| = |PB|$ i $|PC| = |PD|$. Pretpostavimo najprije da je $ABCD$ tetivni četverokut. Zbog jedinstvenosti točke P ona mora biti središte opisane mu kružnice. Zato su M i N polovišta stranica $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$, tim redom. Zato je $|AM| = |CM|$ i $|BN| = |DN|$, pa iz (7.1) slijedi $P(ABP) = P(CDP)$. Obratno, neka je $P(ABP) = P(CDP)$. Prema (7.1) je $|AM| \cdot |BN| = |CM| \cdot |DN|$. Ako je $|PA| \neq |PC|$, zbog simetrije možemo uzeti da je $|PA| > |PC|$. Tada je $|AM| > |CM|$, a isto tako je $|BN| > |DN|$, jer je $|PB| > |PD|$. Odavde slijedi $|AM| \cdot |BN| > |CM| \cdot |DN|$, što je kontradikcija. Dakle, $|PA| = |PC|$, što znači da je P na jednakoj udaljenosti od A, B, C i D. To znači da je $ABCD$ tetivni četverokut.

2. Kako ima $\binom{b}{2}$ parova sudaca i svaki par se podudara u najviše k natjecatelja, ukupni broj podudaranja je najviše $k\binom{b}{2}$. Za $1 \leqslant i \leqslant a$, neka je i-ti natjecatelj prošao kod x_i, i pao kod y_i sudaca, pri čemu je $x_i + y_i = b$. Tada je broj parova sudaca koji se podudaraju na tom natjecatelju jednak

$$\begin{aligned}\binom{x_i}{2} + \binom{y_i}{2} &= \frac{1}{2}(x_i^2 + y_i^2 - x_i - y_i) \\ &\geqslant \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(x_i + y_i)^2 - b\right] \\ &= \frac{1}{4}[(b-1)^2 - 1].\end{aligned}$$

Kako je b neparan, možemo uzeti da je donja granica $\frac{1}{4}(b-1)^2$. Odavde slijedi

$$k\binom{b}{2} \geqslant \sum_{i=1}^{a}\left[\binom{x_i}{2} + \binom{y_i}{2}\right] \geqslant \frac{a(b-1)^2}{4}.$$

Odavde se dobiva tražena ocjena.

3. Za relativno proste brojeve a i b je $\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$. Neka je $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_t^{k_t}$, gdje su p_1, p_2, ..., p_t različiti prosti brojevi i k_1, k_2, ..., k_t pozitivni brojevi. Tada je $\tau(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_t + 1)$ i $\tau(n^2) = (2k_1 + 1)(2k_2 + 1) \dots (2k_t + 1)$. Odavde slijedi da je $\tau(n^2)$ uvijek neparan, pa mogu zadovoljavati samo neparni brojevi k. Pokazat ćemo da zadovoljava svaki neparan pozitivan cijeli broj k, tj. da je

$$k = \frac{2k_1+1}{k_1+1} \cdot \frac{2k_2+1}{k_2+1} \cdot \ldots \cdot \frac{2k_t+1}{k_t+1}$$

za neke pozitivne cijele brojeve k_1, k_2, ..., k_t.

Prirodno je da pokušamo dokazati tvrdnju indukcijom po k. Tvrdnja vrijedi za $k=1$ jer je $\frac{\tau(1^2)}{\tau(1)} = 1$. Svaki neparan cijeli broj $k > 1$ koji je oblika $4s+1$ zadovoljava jer je $k = \frac{4s+1}{2s+1}(2s+1)$. Broj $2s+1 < k$ zadovoljava po pretpostavci indukcije. Zato i k zadovoljava.

Nadalje, ako je k oblika $4s+3$, $\frac{k+1}{2}$ je paran broj. Moramo promatrati dva slučaja, $k = 8r+3$ i $k = 8r+7$. U prvom slučaju je

$$k = \frac{24r+9}{12r+5} \cdot \frac{12r+5}{6r+3}(2r+1),$$

pa ovaj k također zadovoljava. U drugom slučaju brojeve opet dijelimo u dvije klase, itd. Da bi se završio dokaz treba gornju ideju formulirati u općem slučaju.

