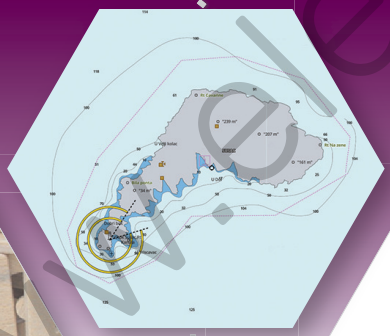
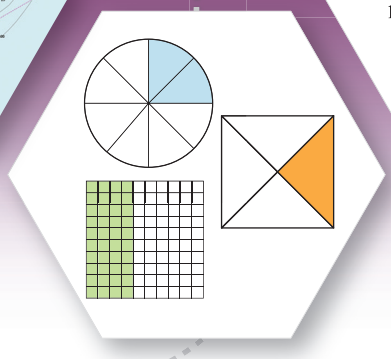
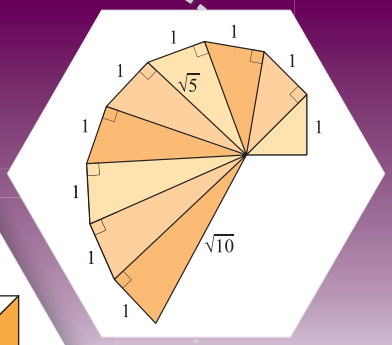
1 | Skup realnih brojeva







Nakon ovog poglavlja moći ćeš:

- ✓ računati vrijednost brojevnih izraza poštujući redoslijed računskih operacija
- ✓ procjenjivati, zaokruživati i računati u problemskim situacijama
- ✓ nejednakosti zapisati s pomoću intervala i obrnuto te prikazati na brojevnom pravcu
- ✓ primjenjivati i prikazati podskup, uniju, presjek i razliku skupova realnih brojeva zapisujući ih matematičkim simbolima
- ✓ za zadani algebarski izraz računati konkretne vrijednosti, pojednostavljivati izraze
- ✓ primjenjivati formule za kvadrat i kub binoma, razliku kvadrata, zbroj i razliku kubova
- ✓ faktorizirati izraze
- ✓ kratiti, množiti, dijeliti i zbrajati algebarske razlomke
- ✓ istražiti različite strategije i pristupe u novim situacijama te između više rješenja izabrati najbolje
- ✓ procijeniti što znaš, a što još trebaš naučiti
- ✓ povezati pojedine sadržaje učenja sa svakodnevnim životom

1.1. Prirodni i cijeli brojevi

Aktivnost
ele-udzbenik.hr

U jednoj godini ima dvanaest mjeseci i tristo šezdeset pet dana. U razrednom odjelu su trideset dva učenika. Ante je uštedio sto dvadeset tri kune. Brojevi 1, 12, 365, 32, 123 koji su se pojavili u tim rečenicama nazivaju se prirodni brojevi. Njih upotrebljavamo pri prebrojavanju raznovrsnih objekata iz naše okoline.

Skup prirodnih brojeva označavamo sa $\mathbf{N}$ i zapisujemo

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Zbrajanje i množenje u skupu N

Prirodne brojeve možemo zbrajati i množiti i rezultat tih operacija je uvijek prirodni broj.

$$\underbrace{a}_{\text{pribrojnici}} + \underbrace{b}_{\text{pribrojnici}} = \underbrace{c}_{\text{zbroj ili suma}}$$

$$\underbrace{a}_{\text{faktori}} \cdot \underbrace{b}_{\text{faktori}} = \underbrace{c}_{\text{umnožak ili produkt}}$$

Pribrojnici, odnosno faktori mogu zamijeniti svoja mjesta i rezultat se neće promijeniti, tj.

$$a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a, \quad \text{za sve } a \text{ i } b.$$

To se svojstvo zove **komutativnost**.

Ako u brojevnom izrazu dolaze zagrade, općenito se prvo računaju operacije u zagradama. Međutim, ako za operaciju vrijedi svojstvo **asocijativnosti**, zagrada u zadatku smije promijeniti mjesto. I ovo svojstvo vrijedi za zbrajanje prirodnih brojeva, tj. za svaka tri prirodna broja a, b i c vrijedi:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Zato često u izrazu koji sadrži samo pribrojnike izostavljamo zagrade i pišemo $a + b + c$.

