BROJEVI

I.1.

1. Broj $5362_{(8)}$ prikaži u binarnom brojevnom sustavu.
Broj $110\,101\,110_{(2)}$ prikaži u heksadekadskom brojevnom sustavu.
Broj $8F3A_{(16)}$ prevedi u oktalni sustav brojeva.

2. Dokaži matematičkom indukcijom da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

3. Izračunaj: $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2$.

4. Koji član u raspisu izraza $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x}\right)^{15}$ ne sadrži x?

5. Broj $-2-i$ jedno je rješenje jednadžbe $x^4+4x^3+8x^2+12x+15=0$. Odredi ostala tri rješenja te jednadžbe.

6. Koliko je $z^4 : w^9$, ako je

$$z=-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{5}-\frac{1}{2}i\cos\frac{3\pi}{5},\ :\ :\ w=\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{6}-i\sqrt{2}\sin\frac{11\pi}{6}?$$

I.2.

1. Broj $6174_{(8)}$ prikaži u binarnom brojevnom sustavu.
Broj $100\,110\,011_{(2)}$ prikaži u heksadekadskom brojevnom sustavu.
Broj $9B7E_{(16)}$ prevedi u oktalni sustav brojeva.

2. Dokaži matematičkom indukcijom da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$2+\frac{8}{3}+\frac{26}{9}+\ldots+\frac{3^n-1}{3^{n-1}}=\frac{3^n(2n-1)+1}{2\cdot 3^{n-1}}.$$

3. Izračunaj: : $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3$.

4. Koliko je racionalnih članova u raspisu potencije $(\sqrt{3}-\sqrt[4]{2})^{60}$?

5. Broj $-1+i$ jedno je rješenje jednadžbe $x^4+2x^3-4x-4=0$. Odredi ostala tri rješenja te jednadžbe.

6. Koliko je $z^8 : w^{16}$, ako je

$$z=-\sin\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{6},\ :\ :\ w=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}+i\sqrt{2}\sin\frac{11\pi}{12}?$$

I.3.

1. Broj $3752_{(8)}$ prikaži u binarnom brojevnom sustavu.
Broj $11\,111\,111_{(2)}$ prikaži u heksadekadskom brojevnom sustavu.
Broj $3BC2_{(16)}$ prevedi u oktalni sustav brojeva.

2. Dokaži matematičkom indukcijom da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\ldots+\frac{2^{2n-1}+1}{2^n}=\frac{2^{2n}-1}{2^n}.$$

3. Dokaži da je broj : : $\log_2 12$ iracionalan.

4. Odredi slobodni član u raspisu izraza $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}+\sqrt[4]{a^3}\right)^{17}$.

5. Riješi u skupu **C** jednadžbu : : $z^4+16=0$.

6. Broj $i\sqrt{5}$ jedno je rješenje jednadžbe $x^4-2x^3+10x^2-10x+25=0$. Odredi ostala tri rješenja te jednadžbe.

I.4.

1. Broj $4532_{(8)}$ prikaži u binarnom brojevnom sustavu.
Broj $10\,101\,111_{(2)}$ prikaži u heksadekadskom brojevnom sustavu.
Broj $A5D8_{(16)}$ prevedi u oktalni sustav brojeva.

2. Dokaži matematičkom indukcijom da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}.$$

3. Dokaži da je broj : : $\operatorname{tg} 15^\circ$ iracionalan.

4. Zbroj koeficijenata prvog, drugog i trećeg člana u raspisu izraza $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ jednak je 46. Odredi onaj član raspisa koji ne sadrži x.

5. Riješi u skupu **C** jednadžbu : : $z^6+1=0$.

6. Broj $-i\sqrt{3}$ jedno je rješenje jednadžbe $x^4-4x^3-12x-9=0$. Odredi ostala tri rješenja te jednadžbe.

I.5.

1. U kojem je brojevnom sustavu $33 \cdot 22 = 1\colon 331$? Koliko je u tom sustavu $33 \cdot 44$?

2. Dokaži matematičkom indukcijom da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$17\colon |\colon 3^{4n+4} - 4^{3n+3}.$$

3. U raspisu izraza $\left(x\sqrt{x} - \dfrac{1}{x^4}\right)^n$ binomni koeficijent trećeg člana za 44 je veći od binomnog koeficijenta drugog. Odredi slobodni član.

4. Ako je $a = 0.\dot{2}3\dot{4}$, : $b = 0.\dot{4}3\dot{2}$, izračunaj $a + b$ i $a : b$ te rezultate zapiši u obliku razlomka.

5. Koliko je

$$\left(\sin\frac{\pi}{8} - i\cos\frac{\pi}{8}\right) \cdot \left(\sin\frac{\pi}{12} - i\cos\frac{\pi}{12}\right) \cdot \left(\sin\frac{\pi}{24} - i\cos\frac{\pi}{24}\right).$$

6. Odredi sve kompleksne brojeve z takve da je $z^3 = 1 - i\sqrt{3}$.

I.6.

1. U kojem je brojevnom sustavu $33 \cdot 22 = 1\colon 210$? Koliko je u tom sustavu $33 \cdot 44$?

2. Dokaži matematičkom indukcijom da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$13\colon |\colon 3^n \cdot 5^{n+1} + 2^{n+3}.$$

3. Binomni koeficijent trećeg člana u raspisu izraza $\left(9x - \dfrac{1}{\sqrt{3x}}\right)^n$ jednak je 105. Odredi 13. član.

4. Ako je $a = 0.\dot{2}3\dot{4}$, $b = 0.\dot{1}3\dot{5}$, izračunaj razliku $a - b$ i zapiši je u obliku razlomka. Koja je znamenka na 199. mjestu iza decimalne točke u decimalnom zapisu te razlike?

