

# 1. Jednoliko i jednoliko ubrzano gibanje

---

Jednoliko gibanje po pravcu je ono gibanje pri kojemu se ne mijenja ni iznos ni smjer brzine. Ako se ne mijenja iznos brzine ( $v$ ), tijelo prelazi u jednakim vremenskim intervalima jednake putove. Tada u vremenu  $t$  prelazi put:

$$s = vt. \quad (1.1)$$

Jedinica brzine je  $[v] = \text{m/s}$ , a često i  $\text{km/h}$ .

Ako se brzina mijenja, računamo srednju brzinu:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}. \quad (1.2)$$

Ovdje su  $s_1$  i  $s_2$  putovi u trenucima  $t_1$  i  $t_2$ . Trenutna brzina dobiva se smanjivanjem vremenskog i putnog intervala na iznose u kojima se brzina može smatrati konstantnom. Praktično, to je ona brzina koju pokazuje brzinomjer u vozilu. (Analogno se određuju srednja i trenutna vrijednost drugih veličina definiranih omjerom.)

Jednoliko ubrzano (usporeno) gibanje je ono kod kojega je ubrzanje (usporenje) stalno; tada vrijedi:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}. \quad (1.3)$$

Jedinica ubrzanja je  $[a] = \text{m/s}^2$ .

U formuli (1.3) možemo staviti  $t_2 - t_1 = t$  pa je:

$$v_2 = v_1 + at. \quad (1.4)$$

Put pređen u vremenu  $t$  je onda:

$$s = \frac{(v_1 + v_2)t}{2} \quad (1.5)$$

ili:

$$s = v_1 t + \frac{at^2}{2}. \quad (1.6)$$

U jednostavnijem slučaju, kad je  $v_1 = 0$  ili  $v_2 = 0$  (tj. vozilo, tijelo... kreće iz mirovanja ili se zaustavlja) stavljamo u formuli (1.5)  $v_2 = 0$  ili  $v_1 = 0$  pa dobivamo:

$$v = at \quad (1.7)$$

$$s = \frac{vt}{2}, \quad (1.8)$$

a iz ove dvije formule još i:

$$s = \frac{at^2}{2} \quad (1.9)$$

$$s = \frac{v^2}{2a}. \quad (1.10)$$

Ako se ubrzanje mijenja, trenutno ubrzanje dobiva se opet smanjivanjem intervala vremena i brzina do iznosa u kojima se promjena brzine može smatrati konstantnom.

Brzina i ubrzanje su vektori i smjerovi im se ne moraju podudarati. Tako npr. kod usporenog gibanja je smjer ubrzanja suprotan smjeru brzine, a kod gibanja po kružnici okomit na smjer brzine.

### Primjeri

**Primjer 1.1.** Na brojčaniku automobila pročitamo  $s_1 = 12\,148$  km u 10 h 40 min i  $s_2 = 12\,290$  km u 12 h 25 min. Odredi:

- srednju brzinu automobila u km/h i m/s;
- koliko taj auto prijeđe za 1 minutu;
- koliko mu treba vremena za 1 km.

*Rješenje.*

- Iz formule (1.1) dobivamo

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{(12\,290 - 12\,148) \text{ km}}{12 \text{ h } 25 \text{ min} - 10 \text{ h } 40 \text{ min}} = \frac{142 \text{ km}}{1 \text{ h } 45 \text{ min}} = \frac{142 \text{ km}}{1 \frac{45}{60} \text{ h}}$$

$$= 81,14 \text{ km/h}$$

preračunato u m/s:

$$v = \frac{81,14 \cdot 1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{81,14}{3,6} \text{ m/s} = 22,54 \text{ m/s}.$$

- $s = vt = 22,54 \text{ m/s} \cdot 60 \text{ s} = 1352,4 \text{ m}.$

- $t = \frac{s}{v} = \frac{1000 \text{ m}}{22,54 \text{ m/s}} = 44,37 \text{ s}.$

**Primjer 1.2.** Biciklist prijeđe prvu trećinu puta brzinom  $v_1 = 20$  km/h, a preostale dvije trećine brzinom  $v_2 = 16$  km/h. Odredite srednju brzinu na cijelom putu.

*Rješenje.*

$$v = \frac{s}{t_1 + t_2} = \frac{s}{\frac{1}{3} \frac{s}{v_1} + \frac{2}{3} \frac{s}{v_2}} = \frac{3v_1v_2}{v_2 + 2v_1} = \frac{3 \cdot 20 \cdot 16}{16 + 2 \cdot 20} = 17,14 \text{ km/h}.$$

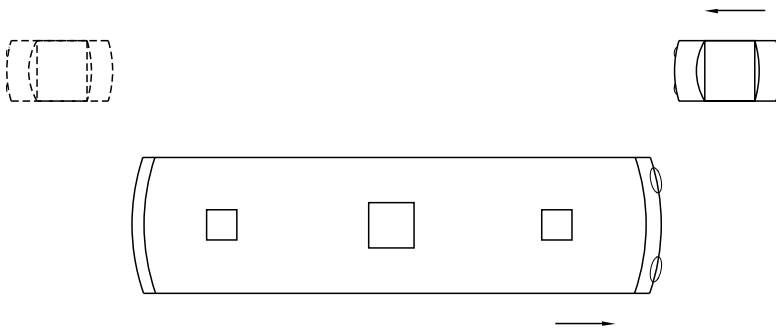
Budući da srednja brzina u ovom slučaju ne zavisi o putu, može se izabrati bilo koji put, npr.  $s = 60$  km, pa izračunati  $t_1 = \frac{\frac{1}{3} \cdot 60}{20} = 1$  h i  $t_2 = \frac{\frac{2}{3} \cdot 60}{16} = 2.5$  h iz čega je  $v = \frac{60 \text{ km}}{3.5 \text{ h}} = 17.14 \text{ km/h}$ .

