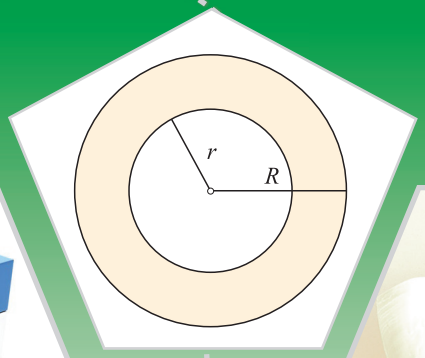
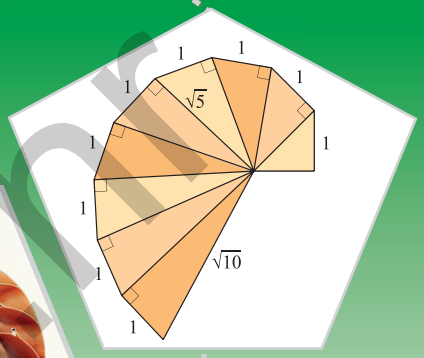
# 1 | Korijeni i potencije




**Nakon ovog poglavlja moći ćeš:**

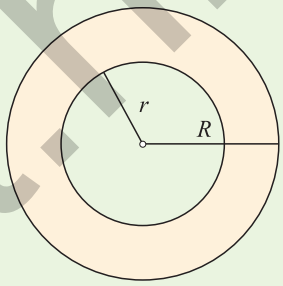
- ✓ prelaziti iz prikaza potencije racionalnog eksponenta u prikaz korijenom i obratno
- ✓ računati vrijednost korijena i potencija racionalnog eksponenta koristeći se džepnim računalom ili bez njega
- ✓ računati s potencijama racionalnog eksponenta

# 1.1. Drugi i treći korijen

Ponovimo što znamo o drugom i trećem korijenu iz prethodnog razreda. Do tih pojmova doveli su nas problemi rješavanja jednadžbi $x^2 = a$ i $x^3 = a$.

**PRIMJER 1.**

Polumjeri veće i manje kružnice kružnog vijenca odnose se kao $5 : 3$. Površina kružnog vijenca je $144\pi\,\text{cm}^2$. Kolike su duljine polumjera kružnica?




Označimo li $R = 5k$, $r = 3k$, tada dobivamo

$$P_{\text{kružni vijenac}} = R^2\pi - r^2\pi = 25k^2\pi - 9k^2\pi = 16k^2\pi$$

$$144\pi = 16k^2\pi, \quad k^2 = 9, \quad k_{1,2} = \pm\sqrt{9} = \pm 3.$$

Budući da su duljine polumjera pozitivni brojevi, slijedi da je $k = 3\,\text{cm}$, a tada je $R = 15\,\text{cm}$ i $r = 9\,\text{cm}$.

**PRIMJER 2.**

Zlatar ima pet zlatnih kuglica sljedećih promjera: $0.25\,\text{cm}$, $0.25\,\text{cm}$, $0.5\,\text{cm}$, $0.75\,\text{cm}$ i $0.75\,\text{cm}$. Želi ih pretopiti u jednu zlatnu kuglu. Koliki će biti polumjer nove kugle?

Polumjeri kuglica su redom $0.125\,\text{cm}$, $0.125\,\text{cm}$, $0.25\,\text{cm}$, $0.375\,\text{cm}$, $0.375\,\text{cm}$. Zbroj obujmova tih pet kuglica jednak je obujmu veće kugle, tj.

$$V = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot 0.125^3\pi + \frac{4}{3} \cdot 0.25^3\pi + 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot 0.375^3\pi = \frac{4}{3}\pi \cdot 0.125,$$

tj.

$$\frac{4}{3}R^3\pi = \frac{4}{3}\pi \cdot 0.125, \quad R^3 = 0.125, \quad R = \sqrt[3]{0.125} = 0.5\,\text{cm}.$$

Nova kugla ima polumjer $0.5\,\text{cm}$.

U prethodnim smo primjerima tražili pozitivne brojeve čiji je kvadrat jednak $9$, odnosno čiji je kub jednak $0.125$. Traženi su brojevi kvadratni (drugi) korijen iz $9$, odnosno treći korijen iz $0.125$.