5. Koliko je

$$\left(\sin\frac{\pi}{4} - i\cos\frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(\sin\frac{\pi}{6} - i\cos\frac{\pi}{6}\right) \cdot \left(\sin\frac{\pi}{12} - i\cos\frac{\pi}{12}\right)?$$

6. Odredi sve kompleksne brojeve z takve da je $z^3 = -\sqrt{3} + i$.

I.7.

1. Odredi prirodne brojeve a i b iz jednakosti $\overline{abb}_4 = \overline{baa}_5$.

2. Dokaži matematičkom indukcijom: $19|7^{n+2} + 27^{2n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

3. Dokaži matematičkom indukcijom, da je za svaki prirodni broj n

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \ldots + n(3n-2) = \frac{n(n+1)(2n-1)}{2}.$$

4. Zbroj binomnih koeficijenata u razvoju potencije $\left(x + \frac{1}{x^4}\right)^n$ iznosi 1024. Odredi član koji ne sadrži x.

5. Jesu li polumjeri opisane i upisane kružnice pravilnom osmerokutu sumjerljive dužine?

6. Broj $x = 1 - i$ jedno je rješenje jednadžbe $2x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 2 = 0$.
Provjeri to te odredi i ostala rješenja ove jednadžbe.

I.8.

1. Odredi prirodne brojeve a i b iz jednakosti $\overline{abb}_7 = \overline{baa}_6$.

2. Dokaži matematičkom indukcijom: $11|3^{2n+2} + 2^{6n+1}$, za $\forall n \in \mathbf{N}$.

3. Dokaži matematičkom indukcijom da je za svaki prirodni broj n

$$2 + 6 + 18 + \ldots + 2 \cdot 3^{n-1} = 3^n - 1.$$

4. Zbroj binomnih koeficijenata u razvoju potencije $\left(a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{1}{3}}\right)^n$ iznosi 128. Odredi član koji sadrži a^5.

5. Dokaži da su stranica i polumjer opisane kružnice pravilnom osmerokutu nesumjerljive dužine.

6. Broj $x = 1 + 2i$ jedno je rješenje jednadžbe $2x^4 - 3x^3 + 7x^2 + 7x - 5 = 0$.
Provjeri to te odredi i ostala rješenja ove jednadžbe.

I.9.

1. Odredi znamenke a i b u jednakosti $\overline{aba}_6 = \overline{bab}_4$.

2. Dokaži matematičkom indukcijom: $:7: | : 3^{2n+2} - 2^{n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

3. Dokaži matematičkom indukcijom da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$\frac{3}{2} + \frac{3}{8} + \frac{3}{32} + \ldots + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} = 2\left(1 - \frac{1}{4^n}\right).$$

4. Koristeći se formulama za zbrojeve potencija S_k izračunaj

$$2^2 + 6^2 + 10^2 + \ldots + (4n-2)^2.$$

5. Odredi Im z , ako je $z = (1-i)^9$.

6. Odredi modul i argument kompleksnoga broja koji je
a) suprotan; b) konjugiran; c) recipročan
kompleksnom broju $z = 1 - i\sqrt{3}$.

I.10.

1. Odredi osnovice a i b brojevnih sustava za koje je $\overline{33}_a = \overline{44}_b$.

2. Dokaži matematičkom indukcijom: $:6: | : 35^n - 2 \cdot 5^n + 11^n$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

3. Dokaži da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \ldots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{2(3n+2)}.$$

4. Koristeći se formulama za zbrojeve potencija S_k, izračunaj

$$2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3^2 + \ldots + (n+1) \cdot n^2.$$

5. Odredi Re z , ako je $z = (1+i)^9$.

6. Odredi argument i modul kompleksnoga broja z koji je
a) suprotan; b) konjugiran; c) recipročan
kompleksnom broju $z = -\sqrt{3} + i$.

I.11.

1. Odredi osnovice a i b brojevnih sustava u kojima je $34_a = 43_b$.

2. Dokaži matematičkom indukcijom da za svaki prirodni broj n vrijedi $:3: |: 5^n + 2 \cdot 2^n$.

3. Dokaži da je za svaki prirodni broj n:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

4. Odredi onaj član u razvijenom obliku potencije $\left(\sqrt[3]{a^2} - \frac{1}{a}\right)^{15}$, koji ne sadrži a.

5. Odredi pedesetpetu znamenku u decimalnom zapisu broja $\frac{5}{22}$.

6. Ako je $z = 3\cos\frac{3\pi}{4} - 3i\sin\frac{3\pi}{4}$, $w = -6\cos\frac{5\pi}{6} + 6i\cos\frac{5\pi}{3}$, koliko je $z^9 : w^8$?

I.12.

1. Ako je $11_x \cdot 12_x + 13_x \cdot 14_x = 350_x$, u kojem je brojevnom sustavu proveden račun? Odgovor obrazloži!

2. Dokaži matematičkom indukcijom da za svaki prirodni broj n vrijedi $5: |: 7^n + 4 \cdot 2^n$.

3. Dokaži da za svaki prirodni broj n vrijedi:

$$\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \ldots + \frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}.$$

4. Koji član u razvijenom obliku potencije $(\sqrt{x} + \sqrt{2})^{15}$ sadrži x^5 ?

5. Odredi devetstodevedesetdevetu znamenku u decimalnom zapisu broja $\frac{3}{17}$.

6. Ako je $z = 2\sin\frac{5\pi}{6} - 2i\cos\frac{5\pi}{6}$, $w = \sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{16} - i\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{16}$, koliko je $z^5 : w^{12}$?

I.13.