Sljedeće svojstvo povezuje operacije zbrajanja i množenja, a zove se svojstvo **distributivnosti** množenja prema zbrajanju:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$$

gdje su a, b i c bilo koja tri prirodna broja.

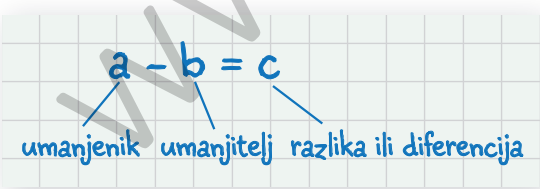
PRIMJER 1.

Primjenjujući svojstva zbrajanja i množenja, izračunajmo što kraćim putem:
a) $356 + 237 + 344 + 263$ **b)** $4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 50 \cdot 25 \cdot 125$.

a) $356 + 237 + 344 + 263 = (356 + 344) + (237 + 263) = 700 + 500 = 1200.$
b) $4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 50 \cdot 25 \cdot 125 = (4 \cdot 25) \cdot (4 \cdot 50) \cdot (8 \cdot 125) = 100 \cdot 200 \cdot 1000 = (100 \cdot 1000) \cdot 200$
$= 100\,000 \cdot 200 = 20\,000\,000.$

Oduzimanje i dijeljenje u skupu N

U skupu prirodnih brojeva oduzimanje je izvedivo samo ako od većeg broja oduzimamo manji.

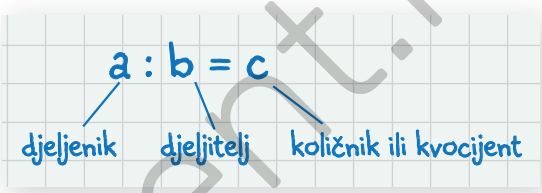


Rezultat dobiven oduzimanjem možemo provjeriti tako da zbrojimo razliku i umanjitelja. Dobiveni zbroj mora biti jednak umanjeniku.

Za operaciju oduzimanja ne vrijede svojstva komutativnosti ni asocijativnosti. Ali, svojstvo distributivnosti množenja prema oduzimanju vrijedi:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c.$$

Dijeljenje također nije uvijek izvedivo u skupu **N**. Broj a možemo podijeliti brojem b samo ako je a **djeljiv** s b, tj. ako postoji prirodni broj c takav da je $a = bc$.



Rezultat dijeljenja možemo provjeriti tako da pomnožimo količnik i djelitelj. Rezultat mora biti jednak djeljeniku. Ne vrijede ni svojstva komutativnosti ni asocijativnosti.

Pri izvođenju nekoliko zadanih računskih operacija poštujemo sljedeća pravila:

1. Ako su u brojevnom izrazu zadane zagrade, prvo se izračunava unutarnja ("najdublja") zagrada, a zatim redom ostale.
2. Ako u brojevnom izrazu nema zagrada, prvo se računaju operacije višeg prioriteta: množenje i dijeljenje, tek onda zbrajanje i oduzimanje.
3. Ako nema zagrada, a operacije su istog prioriteta, izvode se slijeva nadesno, osim kad primjena svojstava komutativnosti i asocijativnosti olakšava računanje.

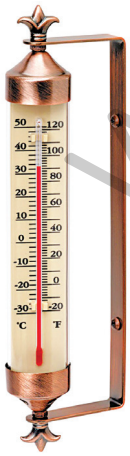
PRIMJER 2.

Izračunajmo $(4 \cdot 6 + 2) + (5 + 3 \cdot 4 - 6) \cdot 7 + 10 \cdot 11$.

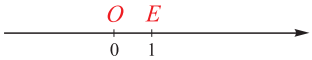
$(4 \cdot 6 + 2) + (5 + 3 \cdot 4 - 6) \cdot 7 + 10 \cdot 11 = (24 + 2) + (5 + 12 - 6) \cdot 7 + 10 \cdot 11$
$= 26 + (17 - 6) \cdot 7 + 110 = 26 + 11 \cdot 7 + 110 = 26 + 77 + 110 = 213$.