**Drugi i treći korijen**

**Drugi korijen** pozitivnog broja $a$ je pozitivni broj koji pomnožen sam sa sobom daje broj $a$.

**Treći korijen** realnog broja $a$ je broj čiji je kub jednak $a$.

Drugi i treći korijen iz $0$ jednak je $0$.

Drugi i treći korijen nenegativnog broja su realni brojevi i pri računanju s njima koristimo svojstva zbrajanja i množenja u skupu $\mathbb{R}$. No, za korijene vrijede još i ova pravila.

Ako su $a$ i $b$ nenegativni brojevi, tada vrijedi:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$
$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad b \neq 0$$
$$\sqrt{a^2} = a.$$

Ako je $a$ realni broj, tada je: $\sqrt{a^2} = |a|$.

Ako su $a$ i $b$ realni brojevi, tada vrijedi:

$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$$
$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}, \quad b \neq 0$$
$$\sqrt[3]{a^3} = a.$$

**PRIMJER 3.**

Izračunajmo:

**a)** $\left(\sqrt{a} + \sqrt{2b}\right)^2 - \left(\sqrt{a} - \sqrt{2b}\right)^2$ **b)** $\left(\sqrt[3]{a} + 1\right)\left(\sqrt[3]{a^2} - 1\right)$.

**a)** $\left(\sqrt{a} + \sqrt{2b}\right)^2 - \left(\sqrt{a} - \sqrt{2b}\right)^2 = a + 2\sqrt{2ab} + 2b - \left(a - 2\sqrt{2ab} + 2b\right) = 4\sqrt{2ab}$.

**b)** $\left(\sqrt[3]{a} + 1\right)\left(\sqrt[3]{a^2} - 1\right) = \sqrt[3]{a^3} - \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2} - 1 = a + \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} - 1$.

**PRIMJER 4.**

Racionalizirajmo nazivnike razlomaka:

**a)** $\dfrac{6}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x}}$ **b)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x} - 1}$.

**a)** $\dfrac{6}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x}} = \dfrac{6}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x}} \cdot \dfrac{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} = \dfrac{6\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{x}\right)}{x+3-x} = 2\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{x}\right)$

**b)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x} - 1} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x} - 1} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{x - 1}$.

Kako usporediti dva korijena? Pokažimo da za pozitivne brojeve $x$ i $y$ vrijedi

$$x < y \iff \sqrt{x} < \sqrt{y}.$$

Ovdje se radi o dvije tvrdnje:

**a)** Ako za pozitivne brojeve $x$ i $y$ vrijedi $x < y$, tada je $\sqrt{x} < \sqrt{y}$.

**b)** Ako za pozitivne brojeve $x$ i $y$ vrijedi $\sqrt{x} < \sqrt{y}$, tada je $x < y$.

Dokažimo tvrdnju a). Ako je $x < y$, tada je $y - x > 0$, tj. $\sqrt{y^2} - \sqrt{x^2} > 0$.

Ovu razliku kvadrata rastavimo na faktore:

$$\left(\sqrt{y} - \sqrt{x}\right) \cdot \left(\sqrt{y} + \sqrt{x}\right) > 0.$$

Budući da su faktor $\sqrt{y} + \sqrt{x}$ i cijeli umnožak pozitivni, slijedi da je i $\sqrt{y} - \sqrt{x} > 0$, tj. $\sqrt{y} > \sqrt{x}$ što je i trebalo dokazati.

Dokažimo tvrdnju b). Ako je $\sqrt{x} < \sqrt{y}$, tada je $\sqrt{y} - \sqrt{x} > 0$ pa množeći obje strane nejednakosti s pozitivnim brojem $\sqrt{y} + \sqrt{x}$ dobivamo $y - x > 0$ što je i trebalo dokazati.

Samostalno dokažite da za treći korijen vrijedi slična tvrdnja, tj. da je $x < y$ ako i samo ako je $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y}$.

### PRIMJER 5.

Usporedimo brojeve $7\sqrt{2}$ i $10$.

Broj $7\sqrt{2}$ napišimo u obliku korijena: $7\sqrt{2} = \sqrt{7^2 \cdot 2} = \sqrt{98}$. Također imamo i $10 = \sqrt{100}$. Budući da je $98 < 100$, tada je $\sqrt{98} < \sqrt{100}$, tj. $7\sqrt{2} < 10$.