1. U kojem je brojevnom sustavu $11_x \cdot 14_x + 12_x \cdot 13_x = 321_x$?

2. Dokaži matematičkom indukcijom: $: 16 \mid 9^{n+1} + 8n - 9\,,\ \forall x \in \mathbf{N}$.

3. Koristeći se formulama za zbrojeve potencija, izračunaj

$$1 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 3^2 + \ldots + (2n-1) \cdot n^2.$$

4. Dokaži: $\cos\left(\dfrac{4n+1}{2}\pi + \alpha\right) = -\sin\alpha\,,\ \forall n \in \mathbf{N}$.

5. Odredi racionalne članove u razvijenom zapisu potencije $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^{10}$.

6. Ako je $z = -\cos\dfrac{2\pi}{5} - i\sin\dfrac{3\pi}{5}$, koliko je z^{15} i $\sqrt[4]{z}$?

I.14.

1. U nekom je brojevnom sustavu $33 \cdot 4 = 242$. Koliko je u tom sustavu $44 \cdot 3$?

2. Dokaži matematičkom indukcijom: $13 : | : 3^n \cdot 5^{n+1} + 2^{n+3}\,,\ \forall n \in \mathbf{N}$.

3. Koristeći se formulama za zbrojeve potencija S_k izračunaj:

$$1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \ldots + (n-1)n^2.$$

4. Dokaži: $\sin\left(\dfrac{4n+3}{2}\pi + \alpha\right) = -\cos\alpha\,,\ \forall n \in \mathbf{N}$.

5. Odredi racionalne članove u razvijenom zapisu potencije $(3^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{2}})^5$.

6. Ako je $z = -2\sin\dfrac{5\pi}{6} - 2i\cos\dfrac{11\pi}{6}$, koliko je z^{12} i $\sqrt[4]{z}$?

I.15.

1. Izračunaj

1) $101\,101_{(2)} + 111\,011_{(2)}$; 2) $101^2_{(2)}$; 3) $24_{(8)} \cdot 56_{(8)}$.

2. Dokaži matematičkom indukcijom da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$64 : | : 3^{2n+2} - 8n - 9.$$

3. Redom ispisujemo parne prirodne brojeve: $2468101214161820222426\ldots$ Koja je znamenka na 1000. mjestu u zapisu tog broja?

4. Postoji li član u raspisu izraza $\left(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}\right)^{20}$ koji sadrži x^7 ?

5. Riješi u skupu $\mathbf{R}$ sustav nejednadžbi

$$1 \leqslant |3 - 2x| < 2.$$

6. Odredi sve kompleksne brojeve z takve da je

$$z^3 = -\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}.$$

I.16.

1. Izračunaj

1) $1\,101\,110_{(2)} + 111\,011_{(2)}$; 2) $1\,011_{(2)} \cdot 101_{(2)}$; 3) $44_{(8)} \cdot 55_{(8)}$.

2. Dokaži matematičkom indukcijom da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$25 : | : 2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4.$$

3. Redom ispisujemo neparne prirodne brojeve: $1357911131517192123\ldots$ Koja je znamenka na 1000. mjestu u zapisu tog broja?

4. Postoji li član u raspisu izraza $\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)^{9}$ koji sadrži x^4 ?

5. Riješi u skupu $\mathbf{R}$ sustav nejednadžbi

$$2 < |2 - 3x| \leqslant 3.$$

6. Odredi sve kompleksne brojeve z takve da je

$$z^4 = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}.$$

I.1.

1. $5\,362_{(8)} = 101\,011\,110\,010_{(2)}$; $110\,101\,110 = 1AE_{(16)}$; $8F3A_{(16)} = 1\,000\,111\,100\,111\,010_{(2)} = 107\,472_{(8)}$.

2. 1) Za $n = 1$ tvrdnja je ispunjena, jer je $\frac{1^2}{1\cdot 3} = \frac{1\cdot 2}{2\cdot 3} = \frac{1}{3}$.

2) Pretpostavimo da dana tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj k . Ako imamo jedan pribrojnik više, tj. ako je $n = k+1$, uz navedenu pretpostavku onda vrijedi:

$$\frac{k(k+1)}{2(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$= \frac{k+1}{2k+1}\cdot\left(\frac{k}{2}+\frac{k+1}{2k+3}\right) = \frac{k+1}{2k+3}\cdot\frac{2k^2+5k+2}{2(2k+1)}$$
$$= \frac{(k+1)(2k+1)(k+2)}{2(2k+3)(2k+1)} = \frac{(k+1)(k+2)}{2(2(k+1)+1)}.$$

Time je dokaz proveden.

3. $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(4k^2) - \sum_{k=1}^{n}(4k) + \sum_{k=1}^{n}1 = 4S_2 - 4S_1 + n = 4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n}{3}(4n^2-1)$.

4. Zahtijeva se da član $\binom{15}{k}x^{-\frac{1}{2}(15-k)}\cdot x^{\frac{1}{3}k}$ ne sadrži x , tj da eksponent potencije s bazom x bude jednak nuli. Taj zahtijev dovodi do jednadžbe $-\frac{15}{2} + \frac{1}{2}k + \frac{1}{3}k = 0$ čije je rješenje $k = 9$. Dakle 10. član raspisa ne sadrži x .

5. Jer je broj $-2 - i$ rješenje jednadžbe, onda je rješenje i konjugirani broj $-2 + i$. Podijelimo polinom s lijeve strane dane jednadžbe polinomom $(x+2+i)(x+2-i) = x^2 + 4x + 5$. Dobijemo kao količnik polinom $x^2 + 3$, te su ostala dva rješenja jednadžbe korijeni toga polinoma, konjugirano kompleksni brojevi $\pm i\sqrt{3}$.