**Primjer 1.3.** Autobus duljine  $l_1 = 20$  m vozi brzinom  $v_1 = 36$  km/h ( $= 10$  m/s), a auto duljine  $l_2 = 4$  m brzinom  $v_2 = 90$  km/h ( $= 25$  m/s). Izračunajte:

- koliko vremena treba da se mimođđu;
- koliko treba vremena da auto prestigne autobus ako pretjecanje počinje  $s_1 = 5$  m iza i završava  $s_2 = 5$  m ispred autobusa;
- koliki put će preći autobus, a koliki auto.

*Rješenje.*

- Auto mora preći vlastitu duljinu i duljinu autobusa relativnom brzinom  $v = v_1 + v_2$ .



Sl. 1.1.

Zato je:

$$t = \frac{l_1 + l_2}{v_1 + v_2} = \frac{(4 + 20) \text{ m}}{35 \text{ m/s}} = 0.69 \text{ s.}$$

- Relativna brzina je sada  $v = v_2 - v_1$ , a auto mora preći put  $s = l_1 + l_2 + s_1 + s_2 = 34$  m, pa je

$$t = \frac{34 \text{ m}}{15 \text{ m/s}} = 2.27 \text{ s.}$$

- Za to vrijeme autobus prijeđe put  $s_1 = v_1 t = 22.7$  m, a auto put  $s_2 = v_2 t = 56.7$  m. Razlika putova je upravo 34 m.

**Primjer 1.4.** Motor brzine  $v_1 = 120$  km/h krene u 10 sati iz točke A za automobilom koji je u to vrijeme udaljen 70 km, a vozi brzinom 80 km/h. U koliko sati i na kojem kilometru će motor stići auto?

*Rješenje.* Stavimo početak koordinatnog sustava u točku  $A$  na kojoj se motor nalazi u 10 h. U tom slučaju je:

$$\text{koordinata položaja motora : } s_M = 120t \quad (t \text{ u satima, } s \text{ u km})$$

$$\text{koordinata položaja auta : } s_A = 70 + 80t.$$

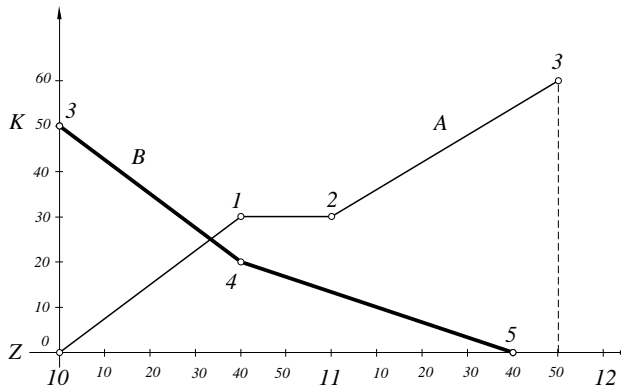
U trenutku stizanja  $s_M = s_A$  pa je:

$$120t = 70 + 80t \implies t = \frac{70}{40} \text{ h} = 1 \text{ h } 45 \text{ min.}$$

Dakle, motor će stići auto u 11 h 45 min i preći put

$$s_M = 120 \cdot 1 \frac{45}{60} = 210 \text{ km.}$$

### Primjer 1.5.



Sl. 1.2.

Opišite gibanje vozila prema slici 1.2 i izračunajte brzine.

*Rješenje.* Gibanje vozila  $A$  je u jednom smjeru ( $Z \rightarrow K$ ), a gibanje vozila  $B$  u suprotnom smjeru ( $K \rightarrow Z$ ). Brzine su (vidi sliku):

vozilo  $A$ :

$$v_{01} = \frac{\Delta s_{01}}{\Delta t_{01}} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \frac{(30 - 0) \text{ km}}{10 \text{ h } 40 \text{ min} - 10 \text{ h}} = \frac{30 \text{ km}}{\frac{40}{60} \text{ h}} = 45 \text{ km/h,}$$

$$v_{12} = \frac{\Delta s_{12}}{\Delta t_{12}} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = 0 \quad - \text{ vozilo miruje,}$$

$$v_{23} = \frac{\Delta s_{23}}{\Delta t_{23}} = \frac{s_3 - s_2}{t_3 - t_2} = \frac{(60 - 30) \text{ km}}{11 \text{ h } 50 \text{ min} - 11 \text{ h}} = \frac{30 \text{ km}}{\frac{50}{60} \text{ h}} = 36 \text{ km/h.}$$

vozilo  $B$ :

$$v_{34} = \frac{\Delta s_{34}}{\Delta t_{34}} = 45 \text{ km/h,}$$

$$v_{45} = \frac{\Delta s_{45}}{\Delta t_{45}} = 20 \text{ km/h.}$$

**Primjer 1.6.** Automobil postigne brzinu 108 km/h za 12 sekundi. Odredite srednje ubrzanje i put.

*Rješenje.* Iz formula (1.7) i (1.8) dobivamo (brzina u svim zadacima mora biti u m/s):

$$a = \frac{v}{t} = \frac{30 \text{ m/s}}{12 \text{ s}} = 2.5 \text{ m/s}^2$$

$$s = \frac{vt}{2} = 180 \text{ m.}$$

**Primjer 1.7.** Za koliko vremena i kojom brzinom padne tijelo s visine 80 cm?

*Rješenje.* Slobodni pad je, ako se može zanemariti otpor zraka (što se u zadacima i čini ako nije drukčije rečeno) posebni slučaj jednolikog ubrzanog gibanja s ubrzanjem  $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$  (često se uzima  $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ ). Put je obično visina i označava se sa  $h$ . Možemo dakle upotrijebiti formule od (1.8) do (1.11) gdje stavimo  $a = g$  i  $s = h$ .