## ZADATCI 1.1.

**1.** Korjenuj:

**a** $\sqrt{81}$ **b** $\sqrt{25600}$ **c** $\sqrt{0.0049}$ **d** $\sqrt{\dfrac{121}{4900}}$

**e** $\sqrt[3]{27}$ **f** $\sqrt[3]{0.064}$ **g** $\sqrt[3]{8000}$ **h** $\sqrt[3]{\dfrac{8}{125}}$.

**2.** Korjenuj: *

**a** $\sqrt{b^2 - 2b + 1}$ **b** $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$ **c** $\sqrt{100 - 20x + x^2}$ **d** $\sqrt{49 + 14m + m^2}$.

**3.** Neka su $a, b, x, y, z$ pozitivni brojevi. Djelomično korjenuj:

**a** $\sqrt{12x^3y}$ **b** $\sqrt{625a^5b^2}$ **c** $\sqrt[3]{54a^4b^8}$ **d** $\sqrt[3]{\dfrac{40x^5}{y^6z^{10}}}$.

**4.** Faktore ispred korijena ili samostalni broj unesi pod korijen i odredi koji je broj veći:

**a** $7$ ili $4\sqrt{3}$ **b** $4\sqrt{5}$ ili $9$ **c** $\sqrt{38}$ ili $2\sqrt{7}$

**d** $4\sqrt[3]{2}$ ili $5$ **e** $4\sqrt[3]{3}$ ili $3\sqrt[3]{9}$ **f** $2\sqrt[3]{5}$ ili $\sqrt[3]{42}$.

* U zadatcima s općim brojevima smatramo da su izrazi pod korijenom takvog predznaka da je korijen dobro definiran.

**5.** Opiši promjenu polumjera kruga čija se površina

**a** povećala 9 puta **b** smanjila 16 puta **c** povećala 2 puta.

**6.** Bridovi se kvadra iz jednog vrha odnose kao $3:2:5$. Izračunaj oplošje kvadra ako mu je obujam $240\,\text{m}^3$.

**7.** Osni presjek valjka je kvadrat, a obujam mu je $6950\pi\,\text{cm}^3$. Izračunaj duljinu visine valjka.

**8.** Izračunaj:

**a** $\sqrt{x^3y^4}+2\sqrt{x^3y^2}+\sqrt{x^3}$ za $y>0$

**b** $\sqrt{a+1-\sqrt{2a}}\cdot\sqrt{a+1+\sqrt{2a}}$

**c** $\sqrt{x-\sqrt{x^2-4}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x^2-4}}$

**d** $(5+6\sqrt{7})^2$

**e** $(7-\sqrt{3})^2(52+14\sqrt{3})$

**f** $(\sqrt{2}-\sqrt{x})^2+(\sqrt{2}+\sqrt{x})^2$.

**9.** Koristeći Heronovu formulu za površinu trokuta: $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, gdje je $s=\dfrac{a+b+c}{2}$, izračunaj površinu trokuta kojemu su zadane duljine stranica:

**a** $a=\sqrt{10}$, $b=\sqrt{20}$, $c=\sqrt{26}$

**b** $a=15$, $b=3\sqrt{58}$, $c=\sqrt{585}$

**c** $a=\sqrt{m+n}$, $b=\sqrt{n+p}$, $c=\sqrt{m+p}$.

**10.** Racionaliziraj nazivnik u razlomku:

**a** $\dfrac{2}{\sqrt{8}}$ **b** $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ **c** $\dfrac{3+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

**d** $\dfrac{x^3-xy}{x+\sqrt{y}}$ **e** $\dfrac{22}{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ **f** $\dfrac{3+\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3+\sqrt{6}+\sqrt{3}}$.

**11.** Racionaliziraj:

**a** $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ **b** $\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}$ **c** $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ **d** $\dfrac{1}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}$

**e** $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ **f** $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{x}-1}}$ **g** $\dfrac{a^2-4}{\sqrt{a^2+6}+\sqrt{10}}$ **h** $\sqrt{\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}$.

