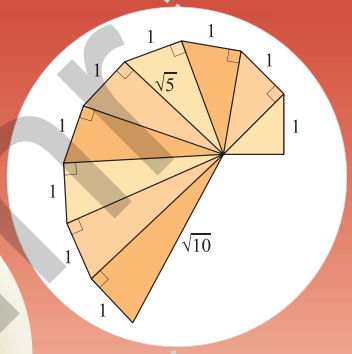
1 | Korijeni



Nakon ovog poglavlja moći ćeš:

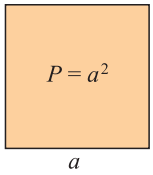
- ✓ procijeniti i računati približnu vrijednost drugog i trećeg korijena
- ✓ računati s izrazima s drugim i trećim korijenom poštujući redoslijed računskih operacija
- ✓ kvadrirati binom s drugim i trećim korijenom
- ✓ djelomično korjenovati izraz
- ✓ racionalizirati nazivnik razlomka
- ✓ dokazati da je $\sqrt{2}$ iracionalni broj
- ✓ povezati pojedine sadržaje sa svakodnevnim životom
- ✓ izvoditi postupke slijedeći ustanovljena pravila
- ✓ modelirati jednostavnu problemsku situaciju i riješiti je

1.1. Drugi i treći korijen

ISTRAŽI!

Duplikacija kocke. 430. je godina prije Krista. U Ateni vlada kuga. Delfijsko proročište u Delosu Atenjanima daje proročanstvo da će kuga prestati harati ako naprave novi oltar bogu Apolonu u obliku kocke koji je dvostruko veći po obujmu od postojećeg kockastog oltara. Istraži jesu li Atenjani uspjeli napraviti novi oltar. Razmisli o matematičkom modelu ovog problema.

Poznajemo li duljinu stranice kvadrata, lako ćemo izračunati njegovu površinu poznavajući formulu $P = a^2$.



Tako je površina kvadrata sa stranicom duljine $5\,\text{cm}$ jednaka

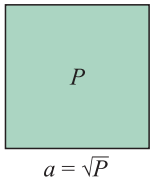
$$P = a^2 = 5^2 = 25\,\text{cm}^2.$$

Kako riješiti obrnuti problem? Što ako znamo površinu kvadrata, a želimo izračunati duljinu njegove stranice?

Kolika je stranica kvadrata čija je površina $16\,\text{dm}^2$? Označimo li duljinu stranice sa x, dobivamo:

$$x^2 = 16.$$

Tražimo broj koji pomnožen sa samim sobom daje 16. Dva su takva broja 4 i -4. Budući da je duljina pozitivan broj, odgovor je $x = 4\,\text{dm}$. Broj 4 nazivamo **drugi** ili **kvadratni** korijen broja 16 i označavamo $4 = \sqrt{16}$.



Drugi korijen iz nekog pozitivnog broja ima dva svojstva: pozitivan je i kvadriran daje taj broj.

Drugi korijen

Drugi korijen pozitivnog broja a je pozitivni broj koji pomnožen sam sa sobom daje broj a.

Uobičajena oznaka za drugi korijen iz broja a je $\sqrt{a}$. Istaknimo još jednom da je drugi korijen broja a pozitivno rješenje jednadžbe $x^2 = a$. Dakle, vrijedi

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

Broj a u jednadžbi $x^2 = a$ može biti jednak i 0. Tada jednadžba ima jedno rješenje $x = 0$ te je drugi korijen iz 0 jednak 0, tj. $\sqrt{0} = 0$.

PRIMJER 1.

Izračunajmo $\sqrt{10\,000}$, $\sqrt{0.36}$, $\sqrt{\frac{49}{81}}$.

$\sqrt{10\,000} = 100$ jer je $100^2 = 10\,000$. $\sqrt{0.36} = 0.6$ jer je $0.6^2 = 0.36$. I $\sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{7}{9}$ jer je $\left(\frac{7}{9}\right)^2 = \frac{49}{81}$.

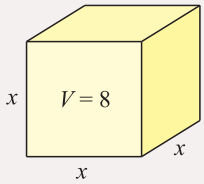
PRIMJER 2.

Obujam kocke je $8\,\text{dm}^3$. Koliko je dugačak brid te kocke?