$$\text{Iz (1.10)} \implies t^2 = \frac{2s}{g} = \frac{2 \cdot 0.8 \text{ m}}{10 \text{ m/s}^2} \implies t = 0.4 \text{ s}$$

$$\text{i } v = at = 4 \text{ m/s.}$$

**Primjer 1.8.** Dva automobila  $A$  i  $B$  vozeći jedan drugom ususret brzinama 90 km/h i 108 km/h, počinju na udaljenosti 110 m istovremeno kočiti s usporenjima  $a_1 = 7 \text{ m/s}^2$  i  $a_2 = 8 \text{ m/s}^2$ . Na kojoj međusobnoj udaljenosti će se zaustaviti?

*Rješenje.* Prilikom usporavanja, ako se tijelo zaustavilo, prijeći će jednak put kao da se iz mirovanja ubrzavalo do jednake brzine. Dakle:

$$s_1 = \frac{v_1^2}{2a_1} = \frac{25^2}{2 \cdot 7} = 44.64 \text{ m}$$

$$s_2 = \frac{v_2^2}{2a_2} = \frac{30^2}{2 \cdot 8} = 56.25 \text{ m.}$$

Tako će se automobili približiti na  $110 - (44.64 + 56.25) \text{ m} = 9.11 \text{ m}$ .

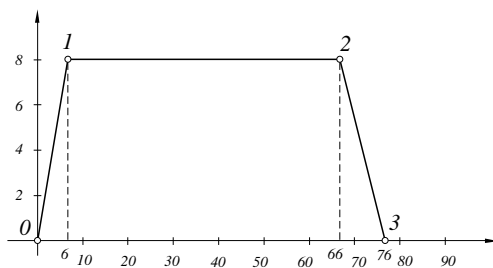
**Primjer 1.9.** Tramvaj postigne brzinu 28.8 km/h za 6 s, giba se postignutom brzinom 1 minutu i nakon toga se zaustavi za 10 s.

- Prikažite grafički ovisnost brzine o vremenu;
- izračunajte ubrzanja;

c) izračunajte put i srednju brzinu.

*Rješenje.*

a)



Sl. 1.3.

b) Na intervalu puta  $\overline{01}$  gibanje je jednoliko ubrzano:

$$a_{01} = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{(8 - 0) \text{ m/s}}{(6 - 0) \text{ s}} = 1.33 \text{ m/s}^2,$$

na intervalu puta  $\overline{12}$  gibanje je jednoliko:

$$a = 0,$$

na intervalu puta  $\overline{23}$  gibanje je jednoliko usporeno:

$$a_{23} = \frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2} = -0.8 \text{ m/s}^2.$$

c) Ako se brzina mijenja, put se može izračunati kao površina ispod krivulje koja prikazuje zavisnost brzine o vremenu. U našem slučaju to je trapez prema slici 1.3 pa je:

$$s = \frac{(76 + 60) \cdot 8}{2} = 544 \text{ m}.$$

Srednja brzina:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{544 \text{ m}}{76 \text{ s}} = 7.16 \text{ m/s} = 25.77 \text{ km/h}.$$

**Primjer 1.10.** Tijelo se giba jednoliko ubrzano i prešavši put  $s_1 = 10 \text{ m}$  dostigne brzinu  $v_1$ , a kad prijeđe put  $s_2 = 90 \text{ m}$  brzinu  $v_2$ . Nađite omjer tih brzina.

*Rješenje.* Iz formule (1.10)  $\implies v^2 = 2as$  pa je:

$$v_2 : v_1 = \sqrt{2as_2} : \sqrt{2as_1} = \sqrt{\frac{2as_2}{2as_1}} = \sqrt{\frac{s_2}{s_1}} = 3.$$

**Primjer 1.11.** Brzina vozila poveća se od  $v_1 = 36$  km/h na  $v_2 = 72$  km/h na putu 75 m. Odredite:

- a) vrijeme ubrzanja;  
b) ubrzanje.

*Rješenje.*

a) Iz (1.6)  $\implies t = \frac{2s}{v_1 + v_2} = \frac{2 \cdot 75 \text{ m}}{(10 + 20) \text{ m/s}} = 5 \text{ s}.$

b)  $a = \frac{v_2 - v_1}{t} = 2 \text{ m/s}^2.$

**Primjer 1.12.** Auto vozi brzinom  $v_1 = 90$  km/h. Motorist koji vozi iza njega brzinom  $v_2 = 72$  km/h, odluči ga preteći i počinja pretjecanje ubrzanjem  $a = 3 \text{ m/s}^2$  kad se nalazi na udaljenosti  $d = 120$  m iza auta. Za koliko vremena će motorist stići auto i koliki će put pritom prijeći?