**12.** Racionaliziraj nazivnik u razlomku:

**a** $\dfrac{5}{\sqrt[3]{25}}$ **b** $\dfrac{2}{6+\sqrt[3]{4}}$ **c** $\dfrac{1}{2+\sqrt[3]{a}}$

**d** $\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$ **e** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1}$ **f** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{2ab}+\sqrt[3]{4b^2}}$.

**13.** Koliko je:

**a** $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}$

**b** $\sqrt{8+2\sqrt{7}}+\sqrt{8-2\sqrt{7}}$

**c** $\sqrt{16+2\sqrt{39}}-\sqrt{16-2\sqrt{39}}$

**d** $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$?

**14.** Izračunaj vrijednost funkcije $f(x)=2x^2-x+4$ ako je

**a** $x=\sqrt{6}$ **b** $x=4+3\sqrt{2}$ **c** $x=\dfrac{2}{\sqrt{7}-1}$ **d** $x=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

**15.** Pojednostavni:

**a** $\dfrac{1}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{6}{x-9}$

**b** $\left(\dfrac{1}{3\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{1}{3\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)\cdot(9x-y)$

**c** $\dfrac{16a^2-1}{2\sqrt{a}+1}:\left(1+\dfrac{4\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}-1)^2}\right)$

**d** $\dfrac{4}{a+2\sqrt{a}+1}:\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}+\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{2\sqrt{a}}{a-1}\right)$

**e** $\left(\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right):(\sqrt{x}+\sqrt{y})+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}-1\right)\cdot\dfrac{\sqrt{y}}{1+\sqrt{x}}$

**f** $\left(\left(\dfrac{8}{9-x}-\dfrac{3-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+6}\right):\dfrac{\sqrt{x}-7}{2(\sqrt{x}+3)}-1\right)^{-1}\cdot\dfrac{4}{\sqrt{x}-3}.$

# 1.2. Korijeni

**ISTRAŽI!**

S pomoću programa dinamičke geometrije nacrtaj graf funkcije $f(x)=x^n$ za bar desetak vrijednosti prirodnog broja $n$. Opiši sličnosti i razlike tih grafova. Ako je zadana vrijednost funkcije, primjerice $f(x)=100$, kako odrediti argument $x$ za razne eksponente $n$?

Drugi i treći korijen nenegativnog broja $a$ su nenegativna rješenja jednadžbe $x^2=a$ i $x^3=a$. Promotrimo još neke slične jednadžbe.

**PRIMJER 1.**

Riješimo jednadžbu $x^4=16$.

Jednadžbu napišimo u obliku $x^4-16=0$ i rastavimo na faktore izraz na lijevoj strani. Tako dobivamo $(x-2)(x+2)(x^2+4)=0$.

Umnožak je jednak nuli ako i samo ako je jedan od faktora jednak $0$, tj. ili je $x-2=0$ ili $x+2=0$ ili $x^2+4=0$. Rješenja prvih dviju jednadžbi su $x_1=2$, $x_2=-2$, dok treća jednadžba nema rješenja jer je $x^2+4>0$ za svaki $x\in\mathbb{R}$.

Dakle, jednadžba $x^4=16$ ima dva realna rješenja: $x_1=2$, $x_2=-2$. Pozitivno rješenje $2$ zovemo **četvrti korijen** broja $16$ i označavamo ga s $\sqrt[4]{16}$.

**PRIMJER 2.**

Nađimo sve pozitivne realne brojeve $x$ za koje vrijedi $x^5=243$.

Kad jednadžbu napišemo u obliku $x^5-243=0$, izraz na lijevoj strani treba rastaviti na faktore. Pri tome koristimo formulu

$$x^n-y^n=(x-y)\left(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots+x^2y^{n-3}+xy^{n-2}+y^{n-1}\right)$$

koja se lako dokazuje množenjem izraza na desnoj strani.

Budući da je $243 = 3^5$, imamo:

$$0 = x^5 - 3^5 = (x-3)\left(x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 27x + 81\right).$$

Taj je umnožak jednak $0$ ako je ili $x - 3 = 0$ ili $x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 27x + 81 = 0$.

Iz prve jednadžbe dobivamo $x = 3$. Drugu jednadžbu ne zadovoljava nijedan pozitivan broj jer kad u izraz $x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 27x + 81$ uvrstimo pozitivan broj, cijeli je zbroj pozitivan.