6. Najprije kompleksne brojeve z i w valja zapisati u trigonometrijskom obliku: $z = \frac{1}{2}(\cos\frac{9\pi}{10} + i\sin\frac{9\pi}{10})$; $w = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$. I onda je $z^4 = \frac{1}{16}(\cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5})$, i $w^9 = 16\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$. Konačno je $z^4 : w^9 = \frac{\sqrt{2}}{512}(\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10})$.

I.2.

1. $6174_{(8)} = 110\,001\,111\,100_{(2)}$; $100\,110\,011 = 133_{(16)}$; $9B7E_{(16)} = 1\,001\,101\,101\,111\,110_{(2)} = 115\,576_{(8)}$.

2. 1) Za $n = 1$ tvrdnja je ispunjena, jer je $2 = \frac{3\cdot 1+1}{2\cdot 1} = \frac{4}{2}$.

2) Pretpostavimo da dana tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj k . Ako imamo jedan pribrojnik više, tj. ako je $n = k+1$, uz navedenu pretpostavku onda vrijedi:

$$\frac{3^k(2k-1)+1}{2\cdot 3^{k-1}} + \frac{3^{k+1}-1}{3^k}$$
$$= \frac{3^{k+1}\cdot 2k - 3^{k+1} + 3 + 2\cdot 3^{k+1} - 2}{2\cdot 3^k}$$
$$= \frac{3^{k+1}(2k+1)+1}{2\cdot 3^k}.$$

Time je dokaz proveden.

3. $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 = 8S_3 - 12S_2 + 6S_1 - n = n^2(2n^2-1)$.

4. Opći je član u raspisu dane potencije oblika $\binom{60}{k}3^{30-\frac{1}{2}k}\cdot 2^{\frac{1}{4}k}$. Racionalni će biti oni članovi za koje je k višekratnik broja 4. Takvih je ukupno 16.

5. Jer je broj $-1 + i$ rješenje jednadžbe, onda je rješenje i konjugirani broj $-1 - i$. Podijelimo polinom s lijeve strane dane jednadžbe polinomom $(x+1-i)(x+1+i) = x^2 + 2x + 2$. Dobijemo kao količnik polinom $x^2 - 2$, te su ostala dva rješenja jednadžbe korijeni toga polinoma, brojevi $\pm\sqrt{2}$.

6. Najprije kompleksne brojeve z i w valja zapisati u trigonometrijskom obliku: $z = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$; $w = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$. I onda je $z^8 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$, i $w^{16} = 256(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$. Konačno je $z^8 : w^{16} = \frac{1}{256}(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$.

I.3.

1. $3752_{(8)} = 11\,111\,101\,010_{(2)}$; $11\,111\,111 = FF_{(16)}$; $3BC2_{(16)} = 11\,101\,111\,000\,010_{(2)} = 35\,702_{(8)}$.

2. 1) Za $n = 1$ tvrdnja je ispunjena, jer je $\frac{3}{2} = \frac{2^2-1}{2} = \frac{3}{2}$.

2) Pretpostavimo da dana tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj k. Ako imamo jedan pribrojnik više, tj. ako je $n=k+1$, uz navedenu pretpostavku onda vrijedi:

$$\frac{2^{2k}-1}{2^k}+\frac{2^{2k+1}+1}{2^{k+1}}=\frac{2^{2k+1}+1+2^{2k+1}-2}{2^{k+1}}=\frac{2^{2(k+1)}-1}{2^{k+1}},$$

čime je tvrdnja dokazana.

3. Zapisat ćemo najprije $\log_2 12=\log_2 3+2$. Taj je broj racionalan ako je racionalan $\log_2 3$, tj. ako je $\log_2 3=\frac{m}{n}$, gdje su m i n prirodni brojevi ($\log_2 3>0$). No tada bi bilo $2^m=3^n$, što nije moguće, jer je s lijeve strane ove jednakosti paran broj 2^m, a s desne neparan broj 3^n.

4. Opći je član u raspisu dane potencije oblika $\binom{17}{k}3^{-\frac{2}{3}(17-k)}\cdot a^{\frac{3}{4}k}$. Slobodni član je deveti po redu, jer za $k=8$ imamo $\binom{17}{8}a^{-\frac{2}{3}\cdot 9}\cdot a^{\frac{3}{4}\cdot 8}=\binom{17}{8}$.

5. $z^4=-16=16(\cos\pi+i\sin\pi)$, te je $z_i=2(\cos\left(\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}\right))$, gdje je $i=0,1,2,3$.

6. Jer je broj $i\sqrt{5}$ rješenje jednadžbe, onda je rješenje i konjugirani broj $-i\sqrt{5}$. Podijelimo polinom s lijeve strane dane jednadžbe polinomom $(x-i\sqrt{5})(x+i\sqrt{5})=x^2+5$. Dobijemo za količnik polinom x^2-2x+5, te su ostala dva rješenja jednadžbe korijeni toga polinoma, brojevi $1\pm 2i$.

I.4.

1. $4532_{(8)}=100\,101\,011\,010_{(2)}$; $10\,101\,111_{(2)}=AF_{(16)}$; $A5D8_{(16)}=1\,010\,010\,111\,011\,000_{(2)}=122\,730_{(8)}$.

2. 1) Za $n=1$ tvrdnja je ispunjena, jer je $\frac{3}{4}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

2) Pretpostavimo da dana tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj k. Ako imamo jedan pribrojnik više, tj. ako je $n=k+1$, uz navedenu pretpostavku onda vrijedi:

$$1-\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{2k+3}{(k+1)^2\cdot(k+2)^2}=1-\frac{(k+2)^2-2k-3}{(k+1)^2\cdot(k+2)^2}=1-\frac{k^2+2k+1}{(k+1)^2\cdot(k+2)^2}=1-\frac{1}{(k+2)^2},$$

čime je tvrdnja dokazana.