Ako sa x označimo duljinu brida kocke, tada koristeći formulu za obujam kocke $V = x^3$ dobivamo

$$x^3 = 8.$$

Tražimo broj koji kubiran daje 8. To je broj 2 koji nazivamo **treći** ili **kubni korijen** broja 8 i označavamo sa $\sqrt[3]{8}$.



Treći korijen

Treći korijen realnog broja a je broj čiji je kub jednak a.

Treći korijen iz a označavamo sa $\sqrt[3]{a}$. Vrijedi:

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a.$$

PRIMJER 3.

Izračunajmo $\sqrt[3]{1000}$, $\sqrt[3]{0.125}$, $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}$.

$\sqrt[3]{1000} = 10$ jer je $10^3 = 1000$. $\sqrt[3]{0.125} = 0.5$ jer je $0.5^3 = 0.125$.

$\sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = -\frac{3}{2}$ jer je $\left(-\frac{3}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}$.

Vrijednosti su korijena iz mnogih brojeva iracionalne te se često za korjenovanje koristi džepno računalo. Uobičajene su tipke $\sqrt{\ }$ i $\sqrt[3]{\ }$, a i uz pomoć tipke x^y možemo izračunati drugi, treći

pa i bilo koji korijen iz broja x. Naime, ako računamo drugi korijen iz x, tada za y upotrebljavamo $\frac{1}{2}$. Ako računamo treći korijen iz x, tada je $y = \frac{1}{3}$. Uvijek treba biti svjestan da ako korijen nije konačan decimalni broj, tada računalo daje samo približnu vrijednost rezultata.

Pokažimo da je $\sqrt{2}$ iracionalan broj. Sljedeći ideju ovog dokaza dokaži iracionalnost raznih drugih i trećih korjena.

Dokaz se provodi "metodom indirektnog dokaza". Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da je broj $\sqrt{2}$ racionalni broj, odnosno da se može zapisati u ovom obliku:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}, \quad a, b \in \mathbb{N}.$$

Za $\sqrt{2}$ vrijedi da kvadriran daje 2, tj.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2, \quad \frac{a^2}{b^2} = 2, \quad \text{tj.} \quad a^2 = 2b^2.$$

Kad broj a^2 rastavimo na proste faktore, u tom se rastavu svaki faktor javlja paran broj puta, pa se i faktor 2 javlja paran broj puta ili ga uopće nema. A u rastavu broja $2b^2$ faktor 2 se javlja neparan broj puta. Došli smo do nemoguće situacije, tj. pretpostavka "$\sqrt{2}$ je racionalan broj" vodi do nemoguće situacije te je odbacujemo. Dakle, $\sqrt{2}$ nije racionalan.

ZADATCI 1.1.

1. Izračunaj:

a $\sqrt{144}$ **b** $\sqrt{169}$ **c** $\sqrt{324}$ **d** $\sqrt{400}$ **e** $\sqrt{900}$ **f** $\sqrt{36\,100}$

g $\sqrt{1600}$ **h** $\sqrt{4\,410\,000}$ **i** $\sqrt{0.49}$ **j** $\sqrt{1.21}$ **k** $\sqrt{0.0025}$ **l** $\sqrt{0.1225}$.

2. Izračunaj:

a $\sqrt{\frac{9}{4}}$ **b** $\sqrt{\frac{100}{81}}$ **c** $\sqrt{\frac{225}{49}}$ **d** $\sqrt{\frac{121}{10\,000}}$

e $\sqrt{\frac{400}{81}}$ **f** $\sqrt{\frac{64}{225}}$ **g** $\sqrt{\frac{169}{225}}$ **h** $\sqrt{\frac{121}{144}}$.

3. Izračunaj duljinu stranice kvadrata ako mu je površina:

a $400\,\text{cm}^2$ **b** $0.36\,\text{m}^2$ **c** $8100\,\text{mm}^2$ **d** $0.0625\,\text{m}^2$.

4. Izračunaj:

a $2 \cdot \sqrt{\frac{25}{4}} - 7\sqrt{\frac{1}{49}}$ **b** $3\sqrt{\frac{121}{81}} + 4\sqrt{\frac{49}{144}}$ **c** $18\sqrt{\frac{121}{144}} - 5\sqrt{\frac{81}{16}}$

d $15\sqrt{\frac{49}{25}} + 20\sqrt{\frac{81}{100}}$ **e** $5\sqrt{0.36} + 6\sqrt{0.64}$ **f** $18\sqrt{0.16} - 100\sqrt{0.0225}$

g $8\sqrt{0.0016} + 10\sqrt{0.0144}$ **h** $9\sqrt{0.0121} - 2\sqrt{1.69}$.