Razlika prirodnih brojeva ne mora uvijek biti prirodan broj. Naime, ako je umanjenik manji od umanjitelja, primjerice $3 - 7$, tada oduzimanje nije izvedivo u skupu prirodnih brojeva. Stoga skup $\mathbf{N}$ proširujemo do skupa cijelih brojeva u kojem je i operacija oduzimanja uvijek izvediva. Skup cijelih brojeva označavamo sa $\mathbf{Z}$ i vrijedi:

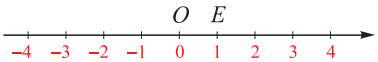
$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$



Svaki cijeli broj možemo smjestiti na brojevni pravac. Pravac postaje brojevni ako mu označimo ishodište (točku O) i jediničnu dužinu ($\overline{OE}$, franc. *étalon* – pramjera). Točku E nazivamo jedinična točka.



Sada na taj pravac možemo smjestiti svaki cijeli broj. Smjestimo ih nekoliko:



Pogledajmo što imaju zajedničko brojevi 4 i -4 na brojevnom pravcu. Brojevi 4 i -4 imaju jednake udaljenosti od nule. Te udaljenosti zovemo **apsolutne vrijednosti** ili **moduli** cijelih brojeva. Brojeve 4 i -4 nazivamo međusobno **suprotnim** brojevima.

Apsolutna vrijednost ili modul cijelog broja x je, dakle, udaljenost broja x od ishodišta brojevnog pravca i označujemo je $|x|$. Tako je $|5| = 5$, $|-5| = -(-5) = 5$, $|0| = 0$.

Uočimo da je $|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

Uvedimo i neke oznake koje ćemo često koristiti u zapisu matematičkog teksta.

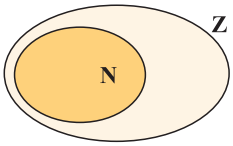
Činjenicu da je broj -10 cijeli broj kraće zapisujemo:

$$-10 \in \mathbf{Z}$$

i čitamo "minus deset je element skupa ze". Broj 0.47 nije cijeli broj i to ćemo zapisati: $0.47 \notin \mathbf{Z}$. Čitamo: "nula cijelih četrdeset sedam nije element skupa ze".

Svi prirodni brojevi su ujedno i cijeli brojevi, tj. skup $\mathbf{N}$ je dio skupa $\mathbf{Z}$, te ga nazivamo podskupom skupa $\mathbf{Z}$ i zapisujemo

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}.$$

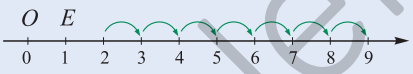


PRIMJER 3.

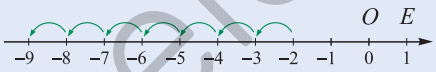
Izračunajmo:

a) $2+7$ **b)** $-2-7$ **c)** $-2+7$ **d)** $2-7$.

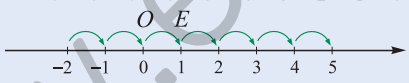
a) $2+7=9$



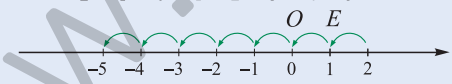
b) $-2-7=-9$



c) $-2+7=5$



d) $2-7=-5$



Uočimo da u prva dva zadatka zbrajamo cijele brojeve istih predznaka, a u druga dva zadatka cijele brojeve suprotnih predznaka.

I. Cijele brojeve istih predznaka zbrajamo tako da apsolutne vrijednosti brojeva zbrojimo, a predznak prepišemo.

II. Cijele brojeve suprotnih predznaka zbrajamo tako da apsolutne vrijednosti oduzmemo (od veće oduzmemo manju), a predznak broja s većim modulom prepišemo.

PRIMJER 4.

Izračunajmo:

a) $2\cdot 7$ **b)** $-2\cdot(-7)$ **c)** $-2\cdot 7$ **d)** $2\cdot(-7)$.