Dakle, početna jednadžba $x^5 = 243$ ima jedno pozitivno rješenje $x = 3$ koje nazivamo **peti korijen** iz $243$ i označavamo $\sqrt[5]{243}$.

Općenito, definicija $n$-tog korijena iz broja $a$ glasi:

**$n$-ti korijen**

***n*-ti korijen** nenegativnog broja $a$ je nenegativan broj čija je $n$-ta potencija jednaka $a$, tj. $n$-ti korijen iz $a$, $a \geqslant 0$, nenegativno je rješenje jednadžbe

$$x^n = a.$$

Oznaka za $n$-ti korijen iz $a$ je $\sqrt[n]{a}$ i kao što vidimo iz definicije, vrijedi

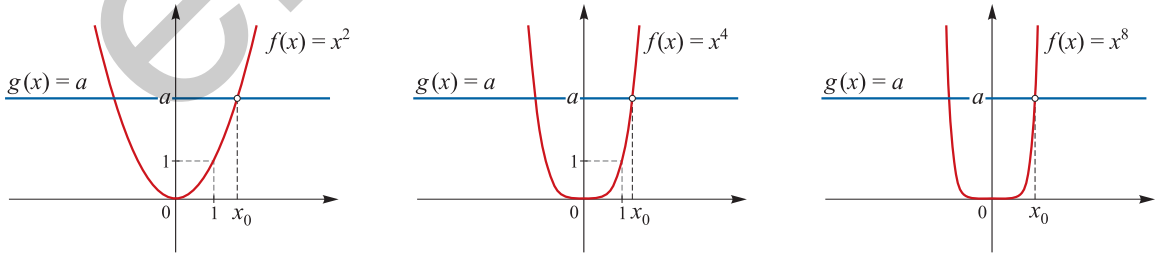
$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

Može se pokazati da je $n$-ti korijen iz $a$ jedinstven, tj. da jednadžba $x^n = a$ ima jedno jedino nenegativno rješenje.

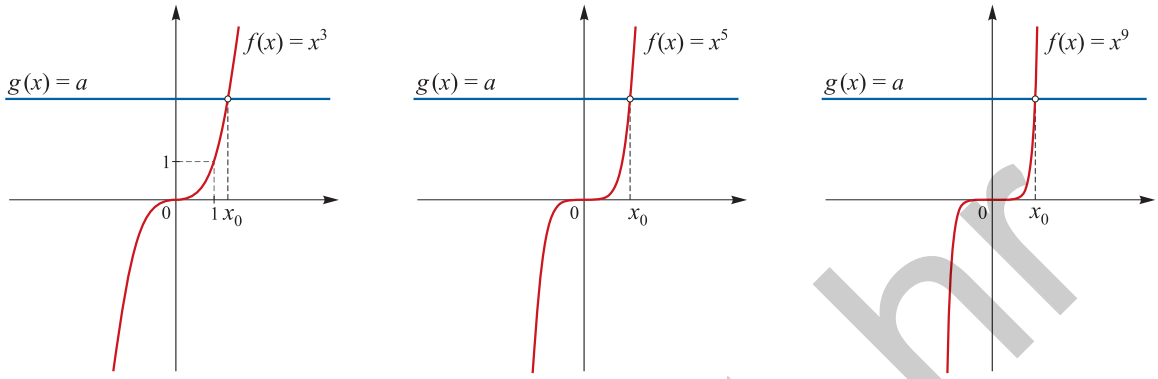
Da bismo to pokazali, riješit ćemo jednadžbu $x^n = a$ grafički. U istom koordinatnom sustavu nacrtat ćemo grafove funkcija $f(x) = x^n$ i $g(x) = a$ i promotriti gdje se sijeku. Apscisa točke presjeka je rješenje jednadžbe.

Prvo promotrimo situaciju kad je $n$ paran prirodan broj.




Graf funkcije $f(x) = x^n$ ($n$ paran) ima oblik sličan paraboli. Pravac $y = a$, $a > 0$ siječe graf od $f$ u dvije točke. Jedna od njih ima pozitivnu apscisu $x_0$, a druga $-x_0$. Dakle, pozitivno rješenje jednadžbe $x^n = a$ ($n$ paran, $a > 0$) postoji i jedinstveno je.