3. Imamo redom $\operatorname{tg}15^\circ=\dfrac{1-\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}=2-\sqrt{3}$. Pretpostavimo da je $2-\sqrt{3}=a$, gdje je $a\in\mathbf{Q}$. Tada je $2-a=\sqrt{3}$, te smo dobili jednakost u kojoj je s lijeve strane racionalan broj $2-a$, a s desne iracionalan $\sqrt{3}$. Takva jednakost je protivrječna, što znači da je pretpostavka iz koje je proistekla bila pogrešna. Stoga je $\operatorname{tg}15^\circ$ iracionalan broj.

4. Iz podatka o zbroju koeficijenata izračuna se $n=9$. Opći član raspisa je oblika $\binom{9}{k}x^{2(9-k)}\cdot x^{-k}$, te će se za $k=6$ dobiti član koji ne sadrži x.

5. $z_i=\sqrt[6]{-1}=\sqrt[6]{\cos\pi+i\sin\pi}=\cos\left(\frac{\pi}{6}+k\cdot\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+k\cdot\frac{\pi}{3}\right)$, gdje je $i=0,1,2,3,4,5$.

6. Jer je broj $-i\sqrt{3}$ rješenje jednadžbe, onda je rješenje i konjugirani broj $i\sqrt{3}$. Podijelimo polinom s lijeve strane dane jednadžbe polinomom $(x-i\sqrt{3})(x+i\sqrt{3})=x^2+3$. Dobijemo za količnik polinom x^2-4x-3, te su ostala dva rješenja jednadžbe korijeni toga polinoma, brojevi $2\pm\sqrt{7}$.

I.5.

1. Iz jednakosti $(3n+3)\cdot(2n+2)=n^3+3n^2+3n+1$, koju možemo zapisati u obliku $6(n+1)^2=(n+1)^3$, zaključujemo da je osnovica sustava $n=5$. U tom je sustavu $33\cdot 44=3212$.

2. 1) Za $n=1$ tvrdnja je ispunjena, jer je $3^8-4^6=81^2-64^2=17\cdot 145$.

2) Pretpostavimo da dana tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj k, odnosno da $17:|: 3^{4k+4}-4^{3k+3}$. Tada za sljedeći prirodni broj $n=k+1$, uz navedenu pretpostavku vrijedi: $3^{4k+8}-4^{3k+6}=81(3^{4k+4}-4^{3k+3})+17\cdot 4^{3k+3}$ čime je tvrdnja dokazana.

3. Iz podatka o binomnim koeficijentima dobije se $n=11$. Opći član raspisa je oblika $\binom{11}{k}x^{\frac{3}{2}(11-k)}\cdot(-x)^{-4k}$, te će se za $k=3$ dobiti član koji ne sadrži x.

4. $a=\frac{26}{111}, b=\frac{16}{37}, a+b=\frac{2}{3}, a:b=\frac{13}{24}$.

5. Imamo redom: $\left(\cos\frac{13\pi}{8}+i\sin\frac{13\pi}{8}\right)\cdot\Big(\cos\frac{19\pi}{12}$

$+i\sin\frac{19\pi}{12}\Big)\cdot\Big(\cos\frac{37\pi}{24}+i\sin\frac{37\pi}{24}\Big) = \cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$.

6. Najprije zapišimo $1-i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})$, pa je potom $z_i = \sqrt[3]{2}(\cos(\frac{5\pi}{9}+k\cdot\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{5\pi}{9}+k\cdot\frac{2\pi}{3}))$, $i=0,1,2$.

I.6.

1. Iz jednakosti $(3n+3)\cdot(2n+2) = n^3+2n^2+n$, koju možemo zapisati u obliku $6(n+1)^2 = n(n+1)^2$, zaključujemo da je osnovica sustava $n=6$. U tom je sustavu $33\cdot 44 = 2420$.

2. 1) Za $n=1$ tvrdnja je ispunjena, jer je $3\cdot 5^2+2^4 = 75+16 = 91 = 7\cdot 13$.

2) Pretpostavimo da dana tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj k , odnosno da $13:|: 3^k\cdot 5^{k+1}+2^{k+3}$. Tada za sljedeći prirodni broj $n=k+1$, uz navedenu pretpostavku vrijedi: $3^{k+1}\cdot 5^{k+2}+2^{k+4} = 15(3^k\cdot 5^{k+1}+2^{k+3})-13\cdot 2^{k+3}$ čime je tvrdnja dokazana.

3. Iz podatka o binomnom koeficijentu dobije se $n=15$. Trinaesti član raspisa je $\binom{15}{12}x^{-3} = 455x^{-3}$.

4. $a=\frac{26}{111}, b=\frac{15}{111}, a-b=\frac{11}{111} = 0.\dot{0}9\dot{9}$. Na 199. mjestu iza decimalne točke nalazi se znamenka 0.

5. Imamo redom: $\Big(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\Big)\cdot\Big(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\Big)\cdot\Big(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\Big) = \cos(5\pi)+i\sin(5\pi) = -1$.

6. Najprije zapišimo $-\sqrt{3}+i = 2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$, pa je potom $z_i = \sqrt[3]{2}(\cos(\frac{5\pi}{18}+k\cdot\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{5\pi}{18}+k\cdot\frac{2\pi}{3}))$, $i=0,1,2$.

I.7.

1. Iz jednakosti $16a+5b = 25b+6a$ dobivamo $a=2b$ pa je $a=2, b=1$. Konačno je $211_{(4)} = 122_{(5)}$.

2. 1) Za $n=1$ tvrdnja je ispunjena, jer je $7^3+27^3 = 19\cdot 1054$.