U prva dva zadatka množimo cijele brojeve istih predznaka, a u druga dva zadatka cijele brojeve suprotnih predznaka. Pravila za množenje cijelih brojeva su:

I. Umnožak cijelih brojeva istih predznaka je pozitivan broj i jednak je umnošku apsolutnih vrijednosti faktora.

II. Umnožak cijelih brojeva suprotnih predznaka je negativan broj čija je apsolutna vrijednost jednaka umnošku apsolutnih vrijednosti faktora.

a) $2\cdot 7=14$ **b)** $-2\cdot(-7)=14$ **c)** $-2\cdot 7=-14$ **d)** $2\cdot(-7)=-14$.

PRIMJER 5.

Izračunajmo: $3\cdot(15-14\cdot(11\cdot 8-18\cdot 3))$.

Sredimo prvo unutarnju zagradu:

$$3\cdot(15-14\cdot(11\cdot 8-18\cdot 3))=3\cdot(15-14\cdot(88-54))=3\cdot(15-14\cdot 34)$$
$$=3\cdot(15-476)=3\cdot(-461)=-1383.$$

PRIMJER 6.

Izračunajmo $5-(3-7-5)$ uklanjanjem zagrada.

$5-(3-7-5)=5+(-1)\cdot(3-7-5)=5-3+7+5=14.$

U ovom primjeru uočavamo pravilo: ako je ispred zagrade "$-$", uklanjanjem se zagrade mijenjaju predznaci svih brojeva unutar zagrade.

ZADATCI 1.1.

1. Izračunaj na najbrži mogući način primjenjujući svojstva zbrajanja i množenja:

a $358+472+35$ **b** $800+256+435$ **c** $1257+1000+363$

d $250+494+250$ **e** $9999+728+1$ **f** $4568+201+32$.

2. Izračunaj primjenjujući svojstva zbrajanja:

a $12+35+18+75$ **b** $37+12+43+28$ **c** $450+550+2700+1300$.

3. Izračunaj primjenjujući svojstva množenja:

a $11\cdot2\cdot5$ **b** $37\cdot15\cdot2$ **c** $4567\cdot0\cdot6555$ **d** $25\cdot12\cdot40$.

4. Izračunaj koristeći se svojstvima zbrajanja i množenja:

a $173\cdot10+28\cdot10$ **b** $72\cdot15+72\cdot19$ **c** $451\cdot23+451\cdot57$

d $99\cdot27+121\cdot27$ **e** $3\cdot17+14\cdot17+15\cdot17$ **f** $34\cdot21+20\cdot21+21\cdot86$.

5. Ante je radio 3 dana po 8 sati na dan, Jurica 4 dana po 7 sati dnevno, dok je Martina radila 5 dana po 10 sati dnevno. Ako je cijena jednog radnog sata 14 kuna, koliko su ukupno kuna zaradili?

6. U zgradi postoje tri jednosobna stana površine $45\,m^2$, pet dvosobnih stanova od $54\,m^2$, te dva trosobna stana površine $76\,m^2$. Ako je mjesečna cijena grijanja $1\,m^2$ stana 8 kuna, koliki je mjesečni račun za grijanje stambenog prostora cijele zgrade?

7. Izračunaj:

a $(163-142)\cdot5+3\cdot(19-11)$ **b** $163-14\cdot5+3\cdot19-11$

c $400-100\cdot3+5\cdot(125-3\cdot32)$ **d** $35-5\cdot4-4\cdot(18-17)$

e $(299+135)\cdot7+29\cdot(423-399)$ **f** $299-13\cdot7+29\cdot423-399$

g $(299-13\cdot7+29)\cdot423-399$ **h** $387-15\cdot(35-27)+15-15\cdot14$.

8. Izračunaj:

a $(189:3-27):6$ **b** $(225:9+15):10$

c $(324:(36:2)):(3\cdot3)$ **d** $1000-(10\,000:100)\cdot9$.

9. 4096 litara soka treba razdijeliti u dvolitrene boce. Koliko je boca potrebno?

10. U paketu čija je vrijednost 320 kn nalazi se 64 komada čokolade. Kolika je vrijednost jedne čokolade?

11. Na pravcu nacrtaj točke O i E tako da je $|OE| = 1\,\text{cm}$. Odredi točke pridružene brojevima 2, 4, 6, 8, -2, -4, -6, -8.