5. Izračunaj i obrazloži dobivene rezultate:

a $\sqrt[3]{8}$ **b** $\sqrt[3]{27}$ **c** $\sqrt[3]{64}$ **d** $\sqrt[3]{125}$

e $\sqrt[3]{1000}$ **f** $\sqrt[3]{216}$ **g** $\sqrt[3]{8000}$ **h** $\sqrt[3]{1\,000\,000}$.

6. Izračunaj i obrazloži dobivene rezultate:

a $\sqrt[3]{\frac{64}{27}}$ **b** $\sqrt[3]{\frac{1000}{27}}$ **c** $\sqrt[3]{\frac{729}{125}}$ **d** $\sqrt[3]{\frac{27}{8000}}$

e $\sqrt[3]{0.001}$ **f** $\sqrt[3]{0.125}$ **g** $\sqrt[3]{0.008}$ **h** $\sqrt[3]{0.027}$.

7. Luka je riješio nekoliko zadataka. Je li sve točno riješio? Ispravi pogreške.

$\sqrt{0.49} = 0.7$, $\sqrt{6.4} = 0.8$, $\sqrt{0.025} = 0.5$, $\sqrt[3]{9} = 3$, $\sqrt[3]{0.001} = 0.1$, $\sqrt{1000} = 10$

8. Izračunaj duljinu brida kocke ako joj je obujam:

a $64\,\text{m}^3$ **b** $125\,\text{dm}^3$ **c** $0.008\,\text{m}^3$ **d** $1000\,\text{m}^3$.

9. Izračunaj:

a $\sqrt[3]{-1}$ **b** $\sqrt[3]{-64}$ **c** $\sqrt[3]{-27\,000}$ **d** $\sqrt[3]{-0.125}$.

10. Procijeni rezultat pa izračunaj s pomoću džepnog računala i zaokruži na četiri decimale:

a $\sqrt{2}$ **b** $\sqrt{40}$ **c** $\sqrt[3]{9}$ **d** $\sqrt[3]{91}$.

11. S pomoću džepnog računala izračunaj i rezultat zaokruži na četiri decimale:

a $\sqrt{326}$ **b** $\sqrt{1000}$ **c** $\sqrt[3]{444}$ **d** $\sqrt[3]{2000}$

e $4\sqrt{19} - \sqrt[3]{17}$ **f** $8\sqrt[3]{321} - \frac{1}{2}\sqrt{22}$ **g** $\left(32\sqrt[3]{0.175} - 1\right)\left(\sqrt{14} + 1\right)$.

12. Dokaži da su sljedeći brojevi iracionalni:

a $\sqrt{5}$ **b** $\sqrt{7}$ **c** $\sqrt[3]{2}$ **d** $\sqrt[3]{10}$.

13. Kad tijelo pada, tada za t sekundi prevali put s koji se dobiva s pomoću formule $s = \frac{g}{2}t^2$, gdje je $g = 9.81\ \text{m/s}^2$. Koliko sekundi pada tijelo do tla s nebodera visine $35\,\text{m}$? Rezultat zaokruži na jednu decimalu.

14. Zlatni je privjesak u obliku kockice i ima obujam $0.064\,\text{cm}^3$. Kolika je duljina brida privjeska?

15. Otkrij koliko znamenaka ima cijeli dio drugog korijena broja koji ima n znamenaka.

1.2. Računanje s korijenima

Korijeni su realni brojevi pa pri računanju upotrebljavamo sva svojstva koja vrijede za operacije u skupu realnih brojeva: komutativnost i asocijativnost za zbrajanje i množenje, distributivnost množenja prema zbrajanju, pravila računanja s 0 i 1.

PRIMJER 1.