2) Pretpostavimo da dana tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj k , odnosno da $19:|: 7^{k+2}+27^{2k+1}$. Tada za sljedeći prirodni broj $n=k+1$, uz navedenu pretpostavku vrijedi: $7^{k+3}+27^{2k+3} = 7(7^{k+2}+27^{2k+1})+38\cdot 19\cdot 27^{2k+1}$ čime je tvrdnja dokazana.

3. 1) Za $n=1$ je $1\cdot 1 = \frac{1\cdot 2\cdot 1}{2} = 1$.

2) Pretpostavit ćemo da za $n=k$ tvrdnja vrijedi, te ćemo uz tu pretpostavku izračunati zbroj za jedan pribrojnik više ($n=k+1$):

$$\frac{k(k+1)(2k-1)}{2}+(k+1)(3k+1)$$
$$=\frac{k+1}{2}(2k^2+5k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(2k+1)}{2}.$$

Time je tvrdnja dokazana.

4. Iz $2^n = 1024$ nalazimo $n=10$. U razvoju potencije treći član ne sadrži x .

5. Ne, nisu. Jer omjer duljina polumjera upisane i opisane kružnice pravilnom osmerokutu jednak je $\cos\frac{45^\circ}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$, a taj broj nije racionalan. Jer ako bi broj $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ bio racionalan broj (a), onda bi bilo $\sqrt{2} = a^2-2$, što je protivrječna jednakost.

6. Kako je broj $1-i$ rješenje jednadžbe, onda je rješenje i konjugirani broj $1+i$. Podijelimo polinom s lijeve strane dane jednadžbe polinomom $(x-1+i)(x-1-i) = x^2-2x+2$. Dobijemo za količnik polinom $2x^2-x-1$, te su ostala dva rješenja jednadžbe korijeni toga polinoma, brojevi $-\frac{1}{2}$ i 1 .

I.8.

1. Iz jednakosti $49a+8b = 36b+7a$ dobivamo $3a=2b$ pa je $a=2, b=3$. Konačno je $233_{(7)} = 322_{(6)}$.

2. 1) Za $n=1$ tvrdnja je ispunjena, jer je $3^4+2^7 = 19\cdot 11$.

2) Pretpostavimo da dana tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj k , odnosno da $11:|: 3^{2k+2}+2^{6k+1}$. Tada za sljedeći prirodni broj $n=k+1$, uz navedenu pretpostavku vrijedi: $3^{2k+4}+2^{6k+7} = 9(3^{2k+2}+2^{6k+1})+55\cdot 2^{6k+1}$, čime je tvrdnja dokazana.

3. 1) Za $n=1$ je $2 = 3^1-1 = 2$.

2) Pretpostavit ćemo da za $n=k$ tvrdnja vrijedi,

te ćemo uz tu pretpostavku izračunati zbroj za jedan pribrojnik više ($n=k+1$): $3^k-1+2\cdot 3^k=3^{k+1}-1$. Time je tvrdnja dokazana.

4. Iz $2^n=128$ nalazimo $n=7$. Opći je član raspisa oblika $\binom{7}{k}a^{\frac{3}{2}(7-k)}\cdot a^{-\frac{1}{3}k}$. U tom ćemo članu imati x^5 ako je $k=3$.

5. Omjer duljina stranice i polumjera opisane kružnice jednak je $\sin\frac{45^\circ}{2}=\sqrt{2-\sqrt{2}}$, a taj broj nije racionalan. Jer ako bi broj $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ bio racionalan broj (a), onda bi bilo $\sqrt{2}=2-a^2$, što je protivrječna jednakost.

6. Kako je broj $1+2i$ rješenje jednadžbe, onda je rješenje i konjugirani broj $1-2i$. Podijelimo polinom s lijeve strane dane jednadžbe polinomom $(x-1-2i)(x-1+2i)=x^2-2x+5$. Dobijemo za količnik polinom $2x^2+x-1$, te su ostala dva rješenja jednadžbe korijeni toga polinoma, brojevi $\frac{1}{2}$ i -1 .

I.9.

1. Iz jednakosti $37a+6b=17b+4a$ slijedi $b=3a$ te je $a=1, b=3$ i konačno $131_{(6)}=313_{(4)}$.

2. 1) Za $n=1$ je $3^4-2^2=77=7\cdot 11$.
2) Pretpostavimo da dana tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj k, odnosno da $7: |: 3^{2k+2}-2^{k+1}$. Tada za sljedeći prirodni broj $n=k+1$, uz navedenu pretpostavku vrijedi: $3^{2k+4}-2^{k+2}=9(3^{2k+2}-2^{k+1})+7\cdot 2^{k+1}$ i time je tvrdnja dokazana.

3. 1) Za $n=1$ je $\frac{3}{2}=2(1-\frac{1}{4})$.
2) Pretpostavit ćemo da za $n=k$ tvrdnja vrijedi, te ćemo uz tu pretpostavku izračunati zbroj za jedan pribrojnik više ($n=k+1$): $2(1-\frac{1}{4^k})+3\cdot(\frac{1}{2})^{2k+1}=2-2\cdot\frac{1}{4^k}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4^k}=2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^k}=2(1-\frac{1}{4^{k+1}})$. Time je tvrdnja dokazana.

4. $S=\frac{4}{3}n(4n^2-1)$.

5. Im $z=-16$.

6. $z=2(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})$.
a) $-z=2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$;
b) $\overline{z}=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$;
c) $\frac{1}{z}=\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$.

I.10.

1. Iz jednakosti $3a+3=4b+4$ slijedi $3a=4b+1$, i dalje $a=\frac{4b+1}{3}=b+\frac{b+1}{3}$. Odatle zaključujemo, jer a mora biti prirodni broj veći od 3, a b prirodni broj veći od 4, da je $a=4k-1$, $b=3k-1$, gdje je $k\geqslant 2$.

