1 Korijeni i potencije

Nakon ovog poglavlja moći ćeš:

- ✓ prelaziti iz prikaza potencije racionalnog eksponenta u prikaz korijenom i obratno
- ✓ računati vrijednost korijena i potencija racionalnog eksponenta koristeći se džepnim računalom ili bez njega
- ✓ navoditi pravila za računanje s potencijama
- ✓ računati s potencijama racionalnog eksponenta

1.1. Drugi korijen

Ponovimo što znamo o drugom korijenu. Do tog pojma doveo nas je problem rješavanja jednadžbe $x^2 = a$, gdje je a pozitivan realan broj.

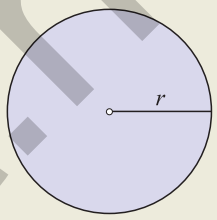
PRIMJER 1.

Površina jednog kruga je $9\pi\,\text{cm}^2$. Ako je površina drugog kruga 25 puta veća od površine prvog, koliko je puta polumjer drugog kruga veći od polumjera prvog kruga?

Izračunamo polumjer prvog kruga:

$$P_1 = r^2\pi, \quad 9\pi = r^2\pi, \quad r^2 = 9$$

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{9} = \pm 3.$$



$P = r^2\pi$

Budući da je duljina pozitivan broj, rješenje je $r = 3\,\text{cm}$.

Površina drugog kruga je

$$P_2 = 25\,P_1 = 25 \cdot 9\pi = 225\pi\,\text{cm}^2.$$

$$r^2\pi = 225\pi, \quad r^2 = 225, \quad r_{1,2} = \pm\sqrt{225}, \quad r = 15\,\text{cm}.$$

Polumjer drugog kruga je 5 puta veći od polumjera prvog kruga.

Jesmo li ovaj primjer mogli riješiti bez poznavanja podataka u prvoj rečenici?

U prethodnom smo primjeru tražili pozitivne brojeve čiji je kvadrat jednak 9, odnosno 225. Traženi su brojevi drugi (kvadratni) korijen iz 9, odnosno iz 225.

Drugi korijen

Drugi korijen pozitivnog broja a je pozitivni broj koji pomnožen sam sa sobom daje broj a.
Drugi korijen iz 0 jednak je 0.

Drugi korijen nenegativnog broja je realni broj i pri računanju s korijenima koristimo svojstva zbrajanja i množenja u skupu $\mathbb{R}$. No, za korijene vrijede još i ova pravila.

Ako su a i b nenegativni brojevi, tada vrijedi:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad b \neq 0$$

$$\sqrt{a^2} = a.$$

Ako je $0 < a < b$, tada je $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Ako je a realni broj, tada je: $\sqrt{a^2} = |a|$.

PRIMJER 2.

Izračunajmo: $\sqrt{2500}$, $\sqrt{0.0081}$, $\sqrt{\frac{36}{49}}$.

$\sqrt{2500} = 50$ jer je $50^2 = 2500$. $\sqrt{0.0081} = 0.09$ jer je $0.09^2 = 0.0081$.

$\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{6}{7}$ jer je $\left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{36}{49}$.

PRIMJER 3.

Izračunajmo:

a) $\sqrt{24} \cdot \sqrt{600}$ **b)** $8\sqrt{12} - 4\sqrt{75} + 9\sqrt{3}$.

a) Primjenom svojstva $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ dobivamo:

$$\sqrt{24} \cdot \sqrt{600} = \sqrt{24 \cdot 600} = \sqrt{4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 100} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{6 \cdot 6} \cdot \sqrt{100} = 2 \cdot 6 \cdot 10 = 120.$$

b) Brojeve $\sqrt{12}$ i $\sqrt{75}$ djelomično korjenujemo:

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}, \qquad \sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}.$$

$$8\sqrt{12} - 4\sqrt{75} + 9\sqrt{3} = 8 \cdot 2\sqrt{3} - 4 \cdot 5\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 16\sqrt{3} - 20\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 5\sqrt{3}.$$

PRIMJER 4.