Tvrdimo da ako je x zadovoljavajući, takav je i $2^j x - 1$ za svaki $j > 1$. Neka je l takav da je $\frac{\tau(l^2)}{\tau(l)} = x$. Za $j=1$, neka je $n = p^{x-1} l$ gdje je p prost broj koji ne dijeli l. Tada je $\frac{\tau(n^2)}{\tau(n)} = \frac{2x-1}{x} \cdot x = 2x-1$. Za $j > 1$ neka je

$$n = p_1^{2^{j-1}\cdot 3x-2} p_2^{2^{j-2}\cdot 3^2 x-2} \ldots p_{j-1}^{2\cdot 3^{j-1}x-2} p_j^{3^{j-1}x-1} l,$$

gdje su p_1, p_2, ..., p_j međusobno različiti prosti brojevi koji ne dijele l. Tada je

$$\frac{\tau(n^2)}{\tau(n)} = \frac{2^j\cdot 3x-3}{2^{j-1}\cdot 3x-1} \cdot \frac{2^{j-1}\cdot 3^2x-3}{2^{j-2}\cdot 3^2x-1} \cdot \ldots$$

$$\ldots \cdot \frac{2^2\cdot 3^{j-1}x-3}{2\cdot 3^{j-1}x-1} \cdot \frac{2\cdot 3^{j-1}x-1}{3^{j-1}x} \cdot x = 2^j x - 1.$$

Odavde slijedi tvrdnja za $j > 1$.

Time smo pokazali da je svaki neparan cijeli broj zadovoljavajući. Na početku smo pokazali da je 1 zadovoljavajući. Za svaki neparan cijeli broj $k > 1$ je $k+1 = 2^j x$, gdje je $x < k$ neparan broj. Kako je x zadovoljavajući, takav je i $k = 2^k x - 1$. Dakle svi neparni borjevi su zadovoljavajući.

4. Ako je a^2b+a+b djeljivo s ab^2+b+7, onda je takav i broj

$$b(a^2b+a+b) - a(ab^2+b+7) = b^2 - 7a.$$

Kako je $a > 1$, onda je $b^2 - 7a < ab^2+b+7$. Ako je $b^2 - 7a \geqslant 0$, tada je $b^2 - 7a = 0$ i 7 dijeli b, pa je

$$(a, b) = (7c^2, 7c) \quad \text{za neki pozitivan cijeli broj } c.$$

U ovom slučaju je $a^2b+a+b = 7c(49c^4+c+1)$ djeljivo s $ab^2+b+7 = 7(49c^4+c+1)$.

Promatrajmo sada slučaj $b^2 - 7a < 0$. Tada je pozitivan broj $7a - b^2$, manji od $7a$, djeljiv s ab^2+b+7. To je moguće samo ako je $b=1$ ili $b=2$, jer je inače $ab^2+b+7 > 9a$.

Za $b = 1$, broj $7a - 1$ mora biti djeljiv s $a + 8$. Sada je $7a - 1 = 7(a + 8) - 57$, a iz faktorizacije $57 = 1 \cdot 57 = 3 \cdot 19$ dobivamo $a = 11$ ili $a = 49$, što su jedine mogućnosti. Za $(a, b) = (11, 1)$, broj $ab^2 + b + 7 = 19$ dijeli $a^2b + a + b = 133$. Za $(a, b) = (49, 1)$ broj $ab^2 + b + 7 = 57$ dijeli $a^2b + a + b = 2451$.

Za $b = 2$, broj $7a - 4$ mora biti djeljiv s $4a + 9$. Sada iz $4(7a - 4) = 7(4a + 9) - 79$, a 79 nema djelitelja oblika $4a + 9$, pa u ovom slučaju nema rješenja.

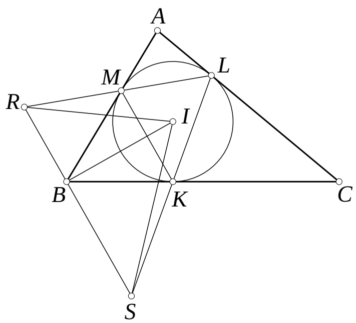
Dakle, rješenja su $(a, b) = (7c^2, 7c), \quad c = 1, 2, \ldots, \ (a, b) = (11, 1)$ i $(a, b) = (49, 1)$.