Promotrimo situaciju kad je $n$ neparan prirodni broj.




Pravac $y = a$ siječe graf od $f$ u samo jednoj točki, tj. i u ovom slučaju $x^n = a$ ima rješenje i ono je jedinstveno.

Promatrajući prethodne slike, možemo izvesti zaključke što se događa kada je $a$ negativan broj. U slučaju kada je $n$ paran, pravac $y = a$, $a < 0$ ne siječe graf, tj. jednadžba $x^n = a$ nema rješenja, dakle, $n$-ti korijen iz negativnog broja ne postoji za parni $n$. Ali ako je $n$ neparan, tada pravac $y = a$ siječe graf od $f$, tj. jednadžba $x^n = a$ ima rješenja, tj. $n$-ti korijen iz negativnog broja postoji. Tako je $\sqrt[3]{-8} = -2$ jer je $(-2)^3 = -8$, a $\sqrt[5]{-1024} = -4$ jer je $(-4)^5 = -1024$ itd.

## ZADATCI 1.2.

**1.** Izračunaj i obrazloži dobivene rezultate:

**a** $\sqrt[4]{16}$ **b** $\sqrt[4]{81}$ **c** $\sqrt[4]{256}$ **d** $\sqrt[4]{625}$ **e** $\sqrt[5]{32}$ **f** $\sqrt[6]{64}$

**g** $\sqrt[10]{1024}$ **h** $\sqrt[6]{1\,000\,000}$ **i** $\sqrt[5]{100\,000}$ **j** $\sqrt[6]{15\,625}$ **k** $\sqrt[7]{128}$ **l** $\sqrt[n]{a^n}$, $a \geqslant 0$.

**2.** Izračunaj i obrazloži dobivene rezultate:

**a** $\sqrt[4]{\frac{625}{2401}}$ **b** $\sqrt[4]{\frac{625}{256}}$ **c** $\sqrt[5]{\frac{10\,000}{243}}$ **d** $\sqrt[5]{\frac{1}{7776}}$ **e** $\sqrt[6]{\frac{15\,625}{64}}$ **f** $\sqrt[10]{\frac{1}{1024}}$.

**3.** Izračunaj:

**a** $\sqrt[4]{0.0016}$ **b** $\sqrt[4]{0.0001}$ **c** $\sqrt[4]{0.0625}$ **d** $\sqrt[5]{0.00032}$ **e** $\sqrt[5]{0.00001}$ **f** $\sqrt[7]{0.0000128}$.

**4.** Izračunaj:

**a** $\sqrt[3]{-1}$ **b** $\sqrt[3]{-64}$ **c** $\sqrt[5]{-32}$ **d** $\sqrt[5]{-243}$.

**5.** Ako su $a$ i $b$ pozitivni brojevi, izračunaj:

**a** $\sqrt[5]{a^{10}b^5}$ **b** $\sqrt[4]{(2a+b)^{12}}$ **c** $\sqrt[7]{\frac{1}{a^{14}}}$ **d** $\sqrt[5]{(a-2b)^{20}}$.

**6.** Korijeni se s pomoću džepnog računala računaju upotrebom tipki $\sqrt[x]{\ }$ ili $x^y$. Ako se upotrebljava tipka $x^y$, tada se za $n$-ti korijen iz $x$ stavlja da je $y = \frac{1}{n}$. Izračunaj s pomoću džepnog računala i

rezultat zaokruži na tri decimale:

**a** $\sqrt[5]{5}$ **b** $\sqrt[12]{24}$ **c** $\sqrt[9]{63}$ **d** $\sqrt[4]{0.1}$.

**7.** Riješi jednadžbe u skupu $\mathbb{R}$:

**a** $x^4 - 625 = 0$ **b** $64x^6 - 1 = 0$ **c** $32x^5 - 243 = 0$.

# 1.3. Računanje s korijenima

Kao što za kvadratne i treće korijene postoje neka pravila koja olakšavaju račun, tako i za $n$-te korijene postoje slična pravila. Navedimo prvo svojstva množenja i dijeljenja korijena.