Pojednostavnimo

$$18\sqrt{2} - 3\left(2\sqrt{2} + \sqrt[3]{11}\right) - \left(23\sqrt[3]{11} + 4\sqrt{2}\right).$$

$$18\sqrt{2} - 3\left(2\sqrt{2} + \sqrt[3]{11}\right) - \left(23\sqrt[3]{11} + 4\sqrt{2}\right) = 18\sqrt{2} - 6\sqrt{2} - 3\sqrt[3]{11} - 23\sqrt[3]{11} - 4\sqrt{2}$$
$$= \sqrt{2}(18 - 6 - 4) - \sqrt[3]{11}(3 + 23) = 8\sqrt{2} - 26\sqrt[3]{11}.$$

Prisjetimo se ovdje i pravila za potenciranje koja smo uvježbali u prvom razredu.

Ako je $a \in \mathbb{R}$ i n prirodan broj, tada je n-ta potencija broja a jednaka

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ faktora}}.$$

Ako je $a \neq 0$ i $n \in \mathbb{N}$, tada je $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. I još za $a \neq 0$ vrijedi da je $a^0 = 1$.

Za sve $a \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ vrijedi

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \qquad (a^n)^m = a^{nm},$$

a ako je $a \neq 0$, tada je $a^n : a^m = a^{n-m}$.

Za korijene postoje neka pravila koja olakšavaju račun.

Ako su a i b nenegativni brojevi, tada vrijedi:	Ako su a i b realni brojevi, tada vrijedi:
$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$
$\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad b \neq 0$	$\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}, \quad b \neq 0$
$\sqrt{a^2} = a.$	$\sqrt[3]{a^3} = a.$

Dokaz. Dokažimo da vrijedi $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Kvadrirajmo produkt $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab.$$

Dakle, broj $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ pomnožen sam sa sobom daje broj ab pa je prema definiciji korijena, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ upravo drugi korijen iz ab, tj. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

Specijalno ako je $a = b$, tada formula ima oblik

$$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2},$$

tj. $a = \sqrt{a^2}$ za nenegativne brojeve a.

Ovo pravilo možemo proširiti i na više faktora, tj. ako su $a_1, \ldots, a_k$ nenegativni brojevi, tada vrijedi

$$\sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt{a_k} = \sqrt{a_1 a_2 \ldots a_k}.$$

Dokažimo da vrijedi $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$.

Kubirajmo broj $\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$.

$$\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}\right)^3 = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{(\sqrt[3]{a})^3}{(\sqrt[3]{b})^3} = \frac{a}{b}.$$

Dakle, broj $\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ kubiran daje broj $\dfrac{a}{b}$ pa je prema definiciji trećeg korijena taj broj $\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ upravo treći korijen iz $\dfrac{a}{b}$.

Ostale tvrdnje dokazuju se na sličan način. ◄

PRIMJER 2.

Pojednostavnimo $\sqrt{14} \cdot \sqrt{56}$.

Koristeći pravilo $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ i rastav na faktore, imamo

$$\sqrt{14} \cdot \sqrt{56} = \sqrt{14 \cdot 56} = \sqrt{2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt{7^2 \cdot 4^2} = \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{4^2} = 7 \cdot 4 = 28.$$

PRIMJER 3.

Čemu je jednako $\sqrt{(-a)^2}$ ako je $a > 0$?

$(-a)^2 = (-a) \cdot (-a) = a^2$ pa je $\sqrt{(-a)^2} = \sqrt{a^2}$, a $\sqrt{a^2}$ je jednako a za pozitivne brojeve a. Dakle, $\sqrt{(-a)^2} = a$. Primijetimo da je a apsolutna vrijednost broja $-a$ pa je uobičajeno formule $\sqrt{a^2} = a$ i $\sqrt{(-a)^2} = a$, $a > 0$ objediniti u oblik

$$\sqrt{a^2} = |a|, \quad a \in \mathbb{R}.$$

PRIMJER 4.

Djelomično korjenujmo izraz:

a) $\sqrt{75}$ **b)** $\sqrt[3]{108}$.

a) $\sqrt{75} = \sqrt{5 \cdot 5 \cdot 3} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.

b) $\sqrt[3]{108} = \sqrt[3]{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 4} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{4} = 3\sqrt[3]{4}$.

PRIMJER 5.