5. Budući da su pravci MK i RS paralelni u $\triangle BMR$ imamo,

$$\sphericalangle BMR = 90^\circ - \sphericalangle\frac{A}{2},$$
$$\sphericalangle MBR = 90^\circ - \sphericalangle\frac{B}{2},$$
$$\sphericalangle BRM = 90^\circ - \sphericalangle\frac{C}{2}.$$

Koristeći sinusov poučak, dobivamo

$$|BR| = \frac{\cos(\frac{\sphericalangle A}{2})}{\cos(\frac{\sphericalangle C}{2})} \cdot |BM|. \qquad ()$$



Sl. 2.2.

Slično u $\triangle BKS$ imamo,

$$\sphericalangle BKS = 90^\circ - \sphericalangle\frac{C}{2},$$
$$\sphericalangle BSK = 90^\circ - \sphericalangle\frac{A}{2},$$
$$\sphericalangle KBS = 90^\circ - \sphericalangle\frac{B}{2},$$

tako da je

$$|BS| = \frac{\cos\left(\frac{\sphericalangle C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\sphericalangle A}{2}\right)} \cdot |BK| = \frac{\cos\left(\frac{\sphericalangle C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\sphericalangle A}{2}\right)} \cdot |BM|. \qquad ()$$

Primijetimo da je $BI \perp RS$ i $IK \perp AB$. Iz (7.2) i (7.3) je,

$$\begin{aligned}|IR|^2 + |IS|^2 - |RS|^2 &= (|BI|^2 + |BR|^2) + (|BI|^2 + |BS|^2) - (|BR| + |BS|)^2 \\ &= 2(|BI|^2 - |BR| \cdot |BS|) \\ &= 2(|BI|^2 - |BM|^2) \\ &= 2|IM|^2 > 0.\end{aligned}$$

Prema kosinusovom poučku je $\sphericalangle RIS$ šiljast.

6. Označimo sa S skup funkcija koje promatramo. Neka je f bilo koja od njih, pri čemu je $f(1) = a$. Za $t = 1$ i $s = 1$ dobivamo,

$$f(f(s)) = a^2 s, \quad f(at^2) = [f(t)]^2 \quad \text{za sve } s, t \in \mathbf{N}.$$

Odavde i iz početne jednakosti dobivamo

$$\begin{aligned}[f(s)f(t)]^2 = [f(s)]^2 f(at^2) &= f\left(s^2 f\left(f(at^2)\right)\right) \\ &= f(s^2 a^2 a t^2) = f\left(a(ast)^2\right) \\ &= [f(ast)]^2.\end{aligned}$$

Odavde slijedi, $f(ast) = f(s)f(t)$ za sve s, t; specijalno, $f(as) = af(s)$, pa je

$$af(st) = f(s)f(t) \quad \text{za sve } s, t \in \mathbf{N}. \qquad ()$$

Sada ćemo pokazati da je $f(t)$ djeljivo s a za svaki $t \in \mathbf{N}$. Za svaki prost broj p označimo s p^α i p^β najveće potencije od p s kojima su a i $f(t)$ djeljivi, tim redom. Matematičkom indukcijom se iz (7.4) dokaže da je $[f(t)]^k = a^{k-1} f(t^k)$ za svaki $k \in \mathbf{N}$. Najveća potencija s kojom p dijeli $[f(t)]^k$ je $p^{k\beta}$; dok je ona s kojom dijeli a^{k-1} jednaka $p^{(k-1)\alpha}$. Dakle, $k\beta \geqslant (k-1)\alpha$ za svaki $k \in \mathbf{N}$, što je moguće samo ako je $\beta \geqslant \alpha$. Tvrdnja vrijedi za svaki prost broj p, i zato a dijeli $f(t)$.