12. Izračunaj:

a $|10|+|-5|$ **b** $|-11|-|-7|$ **c** $2\cdot|-6|+3\cdot|7|$ **d** $4\cdot|-5|-2\cdot|-1|$.

13. **a** Koja dva broja imaju apsolutnu vrijednost jednaku 12?

b Koja dva broja imaju apsolutnu vrijednost jednaku 175?

14. Izračunaj:

a $14+(-22)+28$ **b** $-32+(-10)-21$ **c** $13-(-14)-1$

d $39+(-24)-10$ **e** $-28+(-50)+(-75)$ **f** $-20-33-44$.

15. Izračunaj:

a $10+(-22)+28+(-48)$ **b** $-27-45+(-82)+(-21)$

c $-35-(-37)+42+(-81)$ **d** $21+(-25)-32+29$.

16. Izračunaj:

a $2\cdot(-8)\cdot 4$ **b** $(-5)\cdot(-2)\cdot(-13)$ **c** $(-12)\cdot(-15)\cdot(-3)$

d $(-7)\cdot(-49)\cdot 2$ **e** $(-14)\cdot 8\cdot(-25)$ **f** $(-100)\cdot 225\cdot(-8)$.

17. Izračunaj:

a $441:(-9)+9$ **b** $-256:32-32\cdot(-2)$ **c** $48-48:(-8)$

d $(48-48):(-8)$ **e** $165-165:11-1$ **f** $1001:(169:13)$.

18. Izračunaj:

a $15-3\cdot(20-11\cdot 2)+44$ **b** $100-10\cdot(44-3\cdot 17)-27$

c $-59+21\cdot(32+4\cdot(-11))+48$ **d** $-298-27\cdot(-15-2\cdot(-10))-301$

e $-288:4-3\cdot(-27\cdot 18+2)$ **f** $-1024:(-16)+32\cdot(47-(-8+8))$

g $-1000:(-50)\cdot 17-432:(-36):2$ **h** $3\cdot(15-15\cdot(21\cdot 4-32\cdot 3)):15$.

19. Izračunaj:

a $-3-2\cdot\big(-3+2\cdot(-3)\big)-2\cdot(-1)$ **b** $-3-2\cdot\big(-3+2\cdot(-3\cdot(-2)-3)\big)$

c $5-3\cdot\big(-5+3\cdot(-5\cdot(-3)-5)\big)$ **d** $-4-5\cdot\big((-4-5)\cdot(-2-1)-(-2+1)\cdot(-3+2)\big)$

e $-100+100:(-4+3\cdot(-7))+45:(-5)$ **f** $(-2\cdot(-20-33-44)\cdot(-3)+1)\cdot 5$

g $320-2\cdot(-3\cdot(-32:8+4))$ **h** $144:(-12)-4\cdot(-4+(-4)\cdot 4)+72$.

20. Jutarnja temperatura zraka jednog zimskog dana bila je $-5\,°\text{C}$. Do podneva se temperatura povisila za $14\,°\text{C}$, a nakon toga je padala. Do večeri se spustila za $16\,°\text{C}$. Kolika je bila temperatura u podne, a kolika navečer?

21. Banka svom stalnom klijentu odobrava dopušteno prekoračenje od 5000 kn na tekućem računu. 1. 12. stanje računa bilo je 502 kn. 2. 12. klijent je na bankomatu podigao 4000 kn. Kakvo mu je stanje računa nakon te transakcije? Koliko kuna klijent mora položiti u banku da mu stanje računa bude 0?

1.2. Skup racionalnih brojeva

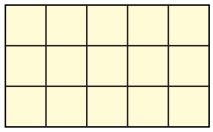
Da bi dijeljenje bilo izvedivo, skup $\mathbf{Z}$ proširujemo do skupa racionalnih brojeva koji označavamo slovom $\mathbf{Q}$ i zapisujemo:

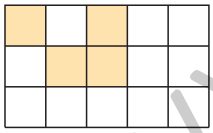
$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : \ a, b \in \mathbf{Z}, \ b \neq 0 \right\}.$$

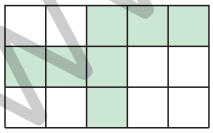
U racionalnom broju $\frac{a}{b}$ broj a nazivamo **brojnik**, a broj b **nazivnik** razlomka.