2. 1) Za $n=1$ je $35-10+11=36=6^2$.
2) Pretpostavimo da dana tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj k, odnosno da $6: |: 35^k-2\cdot 5^k+11^k$. Tada za sljedeći prirodni broj $n=k+1$, uz navedenu pretpostavku vrijedi:

$$35^{k+1}-2\cdot 5^{k+1}+11^{k+1}$$
$$=35(35^k-2\cdot 5^k+11^k)+60\cdot 5^k-24\cdot 11^k.$$

Time je tvrdnja dokazana.

3. 1) Za $n=1$ je $\frac{1}{2\cdot 5}=\frac{1}{2\cdot(3\cdot 1+2)}$.
2) Pretpostavit ćemo da za $n=k$ tvrdnja vrijedi, te ćemo uz tu pretpostavku izračunati zbroj za jedan pribrojnik više ($n=k+1$):

$$\frac{k}{2(3k+2)}+\frac{1}{(3k+2)(3k+5)}$$
$$=\frac{1}{3k+2}\Big(\frac{k}{2}+\frac{1}{3k+5}\Big)=\frac{1}{3k+2}\cdot\frac{3k^2+5k+2}{2(3k+5)}$$
$$=\frac{(3k+2)(k+1)}{2(3k+2)(3k+5)}=\frac{k+1}{2(3k+5)}.$$

Time je tvrdnja dokazana.

4. $S=\dfrac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$.

5. Re $z=16$.

6. $z=2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$.
a) $-z=2(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6})$;
b) $\overline{z}=2(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6})$;
c) $\frac{1}{z}=\frac{1}{2}(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6})$.

I.11.

1. Iz jednakosti $3a+4=4b+3$ slijedi $3a=4b-1$, i dalje $a=\frac{4b-1}{3}=b+\frac{b-1}{3}$. Odatle zaključujemo, jer a i b moraju biti prirodni brojevi veći od 4, da je $a=4k+1, b=3k+1$, gdje je $k \geqslant 2$.

2. 1) Za $n=1$ je $5+2\cdot 2=9=3\cdot 3$.
2) Pretpostavimo da dana tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj k, odnosno da $3 : | : 5^k+2\cdot 2^k$. Tada za sljedeći prirodni broj $n=k+1$, uz navedenu pretpostavku vrijedi:

$$5^{k+1}+2\cdot 2^{k+1}=5(5^k+2\cdot 2^k)-6\cdot 2^k.$$

Time je tvrdnja dokazana.

3. 1) Za $n=1$ je $\frac{1}{1\cdot 4}=\frac{1}{3\cdot 1+1)}=\frac{1}{4}$.
2) Pretpostavit ćemo da za $n=k$ tvrdnja vrijedi, te ćemo uz tu pretpostavku izračunati zbroj za jedan pribrojnik više ($n=k+1$):

$$\frac{k}{3k+1}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{1}{3k+1}\left(k+\frac{1}{3k+4}\right)$$
$$=\frac{1}{3k+1}\cdot\frac{3k^2+4k+1}{3k+4}=\frac{(k+1)(3k+1)}{(3k+1)(3k+4)}$$
$$=\frac{k+1}{3k+4}.$$

Time je tvrdnja dokazana.

4. Sedmi član, jer je $\binom{15}{6}(\sqrt[3]{a^2})^9\cdot(-a^{-1})^6=\binom{15}{6}$.

5. 55. znamenka je 7.

6. $z=3(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}), w=6(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$.
$z^9 : w^8=\frac{3}{256}(\cos(-\frac{\pi}{12})+i\sin(-\frac{\pi}{12}))$.

I.12.

1. Iz jednakosti $(x+1)(x+2)+(x+3)(x+4)=3x^2+5x$, dobije se $x=7$.

2. 1) Za $n=1$ je $7+4\cdot 2=15=5\cdot 3$.
2) Pretpostavimo da dana tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj k, odnosno da $5 : | : 7^k+4\cdot 2^k$. Tada za sljedeći prirodni broj $n=k+1$, uz navedenu pretpostavku vrijedi: $7^{k+1}+4\cdot 2^{k+1}=7(7^k+4\cdot 2^k)-20\cdot 2^k$ Time je tvrdnja dokazana.

3. 1) Za $n=1$ je $\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}=\frac{1\cdot 2}{2\cdot 3\cdot 5}$.
2) Pretpostavit ćemo da za $n=k$ tvrdnja vrijedi, te ćemo uz tu pretpostavku izračunati zbroj za jedan pribrojnik više ($n=k+1$):

$$\frac{k(k+1)}{2(2k+1)(2k+3)}+\frac{k+1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}$$
$$=\frac{k+1}{2(2k+1)(2k+3)}(k+\frac{2}{2k+5})$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+1)}{2(2k+1)(2k+3)(2k+5)}$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)(2k+5)}.$$

Time je tvrdnja dokazana.

4. Šesti član koji je jednak $\binom{15}{5}x^5\cdot(\sqrt{2})^5$.

5. $\frac{3}{17}=0.\dot{1}76470588235294\dot{1}$, te je 999. znamenka iza decimalne točke 5.

6. $z=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$, $w=\sqrt{2}(\cos\frac{27\pi}{16}+i\sin\frac{27\pi}{16})$; $z^5 : w^{12}=\frac{1}{2}(\cos\frac{17\pi}{12})+i\sin\frac{17\pi}{12})$.

I.13.

1. Iz jednadžbe $(x+1)(x+4)+(x+2)(x+3)=3x^2+2x+1$ dobit ćemo $x=9$.

2. 1) Za $n=1$ je $81-1=80=16\cdot 5$.
2) Pretpostavimo da dana tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj k, odnosno da $16 : | : 9^{k+1}+8k-9$. Tada za sljedeći prirodni broj $n=k+1$, uz navedenu pretpostavku vrijedi:

$$9^{k+2}+8k-1=9(9^{k+1}+8k-9)-64k+80.$$

Time je tvrdnja dokazana.