*Rješenje.* Postavimo ishodište sustava u točku u kojoj motor počinje pretjecanje pa imamo:

$$\begin{aligned} \text{auto :} & \quad x_1 = v_1 t + d \\ \text{motor :} & \quad x_2 = v_2 t + \frac{at^2}{2}. \end{aligned}$$

U trenutku pretjecanja je  $x_1 = x_2$  pa se dobije jednadžba  $at^2 + 2(v_2 - v_1)t - 2d = 0$ , (koja uvijek ima rješenja, zašto?); prihvaćamo rješenje:

$$t = \frac{-(v_2 - v_1) + \sqrt{(v_2 - v_1)^2 + 2ad}}{a} = 10.76 \text{ s},$$

iz čega je put auta  $s_A = 269$  m, a put motora  $s_M = 389$  m.

### Test 1.

- Udaljenost od mjesta  $A$  do  $B$  iznosi 180 km i kamion je prijeđe za 4 sata, auto za 3 sata. Ako pođu istovremeno, kamion u smjeru  $\overline{AB}$ , a auto u smjeru  $\overline{BA}$ , srest će se na udaljenosti od  $A$ :  
A. 70 km    B. 77.14 km    C. 85.63 km    D. 154.3 km    E. 105 km
- Automobil prođe pola puta brzinom 80 km/h, a drugu polovinu brzinom 60 km/h. Srednja brzina na cijelom putu iznosi:  
A. 70 km/h    B. 75.43 km/h    C. 65.4 km/h    D. 68.57 km/h    E. 69.28 km/h

3. Putnik u vlaku brzine 54 km/h izmjeri da je mimoilaženje s drugim vlakom duljine 126 m trajalo 3.5 s. Brzina drugog vlaka iznosi:  
A. 21 m/s    B. 35 m/s    C. 70 km/h    D. 80.2 km/h    E. 129.6 km/h
4. Staza za rekreaciju ima duljinu  $\overline{AB} = 1800$  m. Biciklist je prijeđe za 5 min, a atletičar za 12 min. Ako istovremeno krenu iz točke A, biciklist će na povratku  $\overline{BA}$  sresti atletičara na udaljenosti od A:  
A. 1.5 km    B. 1450 m    C. 920 m    D. 1058.8 m    E. 1.435 km
5. Vozač krene na put od 180 km u 8 h računajući da će na odredište stići u 11 h. Od 9 h 10 min do 9 h 30 min morao je nepredviđeno stajati. Brzina kojom će morati voziti preostali dio puta da bi stigao u 11 sati iznosi:  
A. 75 km/h    B. 85.4 km/h    C. 110 km/h    D. 65.43 km/h    E. 73.33 km/h
6. Biciklist, jednoliko ubrzavajući, postigne brzinu 18 km/h na putu 20 m. Ubrzanje iznosi:  
A.  $2.5 \text{ m/s}^2$     B.  $1.8 \text{ km/s}^2$     C.  $2.5 \text{ m/s}^2$     D.  $0.625 \text{ m/s}^2$     E.  $1.8 \text{ m/s}^2$
7. Ubrzanje tijela iznosi  $2 \text{ m/s}^2$  ( $v_0 = 0$ ). U kojoj sekundi, računajući od početka gibanja, tijelo prijeđe 5 m?  
A. ni u jednoj    B. u 2. sekundi    C. u 3. sekundi  
D. u 4. sekundi    E. u 5. sekundi
8. Vlak smanji brzinu od 30 m/s na 10 m/s na putu od 800 m. Deset sekundi nakon početka kočenja brzina iznosi:  
A. 20 m/s    B. 15 m/s    C. 25 m/s    D. 60 km/h    E. 22.5 m/s
9. Dva automobila krenu s jednakim ubrzanjem  $2.5 \text{ m/s}^2$ , drugi 8 sekundi iza prvoga. Nakon koliko sekundi, računajući od početka gibanja prvog automobila će njihova udaljenost iznositi 160 m?  
A. 4 s    B. 12 s    C. 10 s    D. 8.4 s    E. 24 s
10. Tramvaju je potrebno 80 m da jednolikim ubrzanjem postigne brzinu 25.2 km/h i put od 120 m da se zaustavi. Za koliko vremena prijeđe udaljenost dviju stanica od 500 m?  
A. 1 min    B. 1 min 40 s    C. 71.4 s    D. 110 s    E. 1 min 12 s

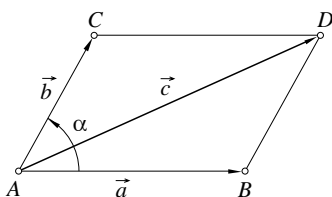


## 2. Složena gibanja. Vertikalni, horizontalni, kosi hitac

---

Složeno gibanje nastaje istovremenim izvođenjem dvaju ili više jednostavnih gibanja. Pri tome se tijelo u svakom trenutku nalazi u točki do koje bi došlo kad bi kroz jednako vrijeme izvodilo jedno (na sl. 2.1  $\vec{AB}$ ), pa drugo ( $\vec{BD}$ ) gibanje (ili najprije  $\vec{AC}$ , pa onda  $\vec{CD}$ ).

Doprinosi gibanju vektorski se zbrajaju. Vektori  $\vec{a} = \vec{AB} = \vec{CD}$  i  $\vec{b} = \vec{AC} = \vec{BD}$  općenito mogu značiti pomak, brzinu, ubrzanje, silu ...



Sl. 2.1.