Djelomično korjenujmo izraz $\sqrt[3]{\dfrac{125x^6y^8}{16a^{-5}b}}$.

$$\sqrt[3]{\frac{125x^6y^8}{16a^{-5}b}} = \frac{\sqrt[3]{5^3\cdot x^6\cdot y^6\cdot y^2}}{\sqrt[3]{2^3\cdot 2\cdot a^{-3}\cdot a^{-2}\cdot b}} = \frac{\sqrt[3]{5^3}\cdot\sqrt[3]{x^6}\cdot\sqrt[3]{y^6}\cdot\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{a^{-3}}\cdot\sqrt[3]{a^{-2}}\cdot\sqrt[3]{b}}$$

$$= \frac{5\cdot x^2\cdot y^2\cdot\sqrt[3]{y^2}}{2\cdot a^{-1}\cdot\sqrt[3]{2\cdot a^{-2}b}} = \frac{5x^2y^2}{2a^{-1}}\sqrt[3]{\frac{y^2}{2a^{-2}b}}.$$

PRIMJER 6.

Unesimo pod znak korijena:

a) $12\sqrt{3}$ **b)** $a^2\sqrt[3]{a}$.

a) Budući da je $12=\sqrt{12^2}$, imamo: $12\sqrt{3}=\sqrt{12^2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{12^2\cdot 3}=\sqrt{144\cdot 3}=\sqrt{432}$.

b) Kako je $a^2=\sqrt[3]{(a^2)^3}=\sqrt[3]{a^6}$, imamo $a^2\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{a^6}\cdot\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{a^6\cdot a}=\sqrt[3]{a^7}$.

PRIMJER 7.

Izračunajmo:

a) $\dfrac{\sqrt{35}}{\sqrt{12}}\cdot\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{80}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{500}}:\dfrac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{25}}$.

a) Koristeći pravila $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ i $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, dobivamo:

$$\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{12}}\cdot\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{80}} = \sqrt{\frac{35}{12}}\cdot\sqrt{\frac{21}{80}} = \sqrt{\frac{35\cdot 21}{12\cdot 80}} = \sqrt{\frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}} = \sqrt{\frac{7^2}{2^2\cdot 2^2\cdot 2^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{7^2}}{\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2^2}} = \frac{7}{2\cdot 2\cdot 2} = \frac{7}{8}.$$

b)

$$\frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{500}}:\frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{25}} = \frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{500}}\cdot\frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{128}} = \sqrt[3]{\frac{40\cdot 25}{500\cdot 128}} = \sqrt[3]{\frac{8\cdot 5\cdot 25}{5\cdot 25\cdot 4\cdot 8\cdot 16}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{4\cdot 16}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2^2\cdot 2^4}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{2^6}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(2^2)^3}} = \frac{1}{4}.$$

PRIMJER 8.

Napišimo brojeve $\frac{1}{\sqrt{5}}$ i $\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$ u obliku razlomka koji u nazivniku nema korijen.

Znamo da se vrijednost razlomka ne mijenja ako ga pomnožimo s 1 pa učinimo to i s ovim razlomkom, ali 1 napišimo kao $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$. Tada imamo

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Dakle, $\frac{\sqrt{5}}{5}$ je jednak razlomku $\frac{1}{\sqrt{5}}$ i nema u nazivniku korijen. Ovaj postupak uklanjanja korijena iz nazivnika naziva se **racionalizacija nazivnika**.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{7}} \cdot \frac{\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7^2}} = \frac{\sqrt[3]{49}}{\sqrt[3]{7^3}} = \frac{\sqrt[3]{49}}{7}.$$

PRIMJER 9.

Racionalizirajmo nazivnik razlomka

$$\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}.$$

Razlomak ćemo pomnožiti sa $\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$ pa će se u nazivniku pojaviti razlika kvadrata:

$$\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} \cdot \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} = \frac{(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2}{(3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2}$$
$$= \frac{18 - 12\sqrt{6} + 12}{18 - 12} = \frac{30 - 12\sqrt{6}}{6} = \frac{6(5 - 2\sqrt{6})}{6} = 5 - 2\sqrt{6}.$$

PRIMJER 10.

Izračunajmo $(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}) \cdot (\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}) - 5(\sqrt{18} - 1)^2$.