Ako su $a$ i $b$ nenegativni realni brojevi i $b \neq 0$, tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijede svojstva

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Dokaz svojstva za umnožak vrlo je sličan dokazu za kvadratni korijen. Treba pokazati da je broj $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ rješenje jednadžbe $x^n = ab$. Potenciramo li taj broj i upotrijebimo li svojstva potencija, imamo

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b,$$

pa je time pokazano da $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ zadovoljava jednadžbu $x^n = ab$ te prema definiciji $n$-tog korijena slijedi da je $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. Dokaz za $n$-ti korijen kvocijenta provedite samostalno.

Jasno je da ova pravila vrijede i za umnoške u kojima se pojavljuje više od dvaju faktora, tj. za nenegativne brojeve $a_1$, $a_2, \ldots, a_k$ vrijedi

$$\sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{a_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a_k} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_k}.$$

**PRIMJER 1.**

Izračunajmo $\sqrt[n]{a^n}$ i $\sqrt[n]{a^{-n}}$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ faktora}}} = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{n \text{ faktora}} = (\sqrt[n]{a})^n = a. \text{ Dakle, } \sqrt[n]{a^n} = a.$$

Budući da je $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, vrijedi

$$\sqrt[n]{a^{-n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^n}} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{1}{a} = a^{-1},$$

te je $\sqrt[n]{a^{-n}} = a^{-1}$.

U svim zadatcima u kojima se pojavljuju opći brojevi $a$, $b$, $c, \ldots, x$, $y$, $z$ smatramo da su izrazi pod znakom korijena nenegativni.

**PRIMJER 2.**

Ako su $a, b, x$ pozitivni brojevi, izračunajmo $\sqrt[4]{\frac{16a^4b^8}{81x^{12}}}$.

$$\sqrt[4]{\frac{16a^4b^8}{81x^{12}}} = \frac{\sqrt[4]{16a^4b^8}}{\sqrt[4]{81x^{12}}} = \frac{\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{a^4}\cdot\sqrt[4]{b^4}\cdot\sqrt[4]{b^4}}{\sqrt[4]{81}\cdot\sqrt[4]{x^4}\cdot\sqrt[4]{x^4}\cdot\sqrt[4]{x^4}} = \frac{2\cdot a\cdot b\cdot b}{3\cdot x\cdot x\cdot x} = \frac{2ab^2}{3x^3}.$$

**PRIMJER 3.**

Djelomično korjenujmo izraz $\sqrt[3]{\frac{125x^6y^8}{16a^{-5}b}}$.

$$\sqrt[3]{\frac{125x^6y^8}{16a^{-5}b}} = \frac{\sqrt[3]{5^3\cdot x^6\cdot y^6\cdot y^2}}{\sqrt[3]{2^3\cdot 2\cdot a^{-3}\cdot a^{-2}\cdot b}} = \frac{\sqrt[3]{5^3}\cdot\sqrt[3]{x^6}\cdot\sqrt[3]{y^6}\cdot\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{a^{-3}}\cdot\sqrt[3]{a^{-2}}\cdot\sqrt[3]{b}}$$

$$= \frac{5\cdot x^2\cdot y^2\cdot\sqrt[3]{y^2}}{2\cdot a^{-1}\cdot\sqrt[3]{2\cdot a^{-2}b}} = \frac{5x^2y^2}{2a^{-1}}\sqrt[3]{\frac{y^2}{2a^{-2}b}}.$$

**PRIMJER 4.**

Neka su $a$ i $b$ nenegativni brojevi. Unesimo pod znak korijena $2a\sqrt[4]{3a^2b}$.

Kako je $2a = \sqrt[4]{(2a)^4}$, imamo $2a\sqrt[4]{3a^2b} = \sqrt[4]{(2a)^4}\cdot\sqrt[4]{3a^2b} = \sqrt[4]{(2a)^4\cdot(3a^2b)}$
$= \sqrt[4]{2^4\cdot a^4\cdot 3\cdot a^2\cdot b} = \sqrt[4]{48a^6b}$.

**PRIMJER 5.**

Izračunajmo $4\sqrt[3]{8x^7y} - 5\frac{x}{y}\sqrt[3]{27x^4y^4} + 10x^2y^{-2}\sqrt[3]{\frac{1}{8}xy^7}$.