Rezultantni vektor  $\vec{c}$  nadomješta učinke vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}. \quad (2.1)$$

Iznos tog vektora je:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}. \quad (2.2)$$

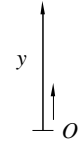
Ako su oba gibanja jednolika i po pravcu, putanja će biti pravac; u drugim slučajevima bit će krivulja.

Jednostavni primjeri složenog gibanja su gibanje u tekućoj vodi, gibanje u zraku pri djelovanju vjetrova, hici ...

Hitac je općenito složen od jednolikog gibanja po pravcu početnom brzinom  $v_0$  i slobodnog pada ubrzanja  $g$ .

Kod vertikalnog hica oba su gibanja u smjeru osi  $y$ . Ako visinu računatu od točke pada označimo sa  $y$  imamo:

*Hitac prema gore:*

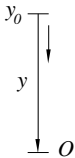


Sl. 2.2.

$$y(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \quad (2.3)$$

$$v(t) = v_0 - gt \quad (2.4)$$

*Hitac prema dolje s visine  $y_0$ :*

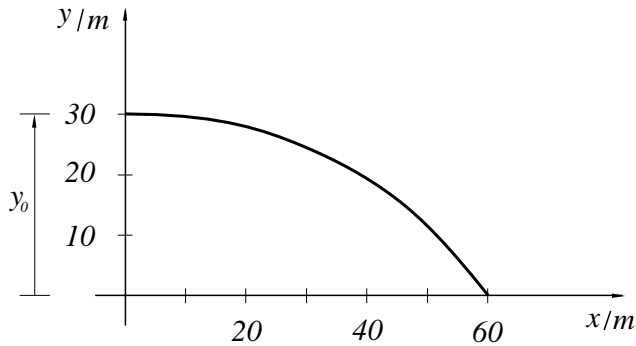


Sl. 2.3.

$$y(t) = y_0 - v_0 t - \frac{gt^2}{2} \quad (2.5)$$

$$v(t) = v_0 + gt \quad (2.6)$$

*Horizontalni hitac s visine  $y_0$ :*



Sl. 2.4.

$$x(t) = v_0 t \quad (2.7)$$

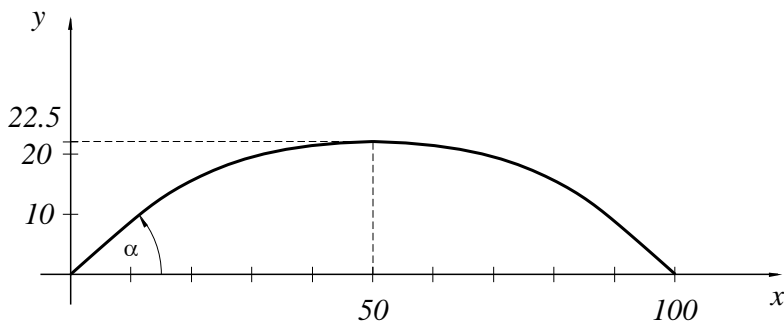
$$y(t) = y_0 - \frac{gt^2}{2} \quad (2.8)$$

Eliminacijom  $t$  dobiva se jednadžba putanje:

$$y = y_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2} \quad (2.9)$$

(na slici je  $y_0 = 30$  m,  $v_0 = 25$  m/s,  $g \approx 10$  m/s<sup>2</sup>, pa je  $y = 30 - \frac{1}{125}x^2$ ).

Kosi hitac brzinom  $v_0$  pod kutom  $\alpha$  prema horizontalnoj ravnini (ishodište u točki izbacivanja):



Sl. 2.5.

$$x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad (2.10)$$

$$y(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \quad (2.11)$$

Eliminacijom  $t$  dobiva se jednačba putanje:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \quad (2.12)$$

(na slici je  $\alpha = 45^\circ$ ,  $v_0 = 31.6$  m/s,  $g \approx 10$  m/s<sup>2</sup>, pa je jednačba putanje  $y = x - \frac{1}{100}x^2$ ).

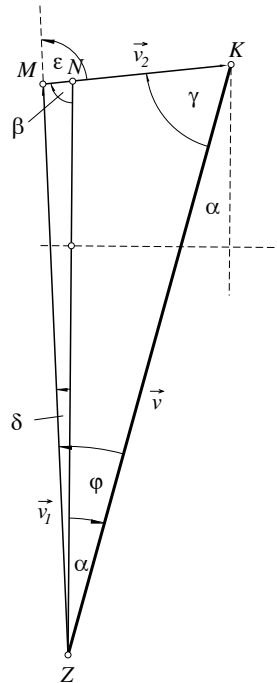
Otpor zraka se u svim slučajevima zanemaruje.

### Primjeri

**Primjer 2.1.** Sportski avion koji može letjeti brzinom  $v_1 = 180$  km/h u odnosu na zrak treba doletjeti iz mjesta  $Z$  prema sjeveru u mjesto  $K$  udaljeno 45 km. Smjer  $Z \rightarrow K$  zatvara sa meridijanom kut  $\alpha = 15^\circ$ , a za vrijeme leta puše sa zapada vjetar brzine  $v_2 = 60$  km/h koji s meridijanom zatvara kut  $\beta = 80^\circ$  (sl. 2.1.). Odredite:

- smjer leta;
- brzinu;
- vrijeme doleta.

*Rješenje.* Brzina  $\vec{v}$  kojom se avion giba u odnosu na površinu Zemlje rezultantna je brzina aviona u odnosu na zrak  $\vec{v}_1$  i brzine vjetra  $\vec{v}_2$ :  $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ .



Sl. 2.6.

a) Iz trokuta  $ZNK$  izlazi da je  $\sphericalangle ZKN = \gamma = \beta - \alpha = 65^\circ$ . Označimo još  $\vec{v}_1 = \vec{ZM}$ ,  $\vec{v}_2 = \vec{MK}$ , tada iz trokuta  $ZKM$  slijedi:  $\sin \varphi = \frac{\overline{MK} \sin \gamma}{\overline{ZM}} \implies \varphi = 17.58^\circ$ . Prema tome, treba letjeti pod kutom  $\delta = \varphi - \alpha = 2.58^\circ$ , dakle prema sjeveru s blagim otklonom prema zapadu.

b) Kut vektora  $\vec{v}$  i  $\vec{v}_2$  (to je vanjski kut trokuta  $ZKM$ ) iznosi  $\varepsilon = \varphi + \gamma = 82.58^\circ$  pa je  $v^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \varepsilon \implies v = 197 \text{ km/h}$ .

c)  $t = \frac{\overline{ZK}}{v} = 13 \text{ min } 43 \text{ s}$ .

**Primjer 2.2.** Iz čamca, koji je vozio uzvodno, ispao je pojas za spašavanje. Nakon  $\Delta t = 10 \text{ min}$  vlasnik je to primijetio i vratio se nizvodno da ulovi pojas. Brzina čamca uzvodno iznosila je  $v_U = 6 \text{ km/h}$ , a nizvodno  $v_N = 14 \text{ km/h}$ , s jednako podešenim motorom. Izračunajte:

a) brzinu čamca  $v_2$  u odnosu na mirnu vodu i brzinu rijeke  $v_1$ ;

b) na kojoj udaljenosti od točke u kojoj je ispao pojas i nakon koliko vremena će čamac stići pojas.

*Rješenje.*

a) Za plovidbu uzvodno rezultatna brzina je  $v_U = v_2 - v_1$ ; za plovidbu nizvodno rezultatna brzina je  $v_N = v_2 + v_1$ . Rješenjem ovog sustava dobivamo:

$$v_2 = \frac{v_N + v_U}{2} = 10 \text{ km/h}, \quad v_1 = \frac{v_N - v_U}{2} = 4 \text{ km/h}.$$

b) Neka je ishodište u točki u kojoj je ispao pojas,  $\Delta t$  vrijeme koje čamac plovi uzvodno, a  $t$  vrijeme od trenutka ispadanja pojasa. Koordinata položaja čamca u sustavu "vezanom" za obalu je:  $x_2 = -v_U \Delta t + v_N(t - \Delta t) = -(v_2 - v_1)\Delta t + (v_2 + v_1)(t - \Delta t)$ , a koordinata položaja pojasa u istom sustavu:  $x_1 = v_1 t$ . U točki u kojoj čamac stigne pojas je  $x_1 = x_2 \implies t = 2\Delta t$ . Čamac će dakle stići pojas u točki  $x_1 = x_2 = v_1 \cdot 2\Delta t = \frac{4}{3}$  km nizvodno od točke u kojoj je pojas ispao.

Mogli smo b) razmotriti u sustavu koji se kreće brzinom kao rijeka (u kojem pojas i rijeka miruju). Čamac je u tom sustavu vozio  $\Delta t$  brzinom  $v_2$ ; isto toliko vremena mu treba da se vrati u točku gdje se nalazi pojas. Za to vrijeme pojas je s obzirom na obalu prešao put  $x = v_1 \cdot 2\Delta t = \frac{4}{3}$  km.

**Primjer 2.3.** Strjelica izbačena vertikalno uvis vrati se nakon  $t = 4.8$  sekundi. Odredite:

- početnu brzinu;
- maksimalnu visinu;
- brzinu i visinu nakon 3 sekunde leta.

*Rješenje.*

a) Let do najviše točke traje koliko i pad sa te točke; strjelica padne istom brzinom kojom je izbačena. U najvišoj točki je  $v(t) = 0$  pa iz (2.4) dobivamo  $v_0 = gt_0 = 23.5 \text{ m/s}$  (za  $t_0 = \frac{t'}{2} = 2.4 \text{ s}$ ).

b) Trajanje leta do najviše točke je  $t_0 = \frac{v_0}{g}$ ; uvrstimo to u (2.3) i dobivamo  $y_0 = \frac{v_0^2}{2g} = 28.3 \text{ m}$ .

c) Uvrstimo  $v_0$  u (2.3) i (2.4):  $y(t) = 23.5t - 4.9t^2 = 26.4 \text{ m}$ ,  $v(t) = 23.5 - 9.8t = -5.9 \text{ m/s}$  ( $t > t_0$ , strjelica se vraća, zato je  $v < 0$ !)

**Primjer 2.4.** Iz točke A s visine  $y_0 = 80 \text{ m}$  ispušten je kamen koji se na visini  $y' = 50 \text{ m}$  mimoišao sa strjelicom izbačenom istovremeno brzinom  $v_0$  iz točke B vertikalno ispod A. Izračunajte vrijeme do susreta i brzinu  $v_0$ .