Možemo staviti $g(t) = \dfrac{f(t)}{a}$, čime dobivamo novu funkciju $g : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$. Svojstva funkcije f mogu se zapisati pomoću funkcije g:

$$g(a) = a, \quad g(st) = g(s)g(t), \quad g(g(s)) = s \quad \text{za svaki } s, t \in \mathbf{N}. \qquad ()$$

Ustvari, $g(st) = g(s)s(t)$ je ekvivalenatno s (7.4), a $g(g(s)) = s$ slijedi iz

$$\begin{aligned}ag(g(s)) = g(a)g(g(s)) = g(ag(s)) &= g(f(s)) \\ &= \frac{f(f(s))}{a} = \frac{a^2 s}{a} = as.\end{aligned}$$

Iz (7.5) se lako dobije $g(t^2 g(s)) = g(t^2)g(g(s)) = s[g(t)]^2$ za svaki $s, t \in \mathbf{N}$. Dakle, g je is skupa S, i njezine vrijednosti nisu veće od odgovarajućih vrijednosti od f. Zato možemo reducirati promatranje na funkcije g koje zadovoljavaju (7.5). Bitna činjenica je da svaka funkcija tog oblika preslikava proste brojeve u proste brojeve.

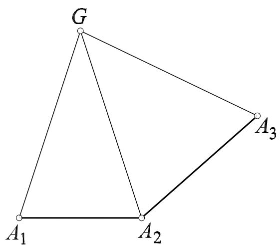
Zaista, ako je p prost broj i $g(p) = uv$ za neke pozitivne cijele brojeve u, v, prema (7.5) je, $p = g(g(p)) = g(uv) = g(u)g(v)$, pa bar jedan od brojeva $g(u)$ i $g(v)$ mora biti 1. Ako je npr. $g(u) = 1$, tada je $u = g(g(u)) = g(1) = 1$, što znači da je $g(p)$ prost broj.

Da odredimo traženu minimalnu vrijednost, uzmimo neku funkciju g koja zadovoljava (7.5). Ona je injekcija ($g(s) = g(t)$ povlači $s = g(g(s)) = g(g(t)) = t$), i preslikava različite proste brojeve u različite proste brojeve. Dakle, donja granica za

$g(1998) = g(2 \cdot 3^3 \cdot 37) = g(2)[g(3)]^3 g(37)$ se dostiže kada su $g(2)$, $g(3)$, $g(37)$ tri najmanja prosta broja 2, 3, 5, pri čemu je $g(3) = 2$. Tada je $g(1998) \geqslant 3 \cdot 2^3 \cdot 5 = 120$ za svaku funkciju $g \in S$. Postoji takva funkcija $g \in S$ da je $g(1998) = 120$, što znači da je minimalna vrijednost jednaka 120. Da još to pokažemo, neka je $g(1) = 1$, i definirajmo g na prostim brojevima na ovaj način: $g(2) = 3$, $g(3) = 2$, $g(5) = 37$, $g(37) = 5$ i $g(p) = p$ za svaki prost broj $p \neq 2, 3, 5, 37$. Definicija se dalje prenosi na svaki $t = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \in \mathbf{N}$ stavljajući $g(t) = g(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}) = g(p_1)^{\alpha_1} g(p_2)^{\alpha_2} \dots g(p_k)^{\alpha_k}$. Uvjet (7.5) je ispunjen (s $a = 1$), pa je $g \in S$. Očito je $g(1998) = 120$, čime je tvrdnja dokazana.

XL.

1. Neka je r_{PQ} simetrija u odnosu na simetralu dužine $\overline{PQ}$ i neka je G težište skupa S. Iz $r_{AB}(S) = S$ slijedi, $r_{AB}(G) = G$ za svake dvije točke A, $B \in S$, pa su sve točke od S na jednakoj udaljenosti od G. To znači da se sve točke skupa S nalaze na kružnici.



Sl. 3.1.

Točke skupa S su vrhovi konveksnog n-terokuta $A_1A_2 \dots A_n$. Simetrija u odnosu na simetralu dužine A_1A_3 preslikava svaku poluravninu određenu tom simetralom na onu drugu, pa je $r_{A_1A_3}(A_2) = A_2$. Dakle, $|A_1A_2| = |A_2A_3|$. Na sličan način je $|A_2A_3| = |A_3A_4| = \dots = |A_nA_1|$. Kako se skup S nalazi na kružnici, odavde slijedi da je $A_1A_2 \dots A_n$ pravilni poligon. Pravilni n-terokut očito zadovoljava uvjete zadatka.