Pozitivni racionalni brojevi primjenjuju se u zapisu dijelova neke cjeline.

Promotrimo pravokutnik na desnoj slici. Podijeljen je na 15 jednakih dijelova koje nazivamo petnaestine i označujemo ih s $\frac{1}{15}$.







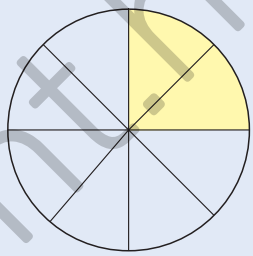
Na slikama lijevo iscrtani su dijelovi pravokutnika jednaki $\frac{4}{15}$, odnosno $\frac{7}{15}$.

Uočimo da je svaki prirodan, odnosno cijeli broj ujedno i racionalan broj. Npr. broj 5 možemo napisati u obliku razlomka na beskonačno mnogo načina.

$$5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{15}{3} = \ldots; \quad \text{općenito} \quad a = \frac{a}{1}.$$

PRIMJER 1.

Uočimo iscrtani dio kruga na slici. Možemo ga zapisati na dva načina: kao $\frac{1}{4}$, ali i kao $\frac{2}{8}$. Dakle, $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$.



Primijetimo da je produkt brojnika prvog razlomka i nazivnika drugog jednak produktu nazivnika prvog i brojnika drugog razlomka. Ovo svojstvo služi za definiciju jednakosti razlomaka.

Dva racionalna broja $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ su **jednaka** ako vrijedi $ad = bc$.

PRIMJER 2.

Dokažimo da je za svaki $x \neq 0$, $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot x}{b \cdot x}$.

Unakrsnim množenjem dobivamo $a \cdot (b \cdot x) = b \cdot (a \cdot x)$ što je istinito jer je množenje cijelih brojeva asocijativno i komutativno.

Kažemo da smo razlomak $\frac{ax}{bx}$ dobili **proširivanjem** razlomka $\frac{a}{b}$ brojem x. I obratno, razlomak $\frac{a}{b}$ dobili smo **skraćivanjem** razlomka $\frac{ax}{bx}$ brojem x.

PRIMJER 3.

a) Skratimo razlomak $\frac{126}{108}$.

b) Proširimo razlomke $\frac{7}{6}$ i $\frac{11}{9}$ do **najmanjeg zajedničkog nazivnika**.

c) Proširimo razlomke $\frac{7}{144}$ i $\frac{11}{180}$ do najmanjeg zajedničkog nazivnika.

a) Razlomak postupno skraćujemo brojevima 2 i 9: $\frac{126}{108} = \frac{2 \cdot 63}{2 \cdot 54} = \frac{63}{54} = \frac{9 \cdot 7}{9 \cdot 6} = \frac{7}{6}$.

b) $V(6,9) = 18$, pa proširujemo ovako: $\frac{7}{6} = \frac{7 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{21}{18}$, $\frac{11}{9} = \frac{11 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{22}{18}$.

c) Opet tražimo zajednički višekratnik brojeva 144 i 180. Ovaj put to je malo teže napamet odrediti pa pristupamo postupku traženja najmanjeg zajedničkog višekratnika. Rastavimo brojeve 144 i 180 na proste faktore:

$$144 = 2 \cdot 72 = 2 \cdot 8 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3.$$

$$180 = 10 \cdot 18 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5.$$

Broj 2 se kao faktor javlja 4 puta u 144 i 2 puta u 180, pa će se u višekratniku morati pojaviti 4 puta. Broj 3 se u oba broja javlja dva puta, pa će se i u višekratniku pojaviti dva puta. Konačno, 5 se u jednom broju ne pojavljuje, a u drugom je samo jedan faktor 5. To znači da će se u višekratniku 5 pojaviti jedanput. Najmanji zajednički višekratnik od 144 i 180, u oznaci $V(144,180)$ je

$$V(144,180) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 720.$$

144 u 720 ide 5 puta pa prvi razlomak proširujemo sa 5, a 180 u 720 ide 4 puta pa drugi razlomak proširujemo sa 4 i imamo:

$$\frac{7}{144} = \frac{7 \cdot 5}{144 \cdot 5} = \frac{35}{720}, \qquad \frac{11}{180} = \frac{11 \cdot 4}{180 \cdot 4} = \frac{44}{720}.$$

Racionalne brojeve zbrajamo tako da ih svedemo na zajednički nazivnik (najčešće najmanji), potom zbrojimo brojnike, a nazivnik ostaje isti.