Budući da je $\sqrt[3]{8x^7y} = \sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{x^6}\cdot\sqrt[3]{xy} = 2x^2\sqrt[3]{xy}$, $\sqrt[3]{27x^4y^4} = \sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{x^3}\cdot\sqrt[3]{y^3}\cdot\sqrt[3]{xy} = 3xy\sqrt[3]{xy}$ i $\sqrt[3]{\frac{1}{8}xy^7} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}}\sqrt[3]{y^6}\sqrt[3]{xy} = \frac{1}{2}y^2\sqrt[3]{xy}$, imamo

$$4\sqrt[3]{8x^7y} - 5\frac{x}{y}\sqrt[3]{27x^4y^4} + 10x^2y^{-2}\sqrt[3]{\frac{1}{8}xy^7}$$
$$= 4\cdot 2x^2\sqrt[3]{xy} - 5\frac{x}{y}\cdot 3xy\sqrt[3]{xy} + 10x^2y^{-2}\cdot\frac{1}{2}y^2\sqrt[3]{xy}$$
$$= 8x^2\sqrt[3]{xy} - 15x^2\sqrt[3]{xy} + 5x^2\sqrt[3]{xy} = -2x^2\sqrt[3]{xy}.$$

Vidjeli smo već da je $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$ za $a \geqslant 0$. Sljedeće tvrdnje govore o općenitoj situaciji.

Ako je $a$ pozitivan realan broj, onda vrijede svojstva

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}, \quad n, p \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z}$$

$$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}, \quad n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

**Dokaz.** Označimo sa $x$ $n$-ti korijen iz $a^m$, tj. $x = \sqrt[n]{a^m}$. Tada je $x^n = a^m$. Iz $x^n = a^m$ slijedi $(x^n)^p = (a^m)^p$, tj.

$$x^{np} = a^{mp}.$$

Dakle, za $x$ vrijedi da je $np$-ta potencija broja $x$ jednaka broju $a^{mp}$ pa prema definiciji korijena $np$-ti korijen iz $a^{mp}$ je upravo broj $x$, tj. $x = \sqrt[np]{a^{mp}}$ ili kad se vratimo u početne oznake $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$. Time je dokazana prva tvrdnja.

Drugu tvrdnju dokazujemo upotrebom pravila za množenje korijena.

$$(\sqrt[n]{a})^p = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{p \text{ faktora}} = \underbrace{\sqrt[n]{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}}_{p \text{ faktora}} = \sqrt[n]{a^p}.$$

Samostalno pokažite da ova tvrdnja vrijedi i za $p \leqslant 0$.

Pri dokazu treće tvrdnje uvedimo oznaku

$$x = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

Dakle, $x$ je $n$-ti korijen iz $\sqrt[m]{a}$, pa je $x^n = \sqrt[m]{a}$. Odavde čitamo da je $x^n$ $m$-ti korijen iz $a$, pa je $(x^n)^m = a$. No, kako je $(x^n)^m = x^{nm}$, slijedi $x^{nm} = a$, pa je $x$ jednak $nm$-tom korijenu iz $a$, tj. $x = \sqrt[nm]{a}$, čime je tvrdnja dokazana. ◀

## PRIMJER 6.

Ako su $a, b \geqslant 0$, pojednostavnimo korijen $\sqrt[20]{32a^{15}b^{35}}$.

➡ Uočimo da je $32 = 2^5$, $a^{15} = a^{3\cdot 5}$ i $b^{35} = b^{7\cdot 5}$ te iskoristimo prvo svojstvo $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$:

$$\sqrt[20]{32a^{15}b^{35}} = \sqrt[20]{2^5a^{3\cdot 5}b^{7\cdot 5}} = \sqrt[4\cdot 5]{(2a^3b^7)^5} = \sqrt[4]{2a^3b^7}.$$

## PRIMJER 7.

Svedimo na zajednički korijen i pojednostavnimo $\sqrt[3]{a^2b} \cdot \sqrt[4]{a^3b^5} \cdot \sqrt[6]{a^{-1}b^{-2}}$, $a, b > 0$.

➡ Budući da je 12 najmanji zajednički višekratnik brojeva 3, 4 i 6, sve ćemo korijene svesti na 12-ti korijen.