*Rješenje.* Kamen i strjelica neka se susretnu na visini  $y'$ . Put kamena do susreta  $y_0 - y' = 30 \text{ m}$ , pa je  $t_1 = \sqrt{\frac{2(y_0 - y')}{g}} = 2.47 \text{ s}$ . Izjednačivši visinu

strjelice  $y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$  i visinu na kojoj se nalazi kamen  $y' = y_0 - \frac{gt^2}{2}$ , te stavivši  $t = t_1$  dobivamo  $v_0 = \frac{y_0}{t_1} = 32.35 \text{ m/s}$ . Da strjelica ne bi pala prije nego se sretne s kamenom, mora biti  $y > 0$ . Dokažite uvrštavanjem izraza  $t = \frac{y_0}{v_0}$  u izraz za  $y$  da mora biti  $v_0^2 \geq \frac{gy_0}{2}$ .

**Primjer 2.5.** Predmet bačen vertikalno prema dolje s visine  $y_0 = 50 \text{ m}$  pao je nakon  $t = 2.1 \text{ s}$ . Odredite:

- početnu brzinu;
- brzinu kojom padne.

*Rješenje.*

a) U formulu (2.5) stavimo  $y(t) = 0$  pa dobivamo:  $v_0 t = y_0 - \frac{gt^2}{2}$ ; iz čega slijedi  $v_0 = 13.5 \text{ m/s}$ .

b) Iz (2.6) slijedi  $v(t) = 13.5 + 9.81t$ ,  $v(2.1) = 34.1 \text{ m/s}$ .

**Primjer 2.6.** S vrha visoke zgrade spušten je kamen da slobodno pada. Jednu sekundu ( $\Delta t$ ) kasnije bačena je kugla početnom brzinom  $v_0$ , koja je dostigla kamen,  $t = 3 \text{ s}$  nakon ispuštanja kamena. Izračunajte:

- početnu brzinu kugle;
- udaljenost, računajući od vrha zgrade, na kojoj će kugla doći kamen.

*Rješenje.*

a) U trenutku kad kugla dostigne kamen bit će oni na jednakoj visini i prijeći će jednake putove. Vrijeme padanja kamena neka je  $t$ , vrijeme padanja kugle  $t - \Delta t$ . Tada je kamen padajući prešao put:  $y_1 = \frac{gt^2}{2}$ , a ku-

gla  $y_2 = v_0(t - \Delta t) + \frac{g(t - \Delta t)^2}{2}$ . Izjednačavanjem ovih izraza dobije se

$$v_0 = \frac{g \cdot \Delta t(2t - \Delta t)}{2(t - \Delta t)} = 12.24 \text{ m/s}.$$

b)  $y_1 = y_2 = 44.1 \text{ m}$ .

**Primjer 2.7.** Avion, leteći horizontalno na visini  $h = 150 \text{ m}$  brzinom  $v = 80 \text{ m/s}$  ispusti teret koji mora pasti na određeno mjesto. Na kojoj udaljenosti i koliko vremena prije nadlijetanja cilja mora to učiniti? Gdje će biti avion kad teret pogodi cilj?

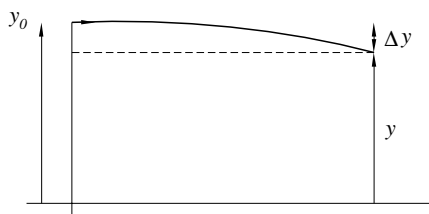
*Rješenje.* Prema principu nezavisnosti gibanja vrijeme padanja ne ovisi o horizontalnoj brzini. Vrijeme padanja s visine  $h = 150 \text{ m}$  iznosi  $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 5.53 \text{ s}$ . Za to vrijeme avion će prijeći put  $s = vt = 424 \text{ m}$ ; na toj udaljenosti od cilja dakle mora ispustiti teret. Kad teret pogodi cilj, avion će biti iznad njega.

**Primjer 2.8.** Strjelica izbačena horizontalno s visine 6 m spusti se za  $\Delta y = 1$  m na udaljenosti 10 m od točke izbacivanja. Odredite:

- početnu brzinu;
- domet;
- trajanje leta.

*Rješenje.*

a) U (2.9) stavimo  $\Delta y = y_0 - y = \frac{gx^2}{2v_0^2}$ . Otuda je  $v_0 = \sqrt{\frac{gx^2}{2\Delta y}} = 22.15$  m/s.



Sl. 2.7.

b) Domet dobivamo ako u (2.9) stavimo  $y = 0$ ,  $x = d$ . Izlazi:  $d = \sqrt{\frac{2v_0^2 y_0}{g}} = 24.5$  m.

c) Trajanje leta dobiva se iz (2.7):  $t = \frac{x}{v_0} = \frac{d}{v_0} = 1.11$  s (ono je također jednako vremenu pada s visine  $y_0 = 6$  m).

**Primjer 2.9.** Pod kojim kutom treba izbaciti tijelo da visina bude jednaka polovini dometa? Koliki je domet ako je početna brzina 100 m/s?

*Rješenje.* Da dobijemo domet  $x = d$  stavimo u jednadžbu (2.12)  $y = 0$ . Dobiva se:

$$d = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (2.13)$$

Maksimalna visina dobiva se iz (2.12) za  $x = \frac{d}{2}$

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (2.14)$$

Stavimo li sada  $d = 2h \implies \operatorname{tg} \alpha = 2$ ,  $\alpha = 63.43^\circ$ . Iz  $\operatorname{tg} \alpha = 2 \implies \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ,  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$  pa je  $d = \frac{4}{5} \cdot \frac{v_0^2}{g} = 815.6$  m, a  $h = \frac{2}{5} \cdot \frac{v_0^2}{g} = 407.8$  m.