PRIMJER 4.

Izračunajmo $\frac{5}{4} + \frac{1}{3}$.

$\frac{5}{4}$ i $\frac{1}{3}$ nemaju jednake nazivnike pa ih prvo proširimo tako da su im nazivnici jednaki, tj. $\frac{5}{4} = \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{15}{12}$, $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{4}{12}$, pa je $\frac{5}{4} + \frac{1}{3} = \frac{15}{12} + \frac{4}{12} = \frac{19}{12}$.

Promotrimo bilo koji razlomak $r = \frac{a}{b}$. Tada za racionalan broj $r' = \frac{-a}{b}$ vrijedi

$$\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{a + (-a)}{b} = \frac{0}{b} = 0,$$

tj. $r + r' = 0$. Broj r' nazivamo **suprotan broj** broja r i označavamo s $-r$.

PRIMJER 5.

Odredimo suprotne brojeve od $\frac{14}{3}, \frac{-2}{17}$.

$-\frac{14}{3} = \frac{-14}{3}, \; -\left(\frac{-2}{17}\right) = \frac{2}{17}.$

Osim svojstva postojanja suprotnog elementa, zbrajanje ima još neka svojstva:

1. Zbrajanje je asocijativno, tj. za bilo koja tri racionalna broja r_1, r_2 i r_3 vrijedi
$$(r_1 + r_2) + r_3 = r_1 + (r_2 + r_3).$$
2. Zbrajanje je komutativno, tj.
$$r_1 + r_2 = r_2 + r_1 \quad \text{za svaki} \quad r_1, \; r_2 \in \mathbf{Q}.$$
3. Za svaki $r \in \mathbf{Q}$ vrijedi
$$r + 0 = r.$$

PRIMJER 6.

Koristeći svojstva zbrajanja izračunajmo zadane izraze:

a) $\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right)$ **b)** $\left(\frac{8}{5} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}$.

a) $\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} + \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{-2+1}{6} = \frac{-1}{6} = -\frac{1}{6},$
pri čemu smo koristili komutativnost unutar zagrade, zatim asocijativnost, te konačno definiciju zbrajanja.

b) $\left(\frac{8}{5} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = \frac{8}{5} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{8}{5} + 0 = \frac{8}{5},$
pri čemu smo koristili asocijativnost, zbrajanje suprotnih brojeva, te zbrajanje s nulom.

Primijetimo da ne spominjemo oduzimanje kao posebnu operaciju. Naime, razlika $r_1 - r_2$ poistovjećuje se sa zbrojem $r_1 + (-r_2)$, tj. oduzimanje se svodi na zbrajanje.

Umnožak dvaju racionalnih brojeva je racionalni broj čiji je brojnik jednak umnošku brojnika faktora, a nazivnik je jednak umnošku nazivnika faktora. Ili ako zapišemo s pomoću općih brojeva, imamo sljedeću formulu: $\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}}$.

Ako je $\frac{a}{b}$ razlomak različit od 0, tada je očito da za broj $\frac{b}{a}$ vrijedi

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

Broj $\frac{b}{a}$ naziva se **recipročan** broj broja $\frac{a}{b}$ i označava s $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$.

PRIMJER 7.

Napišimo recipročne brojeve zadanim brojevima $\frac{3}{4}$, $\frac{-5}{8}$, 10, -1, $-\frac{4}{15}$.

$\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{3}$, $\left(\frac{-5}{8}\right)^{-1} = \frac{8}{-5} = -\frac{8}{5}$, $(10)^{-1} = \left(\frac{10}{1}\right)^{-1} = \frac{1}{10}$, $(-1)^{-1} = -1$, $\left(-\frac{4}{15}\right)^{-1} = -\frac{15}{4}$.