Prvi umnožak možemo pojednostavniti tako da tu prepoznamo formulu za razliku kubova $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$ ili jednostavno pomnožimo svaki član prve zagrade sa svakim članom druge zagrade. Dakle,

$$(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}) \cdot (\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}) = (\sqrt[3]{2})^3 - (\sqrt[3]{3})^3 = 2 - 3 = -1.$$

U drugom se pribrojniku javlja kvadrat binoma i tu ćemo upotrijebiti formulu $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

$$(\sqrt{18}-1)^2 = (\sqrt{18})^2 - 2\sqrt{18} + 1 = 18 - 2\sqrt{9\cdot 2} + 1 = 19 - 6\sqrt{2}.$$

Konačno, dani je brojevni izraz jednak

$$-1 - 5(19 - 6\sqrt{2}) = -1 - 95 + 30\sqrt{2} = -96 + 30\sqrt{2}.$$

PRIMJER 11.

Izračunajmo $4\sqrt[3]{8x^7y} - 5\frac{x}{y}\sqrt[3]{27x^4y^4} + 10x^2y^{-2}\sqrt[3]{\frac{1}{8}xy^7}$.

Budući da je $\sqrt[3]{8x^7y} = \sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{x^6}\cdot\sqrt[3]{xy} = 2x^2\sqrt[3]{xy}$, $\sqrt[3]{27x^4y^4} = \sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{x^3}\cdot\sqrt[3]{y^3}\cdot\sqrt[3]{xy} = 3xy\sqrt[3]{xy}$ i $\sqrt[3]{\frac{1}{8}xy^7} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}}\sqrt[3]{y^6}\sqrt[3]{xy} = \frac{1}{2}y^2\sqrt[3]{xy}$, imamo

$$\begin{aligned}
&4\sqrt[3]{8x^7y} - 5\frac{x}{y}\sqrt[3]{27x^4y^4} + 10x^2y^{-2}\sqrt[3]{\frac{1}{8}xy^7}\\
&= 4\cdot 2x^2\sqrt[3]{xy} - 5\frac{x}{y}\cdot 3xy\sqrt[3]{xy} + 10x^2y^{-2}\cdot\frac{1}{2}y^2\sqrt[3]{xy}\\
&= 8x^2\sqrt[3]{xy} - 15x^2\sqrt[3]{xy} + 5x^2\sqrt[3]{xy} = -2x^2\sqrt[3]{xy}.
\end{aligned}$$

ZADATCI 1.2.

1. Pojednostavni:

a $23\sqrt{15} - 4(12\sqrt{15}+2)$

b $12(\sqrt{23}-1) + 14(2-\sqrt{23})$

c $0.5(\sqrt[3]{111}+11) - 0.25(2\sqrt[3]{111}-14)$

d $18 - 21(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

e $2(\sqrt{3}-\sqrt{2}) - 8(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

f $41(\sqrt[3]{3}-2\sqrt{5}) + 5(5\sqrt{5}+\sqrt[3]{3})$.

2. Pojednostavni:

a $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}$ **b** $\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}$ **c** $\sqrt{98}\cdot\sqrt{2}$ **d** $\sqrt{50}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}$ **e** $\sqrt{128}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}$

f $\sqrt{27}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}$ **g** $\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\sqrt{\frac{27}{5}}$ **h** $\sqrt{\frac{45}{8}}\cdot\sqrt{\frac{32}{125}}$ **i** $\sqrt{\frac{243}{128}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$.

3. Pojednostavni:

a $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$ **b** $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{12}}$ **c** $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{50}}$ **d** $\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{160}}$

e $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{54}}\cdot\sqrt{75}$ **f** $\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{98}}\cdot\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{250}}$ **g** $\sqrt{\frac{56}{3}}\cdot\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{189}}\cdot\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{50}}$.

4. Izračunaj:

a $\sqrt[3]{24}\cdot\sqrt[3]{9}$ **b** $\sqrt[3]{75}\cdot\sqrt[3]{45}$ **c** $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{135}$

d $\sqrt[3]{54}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$ **e** $\frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{16}}\cdot\sqrt[3]{10}$ **f** $\sqrt[3]{\frac{250}{189}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2401}{54}}$.

5. Djelomično korjenuj:

a $\sqrt{12}$ **b** $\sqrt{20}$ **c** $\sqrt{50}$ **d** $\sqrt{18}$ **e** $\sqrt{98}$ **f** $\sqrt{128}$ **g** $\sqrt{32}$ **h** $\sqrt{1000}$

i $\sqrt{116}$ **j** $\sqrt{343}$ **k** $\sqrt{250}$ **l** $\sqrt{160}$ **m** $\sqrt[3]{24}$ **n** $\sqrt[3]{54}$ **o** $\sqrt[3]{250}$ **p** $\sqrt[3]{10\,000}$.