2. (a) Dana nejednakost je simetrična i homogena, pa možemo pretpostaviti da je $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \dots \geqslant x_n \geqslant 0$ i $\sum_i x_i = 1$. U ovom slučaju treba maksimizirati sumu

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i<j} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2).$$

Pokušajmo povećati vrijednost od F zamjenom vektora $x = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, 0, \dots, 0)$ sa $x' = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + x_{k+1}, 0, 0, \dots, 0)$, ($x_{k+1}$ je zadnja koordinata koja je različita od nule i $k \geqslant 2$):

$$\begin{aligned} F(x') - F(x) &= x_k x_{k+1} \left[3(x_k + x_{k+1}) \sum_{i=1}^{k-1} x_i - x_k^2 - x_{k+1}^2 \right] \\ &= x_k x_{k+1} \left[3(x_k + x_{k+1})(1 - x_k - x_{k+1}) - x_k^2 - x_{k+1}^2 \right] \\ &= x_k x_{k+1} [(x_k + x_{k+1})(3 - 4(x_k + x_{k+1})) + 2x_k x_{k+1}]. \end{aligned}$$

Iz

$$1 \geqslant x_1 + x_k + x_{k+1} \geqslant \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1}) + x_k + x_{k+1}$$

slijedi $2/3 \geqslant x_k + x_{k+1}$, i

$$F(x') - F(x) > 0.$$

Nakon nekoliko ovakvih zamjena dobivamo

$$\begin{aligned} F(x) &\leqslant F(a, b, 0, \ldots, 0) = ab(a^2 + b^2) = \frac{1}{2}(2ab)(1 - 2ab) \\ &\leqslant \frac{1}{8} = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0\right). \end{aligned}$$

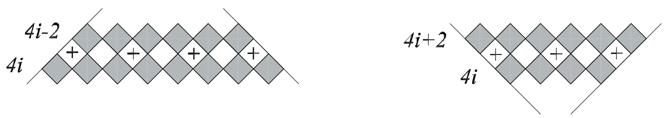
Konstanta C je jednaka $\frac{1}{8}$.

(b) Jednakost vrijedi ako i samo ako su dva x_i jednaka (pa čak i jednaka nuli), a preostali su jednaki nuli.

3. Obojimo najprije ploču crno-bijelo, kao šahovsku ploču. Neka je $f(n)$ broj koji treba naći, a $f_b(n)$ najmanji broj bijelih polja koja treba označiti tako da svako crno polje ima bijelo susjedno polje. Analogno se definira $f_c(n)$. Zbog simetričnosti šahovske ploče $(n = 2k)$, je $f_b(n) = f_c(n)$ i $f(n) = f_b(n) + f_c(n)$.

Zgodnije će biti da promatramo ploču duž linija paralelnih najdužoj crnoj dijagonali koju postavimo horizontalno. 'Duljine' crnih linija su 2, 4, ..., $2k$, ..., 4, 2, a bijelih linija 1, 3, ..., $2k - 1$, $2k - 1$, ..., 3, 1.

Označimo križićem 'neparna' polja na bijelim linijama ispod crnih linija čije duljine nisu višekratnici od 4.



Sl. 3.2.

U prvom slučaju (iznad dijagonale), između uzastopnih crnih linija 'duljina' $4i$ i $4i - 2$, ima $2i$ prekrižena polja, a u drugom slučaju (ispod dijagonale), između crnih linija 'duljina' $4i$ i $4i + 2$, ima ih $2i + 1$. Ukupan broj prekiženih bijelih polja je

$$2 + 4 + \ldots + k + \ldots + 3 + 1 = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Sada svako crno polje ima susjedno bijelo prekriženo polje. Zato je

$$f_b(n) \leqslant \frac{k(k+1)}{2}.$$

Promatrajmo sada $k(k+1)/2$ prekrižena bijela polja. Oni nemaju zajedničkih susjednih crnih polja, pa stoga treba označiti barem $k(k+1)/2$ crnih polja da bismo pokrili sva bijela polja. Prema tome,

$$f_c(n) \geqslant \frac{k(k+1)}{2}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} f_b(n) &= f_c(n) = \frac{k(k+1)}{2}, \\ f(n) &= k(k+1). \end{aligned}$$

Napomena. Na sličan način se dokazuje da je

$$f(n) = \begin{cases} 4k^2 - 1 & \text{za } n = 4k-1 \\ (2k+1)^2 & \text{za } n = 4k+1. \end{cases}$$