Dijeljenje racionalnih brojeva definiramo s pomoću recipročnih brojeva ovako: razlomak $\frac{a}{b}$ se dijeli s razlomkom $\frac{c}{d}$ tako da se $\frac{a}{b}$ pomnoži s recipročnim brojem djelitelja $\frac{c}{d}$.

Dijeljenje racionalnih brojeva

Za svaka dva racionalna broja $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$, $\frac{c}{d} \neq 0$, vrijedi

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Navedimo i svojstva množenja. Već smo spomenuli da za svaki racionalni broj različit od nule postoji njemu recipročan broj.

Također, istaknimo da za svaki racionalni broj r vrijedi

$$r \cdot 1 = r.$$

Nadalje, množenje je asocijativno, tj.

$$r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3) = (r_1 \cdot r_2) \cdot r_3, \quad \text{za sve } r_1,\ r_2,\ r_3 \in \mathbf{Q};$$

komutativno, tj.

$$r_1 \cdot r_2 = r_2 \cdot r_1, \quad \text{za sve } r_1,\ r_2 \in \mathbf{Q}$$

i distributivno prema zbrajanju, tj.

$$r_1 \cdot (r_2 + r_3) = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3, \quad \text{za sve } r_1,\ r_2,\ r_3 \in \mathbf{Q}.$$

Množenje je operacija višeg stupnja u odnosu na zbrajanje. Drugim riječima, ako se u izrazu bez zagrada pojave zbrajanje i množenje, prvo će se izvršiti množenje, zatim zbrajanje.

PRIMJER 8.

Izračunajmo:

a) $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{6}$ **b)** $\dfrac{\frac{11}{15}\cdot\left(3-\frac{7}{4}\right)}{\frac{5}{4}-1:\frac{3}{2}}-\frac{1}{7}:\frac{1}{2}$.

a) Ovo je izraz bez zagrada i prvo se vrši množenje, zatim zbrajanje.

$$\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{6}=\frac{3}{5}+\frac{2\cdot 7}{5\cdot 6}=\frac{3}{5}+\frac{7}{15}=\frac{9+7}{15}=\frac{16}{15}.$$

b) U ovom se izrazu pojavljuje zagrada koja se prva izračunava, onda se vrši množenje (i dijeljenje), te na kraju zbrajanje (i oduzimanje).

$$\frac{\frac{11}{15}\cdot\left(3-\frac{7}{4}\right)}{\frac{5}{4}-1:\frac{3}{2}}-\frac{1}{7}:\frac{1}{2}=\frac{\frac{11}{15}\cdot\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}-1\cdot\frac{2}{3}}-\frac{1}{7}\cdot 2=\frac{\frac{11}{12}}{\frac{5}{4}-\frac{2}{3}}-\frac{2}{7}=\frac{\frac{11}{12}}{\frac{7}{12}}-\frac{2}{7}$$

$$=\frac{11\cdot 12}{12\cdot 7}-\frac{2}{7}=\frac{11}{7}-\frac{2}{7}=\frac{9}{7}.$$

Primijetimo da se u računu pojavio dvojni razlomak $\dfrac{\frac{11}{12}}{\frac{7}{12}}$ koji smo izračunali koristeći se definicijom dijeljenja i množenja. Naime, vrijedi

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

Omjeri

Razlomak $\frac{a}{b}$ poistovjećujemo s kvocijentom $a:b$. Taj se kvocijent naziva i **omjer**. Budući da razlomke možemo skraćivati i proširivati isto se može postupiti i s omjerima, tj.:

$$\text{ako je } x:y=k, \text{ tada je } (x\cdot a):(y\cdot a)=k \text{ i } \frac{x}{a}:\frac{y}{a}=k,$$

pri čemu je $a\neq 0$.

Izjednačimo li dva omjera, dobili smo **razmjer** ili proporciju. Dakle, ako je $a:b=k$ i $c:d=k$, tada je $a:b=c:d$. Brojevi a i d zovu se vanjski članovi razmjera, dok su b i c unutarnji članovi razmjera.

Iz ovog zapisa razmjera $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ slijedi da je $ad=bc$, tj. umnožak vanjskih članova razmjera jednak je umnošku unutarnjih članova.

$$a:b=c:d$$