3. $S=\frac{1}{6}n(n+1)(3n^2+n-1)$.

4. 1) Za $n=1$ imamo: $\cos(\alpha+\frac{5\pi}{2})=\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})=-\sin\alpha$.
2) Pretpostavimo da za prirodni broj k vrijedi $\cos(\frac{4k+1}{2}\pi+\alpha)=-\sin\alpha$. Tada, uz ovu pretpostavku, za naredni prirodni broj $k+1$ vrijedi: $\cos(\frac{4k+5}{2}\pi+\alpha)=\cos(\frac{4k+1}{2}\pi+2\pi+\alpha)=\cos(\frac{4k+1}{2}\pi+\alpha)=-\sin\alpha$. I time je dokaz proveden.

5. Opći član u razvoju je oblika $\binom{10}{k}(\sqrt{5})^{10-k}\cdot(\sqrt{2})^k$. Racionalni članovi dobiju se za $k=2,4,6,8$ i 10.

6. $z=(\cos\frac{7\pi}{5}+i\sin\frac{7\pi}{5})$, $z^{15}=\cos\pi+i\sin\pi$. $\sqrt[4]{z}=\cos(\frac{7\pi}{20}+k\cdot\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{7\pi}{20}+k\cdot\frac{\pi}{2})$, $k=0,1,2,3$.

I.14.

1. Iz jednadžbe $(3x+3)4=2x^2+4x+2$ dobit ćemo $x=5$; I dalje, $44_{(5)}\cdot 3_{(5)}=242_{(5)}$.

2. 1) Za $n=1$ je $3\cdot 5^2+2^4=91=13\cdot 7$.
2) Pretpostavimo da dana tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj k, odnosno da $13:|: 3^k\cdot 5^{k+1}+2^{k+3}$. Tada za sljedeći prirodni broj $n=k+1$, uz navedenu pretpostavku vrijedi: $3^{k+1}\cdot 5^{k+2}+2^{k+4}=15(3^k\cdot 5^{k+1}+2^{k+3})-13\cdot 2^{k+3}$. Time je tvrdnja dokazana.

3. $S=\dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$.

4. 1) Za $n=1$ imamo: $\sin(\frac{7\pi}{2}+\alpha)=\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cos\alpha$.
2) Pretpostavimo da za prirodni broj k vrijedi $\sin(\frac{4k+3}{2}\pi+\alpha)=-\sin\alpha$. Tada, uz ovu pretpostavku, za naredni prirodni broj $k+1$ vrijedi: $\sin(\frac{4k+7}{2}\pi+\alpha)=\sin(\frac{4k+3}{2}\pi+2\pi+\alpha)=\sin(\frac{4k+3}{2}\pi+\alpha)=-\cos\alpha$. I time je dokaz proveden.

5. Racionalan je samo treći član i on je jednak $\binom{5}{2}\cdot 6=60$.

6. $z=2(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})$, $z^{12}=2^{12}(\cos 0+i\sin 0)$;
$\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{2}(\cos(\frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{\pi}{2}))$, $k=0,1,2,3$.

I.15.

1. 1) $1\,101\,000_{(2)}$; 2) $11\,001_{(2)}$; 3) $2\,630_{(8)}$.

2. 1) Za $n=1$ imamo $81-8-9=64$.
2) Pretpostavimo da $64:|: 3^{2k+2}-8k-9$, za neki prirodni broj k. Onda uz tu pretpostavku za prvi naredni broj $k+1$ imamo: $3^{2k+4}-8(k+1)-9=9(3^{2k+2}-8k-9)+64k+64$. Time je dokaz proveden.

3. Imamo 4 jednoznamenkasta parna broja, 45 dvoznamenkastih sa ukupno 90 znamenki. Zatim imamo po 50 parnih brojeva po svakoj stotici, odnosno 150 znamenaka. I tako zaključujemo da do 700 imamo 994 znamenke i lako nalazimo potom da je 1000. znamenka 4.

4. Iz jednadžbe $10-\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}k=7$, dobije se $k=12$, te trinaesti član raspisa sadrži x^7.

5. $x\in\langle\frac{1}{2},1]\cup[2,\frac{5}{2}\rangle$.

6. $z=\sqrt[3]{\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}}=\cos(\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{2\pi}{3})$.

I.16.

1. 1) $10\,101\,001_{(2)}$; 2) $110\,111_{(2)}$; 3) $3124_{(8)}$.

2. 1) Za $n=1$ imamo $2^3\cdot 3+5-4=25$.
2) Pretpostavimo da $25:|: 2^{k+2}\cdot 3^k+5k-4$, za neki prirodni broj k. Onda uz tu pretpostavku za prvi naredni broj $k+1$ imamo: $2^{k+3}\cdot 3^{k+1}+5(k+1)-4=6(2^{k+2}\cdot 3^k+5k-4)-25k+25$. Time je dokaz proveden.

3. Imamo 5 jednoznamenkastih neparnih brojeva, 45 dvoznamenkastih sa ukupno 90 znamenki. Zatim imamo po 50 neparnih brojeva po svakoj stotici, odnosno 150 znamenaka. I tako zaključujemo da do 701 imamo 995 znamenke i lako nalazimo potom da je 1000. znamenka 0.

4. Postoji, to je četvrti član.

5. $x\in[-\frac{1}{3},0\rangle\cup\langle\frac{4}{3},\frac{5}{3}]$.

6. $z_i=\cos(\frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{\pi}{2})$.