**Primjer 2.10.** Top igračka izbacuje strjelice brzinom 10 m/s. Pod kojim kutom treba izbaciti strjelicu da pogodi točku udaljenu 4 m od podnožja "topa" i na visini 1.77 m? Koliki je maksimalni domet i visina hica?

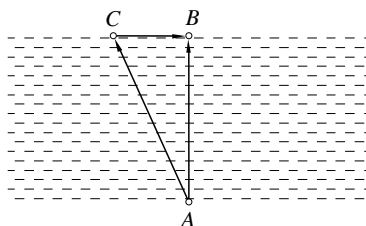
*Rješenje.* U jednažbi (2.12) treba staviti  $y = 1.77$ ,  $x = 4$  pa se dobiva jednažba:  $1.77 = 4 \operatorname{tg} \alpha - \frac{9.81 \cdot 16}{2 \cdot 100 \cdot \cos^2 \varphi}$ . Nakon sređivanja dobije se (približno) kvadratna jednažba za  $\operatorname{tg} \alpha$ :  $157 \operatorname{tg}^2 \alpha - 800 \operatorname{tg} \alpha + 511 = 0$  čija su rješenja  $\alpha_1 \approx 36.8^\circ$ ,  $\alpha_2 \approx 77^\circ$ . Imamo, dakle, dvije putanje koje uz zadanu brzinu prolaze kroz zadanu točku. Domet i visina za  $\alpha_1 \approx 36.8^\circ$  iznose 9.78 m i 1.83 m, a za  $\alpha_2 \approx 77^\circ$  iznose 4.47 m i 4.84 m.

### Test 2.

1. Brod brzine  $c$  u mirnoj vodi ploveći rijekom brzine  $v$  prijeđe udaljenost  $d$  od mjesta  $A$  do  $B$  i odmah natrag od  $B$  do  $A$ . Srednja brzina pritom iznosi:

A.  $c + \frac{v}{2}$     B.  $c - \frac{v}{2}$     C.  $\frac{c+v}{2}$     D.  $c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$     E.  $c(1 - \frac{v^2}{c^2})$

2. Čamac, držeći kurs prema točki  $C$  udaljenoj  $\overline{CB} = 24$  m od okomice  $AB$  na tok rijeke širine  $\overline{AB} = 84$  m, prelazi rijeku za 1 minutu u smjeru  $\overrightarrow{AB}$ . Brzina čamca u odnosu na vodu iznosi:



Sl. 2.8.

- A. 5.24 km/h    B. 1.4 m/s    C. 0.4 m/s    D. 7.2 km/h    E. 4.8 m/s
3. Kamen je ispušten i slobodno pada s visine  $y_0 = 36$  m istovremeno je iz točke vertikalno ispod bačena kugla brzinom  $v_0 = 30$  m/s. Na kojoj će se visini sudariti?
- A. 21.6 m    B. 31.6 m    C. 12.6 m    D. 28.9 m    E. 17.5 m
4. Kamen bačen vertikalno uvis brzinom  $v_0 = 19.62$  m/s sa zgrade visine  $H$  pao je u podnožje zgrade nakon 6.9 s od trenutka izbacivanja. Visina zgrade iznosi:
- A. 84.2 m    B. 103.8 m    C. 98.1 m    D. 19.6 m    E. 74.8 m



5. S visine 58.9 m bačen je predmet brzinom  $v_0$  vertikalno prema dolje. Predmet je pao nakon 2.2 s. Brzina  $v$  nakon 1.5 s iznosi:  
A. 26.8 m/s    B. 10.8 m/s    C. 16 m/s    D. 30.7 m/s    E. 14.4 m/s
6. Tijelo  $A$  pada s visine  $h = 40$  m. U istom trenutku počinje brzinom  $v_0$  padati tijelo  $B$  sa visine  $y_0 = 100$  m. Kolika mora biti početna brzina  $v_0$  tijela  $B$  da padne na površinu zemlje istovremeno kad i tijelo  $A$ ?  
A. 18.4 m/s    B. 31 m/s    C. 12 m/s    D. 42.4 m/s    E. 20.9 m/s
7. S ruba garaže visoke  $y_0 = 2.45$  m izbačena je horizontalno strjelica koja je pala na udaljenosti  $d = 30$  m. Visina na kojoj se nalazi strjelica na udaljenosti  $x = 10$  m od garaže iznosi:  
A. 1.86 m    B. 2.18 m/s    C. 1.45 m    D. 2.18 m    E. 2.03 m/s<sup>2</sup>
8. Tijelo izbačeno horizontalno s visine  $y_0 = 10$  m nalazi se nakon nekog vremena na udaljenosti 20 m i na visini 5.1 m. Domet tog hica iznosi:  
A. 28.6 m    B. 14.3 m    C. 30.4 m    D. 28.6 m/s<sup>2</sup>    E. 20.3 m
9. Koso izbačeno tijelo prolazi točkama  $C(1, 2)$  i  $D(4, 1)$  (dimenzije u metrima). Početna brzina tog tijela iznosi:  
A. 8.5 m/s    B. 25 km/h    C. 7.83 m/s    D. 7.83 m/min    E. 18.4 m/s
10. Koso izbačeno tijelo doseglo je najveću visinu 10 m, a palo je na udaljenosti 50 m. Brzina izbacivanja iznosi:  
A. 22.42 km/h    B. 25.6 m/s    C. 80.7 km/h    D. 51.2 m/s    E. 16.8 m/s