6. Neka su $a, b, x, y > 0$. Djelomično korjenuj:

a $\sqrt{a^3}$ **b** $\sqrt{x^9}$ **c** $\sqrt{y^7}$ **d** $\sqrt{a^2b}$ **e** $\sqrt{x^6y^{-3}}$ **f** $\sqrt{a^{11}b^{-8}}$

g $\sqrt{256xy^3}$ **h** $\sqrt{72(a+b)^5}$ **i** $\sqrt[3]{x^5}$ **j** $\sqrt[3]{8a^7}$ **k** $\sqrt[3]{ab^{10}}$ **l** $\sqrt[3]{x^{-4}y^{11}}$.

7. Petar tvrdi: ”Kad imam broj napisan kao umnožak $5^6\cdot 7^{12}\cdot 11^9$, tada ću njegov treći korijen izračunati tako da svaki eksponent podijelim s 3. Dakle, treći korijen zadanog broja je $5^2\cdot 7^4\cdot 11^3$”. Je li Petrovo zaključivanje pravilno?

8. Neka su x i a pozitivni brojevi. Unesi pod znak korijena:

a $2\sqrt{5}$ **b** $2\sqrt{3}$ **c** $3\sqrt{2}$ **d** $18\sqrt{5}$ **e** $2\sqrt{a}$ **f** $a\sqrt{2}$ **g** $x\sqrt{3}$ **h** $x^3\sqrt{5}$

i $2\sqrt[3]{2}$ **j** $3\sqrt[3]{2}$ **k** $2\sqrt[3]{5}$ **l** $4\sqrt[3]{7}$ **m** $x\sqrt[3]{2}$ **n** $a^2\sqrt[3]{3}$ **o** $x^{-1}\sqrt[3]{5}$ **p** $x^2\sqrt[3]{y}$.

9. Izračunaj:

a $2\sqrt{75}-\sqrt{12}+12\sqrt{27}$ **b** $\sqrt{1000}+2\sqrt{160}-4\sqrt{250}$ **c** $18\sqrt{98}+12\sqrt{18}-22\sqrt{32}$

d $\sqrt{125}-5\sqrt{45}+27\sqrt{20}$ **e** $8\sqrt[3]{54}+2\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{2}$ **f** $\sqrt[3]{1250}-12\sqrt[3]{270}+\sqrt[3]{10\,000}$.

10. Kvadriraj binome:

a $(\sqrt{2}+3\sqrt{3})^2$ **b** $(\sqrt{5}-\sqrt{15})^2$ **c** $(2\sqrt{3}-4\sqrt{5})^2$ **d** $(3\sqrt{6}+4\sqrt{3})^2$

e $(\sqrt[3]{4}+1)^2$ **f** $(2\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{2})^2$ **g** $(\sqrt[3]{250}+2)^2$ **h** $(8\sqrt[3]{2}-3)^2$.

11. Izračunaj:

a $(1-\sqrt{3})^2(2+\sqrt{3})$ **b** $(1-\sqrt{2})^2(3+2\sqrt{2})$

c $(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2(9-6\sqrt{2})$ **d** $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2(15+6\sqrt{6})$

e $(2-\sqrt{5})^2+(\sqrt[3]{4}-1)(\sqrt[3]{4}+1)$ **f** $(\sqrt[3]{12}-2\sqrt[3]{2})^2+(\sqrt[3]{12}+2\sqrt[3]{2})^2$.

12. Neka su $a, b, x, y > 0$. Izvedi naznačene operacije:

a $\sqrt[3]{a^2}:\sqrt[3]{a}+9\sqrt[3]{a}$ **b** $\sqrt[3]{x^7y^6}:\sqrt[3]{y^2x^{-3}}$

c $(\sqrt[3]{9}-2\sqrt{3})\cdot\sqrt[3]{3}$ **d** $(2\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{32}):\sqrt[3]{2}$

e $(8\sqrt[3]{a^4}-12\sqrt[3]{27a^4}):\sqrt[3]{a}$ **f** $(6\sqrt{a^3}-2\sqrt[3]{a^5})\cdot a$

g $(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)$ **h** $(x\sqrt{y}-3\sqrt{x})(x\sqrt{y}+3\sqrt{x})$