4. Očigledna rješenja su $(1, p)$ i $(2, 2)$, a za svako drugo rješenje je $p \geqslant 3$.

Preostaje naći rješenja oblika (n, p), gdje je $n \geqslant 2$ i $p \geqslant 3$. Koristimo tvrdnju, koju ćemo i dokazati, da je n djeljivo s p i $n < 2p$. Tada je $n = p$,

$$\begin{aligned} &p^{p-1} | (p-1)^p + 1 \\ &= p^2 \left(p^{p-2} - \binom{p}{1} p^{p-3} + \ldots + \binom{p}{p-3} p - \binom{p}{p-2} + 1 \right), \end{aligned}$$

a kako je svaki član u zagradi, osim zadnjeg djeljiv s p, mora biti $p - 1 \leqslant 2$. Odavde slijedi da je $p = 3$ i $n = 3$.

Dokažimo sada tvrdnju koju smo koristili. Kako je $(p-1)^n + 1$ neparno, i n mora biti takav (zato je $n < 2p$). Označimo s q najmanji prosti djelitelj od n (mora biti $q > 2$). Iz $q | (p-1)^n + 1$ dobivamo $(p-1)^n \equiv -1 \pmod q$ i $\operatorname{nzm}(q, p-1) = 1$. Kako prema izboru broja q vrijedi $\operatorname{nzm}(n, q-1) = 1$, postoje cijeli brojevi u i v, takvi da je $un + v(q-1) = 1$. Koristeći mali Fermatov teorem dobivamo

$$p - 1 \equiv (p-1)^{un} \cdot (p-1)^{v(q-1)} \equiv (-1)^u \cdot 1^v \equiv -1 \pmod q,$$

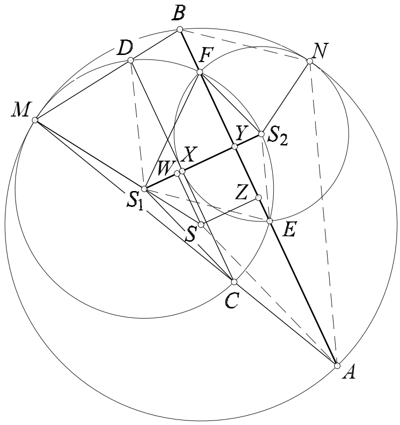
jer u mora biti neparan. Odavde slijedi da $q | p$, pa je stoga $q = p$, pa $p | n$.

Dakle, sva rješenja su $(2, 2)$, $(3, 3)$ i $(1, p)$, gdje je p bilo koji prost broj.

5. Neka su S, S_1, S_2 središta i R, r_1, r_2 polumjeri kružnica Γ, Γ_1, Γ_2, te $\{E, F\} = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Treba promatrati tri slučaja: 1° $r_1 > r_2$, 2° $r_1 = r_2$ i 3° $r_1 < r_2$. Promatrat ćemo prvi slučaj.

Kako su trokuti MCS_1 i MAS jednakokračni i $\sphericalangle S_1MC = \sphericalangle SMA$, $\triangle MCS_1 \sim \triangle MAS$. Odavde je $\dfrac{|MC|}{|MA|} = \dfrac{|MS_1|}{|MS|}$. Analogno je $\dfrac{|MD|}{|MB|} = \dfrac{|MS_1|}{|MS|}$. Odavde slijedi $\dfrac{|MC|}{|MA|} = \dfrac{|MD|}{|MB|}$, a jer je $\sphericalangle DMC = \sphericalangle BMA$, trokuti MCD i MAB su slični te je $CD \parallel AB$. Nadalje,

$$\frac{|CD|}{|AB|} = \frac{|MS_1|}{|MS|} = \frac{r_1}{R}. \tag{1}$$



Sl. 3.3.

Označimo sa $X = CD \cap S_1S_2$. Da bismo dokazali tvrdnju zadatka dovoljno je pokazati da je $|S_1X| = r_1 - r_2$. Uz oznaku $Y = S_1S_2 \cap AB$ vrijedi

$$\cos \sphericalangle FS_1S_2 = \frac{|S_1Y|}{|S_1F|} = \frac{|S_1F|^2 + |S_1S_2|^2 - |S_2F|^2}{2|S_1F| \cdot |S_1S_2|},$$

odakle slijedi

$$|S_1Y| = \frac{2r_1^2 - r_2^2}{2r_1}. \tag{2}$$

Neka su Z i W ortogonalne projekcije točke S na AB i S_1S_2. Iz pravokutnog trokuta SWS_1 i iz trokuta SS_1S_2 dobivamo:

$$\cos \sphericalangle S_2S_1S = \frac{|S_1W|}{|SS_1|} = \frac{|S_1S|^2 + |S_1S_2|^2 - |SS_2|^2}{2|S_1S| \cdot |S_1S_2|},$$

odnosno

$$|S_1Y| - |SZ| = \frac{2r_1^2 - r_2^2 - 2Rr_1 + 2Rr_2}{2r_1}. \tag{3}$$

Iz (2) i (3) slijedi $|SZ| = \dfrac{R}{r_1}(r_1 - r_2)$. Konačno

$$\begin{aligned} |S_1X|^2 &= |S_1D|^2 - |DX|^2 = r_1^2 - \left(\frac{|CD|}{2}\right)^2 \\ &= r_1^2 - \frac{1}{4}\frac{r_1^2}{R^2} \cdot |AB|^2 = r_1^2 - \frac{r_1^2}{R^2}(R^2 - |SZ|^2). \end{aligned}$$

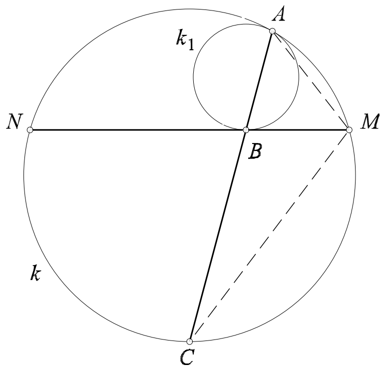
Odavde slijedi $|S_1X| = \dfrac{r_1}{R}|SZ| = r_1 - r_2$.

Slučaj 3° se dokazuje slično, dok je slučaj 2° jednostavniji.

Službeno rješenje.

Lema. *Kružnica k_1 dodiruje iznutra kružnicu k u toc cki A i dodiruje jednu od tetiva $\overline{MN}$ u B. Neka je C polovište luka $\overset{\frown}{MN}$ kružnice k koji ne sadrži A. Tada su točke A, B i C kolinearne i vrijedi $|CA| \cdot |CB| = |CM|^2$.*

Dokaz leme. Homotetija sa središtem u A koja preslikava k_1 u k, preslikava MN u tangentu na k paralelnu s MN, tj. u tangentu u C na k, pa su A, B, C kolinearne.

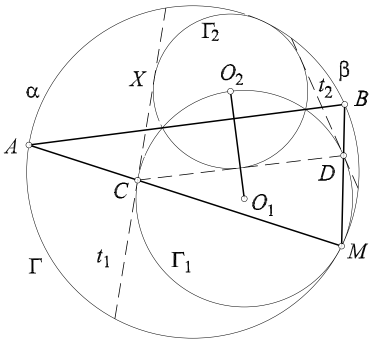


Sl. 3.4.

Da bismo dokazali drugi dio leme primijetimo da je $\sphericalangle NMC \equiv \sphericalangle MNC \equiv \sphericalangle CAM$, što znači da je $\Delta ACM \sim \Delta MCB$, odakle je $|CA| \cdot |CB| = |CM|^2$.

Riješimo sada dani zadatak.

Neka su O_1 i O_2 središta od Γ_1 i Γ_2 respektivno i t_1 i t_2 zajedničke tangente. Neka su α i β lukovi koje na Γ odsijecaju t_1 i t_2, u položaju kao u lemi.



Sl. 3.5.

Njihova polovišta imaju, prema lemi, jednake potencije u odnosu na Γ_1 i Γ_2, pa su A i B polovišta od α i β. Iz leme također slijedi da su C i D točke u kojima tangente t_1 i t_2 dodiruju Γ_1. Neka je H homotetija sa središtem M koja preslikava Γ_1 u Γ. Tada je $H\ :\ CD \mapsto AB$, odakle je $AB \parallel CD$. Dakle, $CD \perp O_1O_2$ i O_2 je polovište jednog od lukova CD kružnice Γ_1.