Izračunajmo: $(\sqrt{7} - 2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{21} + 1)^2$.

Primjenom formule $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ dobivamo:

$$(\sqrt{7} - 2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{21} + 1)^2 = (\sqrt{7})^2 - 2 \cdot \sqrt{7} \cdot 2\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{21}^2 + 2 \cdot \sqrt{21} \cdot 1 + 1^2)$$
$$= 7 - 4\sqrt{21} + 4 \cdot 3 - 21 - 2\sqrt{21} - 1 = -3 - 6\sqrt{21}.$$

PRIMJER 5.

Racionalizirajmo nazivnik razlomaka:

a) $\frac{2}{\sqrt{6}}$ **b)** $\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$.

a) $\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

b) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\dfrac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3}=\dfrac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2}=\sqrt{5}-\sqrt{3},$

pri čemu smo koristili formulu $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

PRIMJER 6.

Usporedimo brojeve $7\sqrt{2}$ i 10.

Broj 7 unesimo pod znak korijena: $7\sqrt{2}=\sqrt{7^2\cdot 2}=\sqrt{98}$. Broj 10 zapišimo u obliku korijena: $10=\sqrt{100}$. Budući da je $98<100$, tada je $\sqrt{98}<\sqrt{100}$, tj. $7\sqrt{2}<10$.

ZADATCI 1.1.

1. Korjenuj:

a $\sqrt{81}$ **b** $\sqrt{25600}$ **c** $\sqrt{0.0049}$ **d** $\sqrt{\dfrac{121}{4900}}$

e $\sqrt{\dfrac{2500}{81}}$ **f** $\sqrt{0.01}$ **g** $\sqrt{m^2}$, $m\geqslant 0$ **h** $\sqrt{x^{18}}$, $x\geqslant 0$.

2. Korjenuj:

a $\sqrt{x^2}$ **b** $\sqrt{(10-x)^2}$ **c** $\sqrt{(7+m)^2}$ **d** $\sqrt{a^2+2ab+b^2}$.

3. Djelomično korjenuj:

a $\sqrt{200}$ **b** $\sqrt{72}$ **c** $\sqrt{18}$ **d** $\sqrt{75}$

e $\sqrt{x^7}$ **f** $\sqrt{a^4b^3}$ **g** $\sqrt{12x^3y}$ **h** $\sqrt{625a^5b^2}$.

x, a i b su pozitivni brojevi.

4. Faktore ispred korijena ili samostalni broj unesi pod korijen i odredi koji je broj veći:

a 7 ili $4\sqrt{3}$ **b** $4\sqrt{5}$ ili 9 **c** $\sqrt{38}$ ili $2\sqrt{7}$ **d** $4\sqrt{2}$ ili 5.

5. Opiši promjenu polumjera kruga čija se površina:

a povećala 9 puta **b** smanjila 16 puta **c** povećala 2 puta.

6. Opiši promjenu stranice kvadrata čija se površina:

a povećala 100 puta **b** smanjila 25 puta **c** povećala 3 puta.

7. Izračunaj stranicu kvadrata čija je površina:

a $100\,\text{cm}^2$ **b** $1440\,\text{cm}^2$ **c** $1200\,\text{mm}^2$ **d** $80\,\text{m}^2$.

8. Sa 4 litre boje jedne vrste Matija može obojiti zid oblika kvadrata stranice 3 m. Kad je kupio 4 litre druge vrste boje trgovac mu je rekao da s istom količinom boje može obojati dvostruko veću površinu nego s

prvom vrstom boje. Matija je pomislio: "Odlično, sad mogu obojati zid oblika kvadrata stranice 6 m." Slažeš li se s Matijom? Obrazloži.

9. Marina je pročitala da sila odbijanja dva pozitivna električna naboja opada s kvadratom udaljenosti. Koja od rečenica je istinita?

a Kad se naboji udalje za 5 metara, njihova se sila odbijanja smanji 25 puta.

b Kad se početna udaljenost između naboja poveća pet puta, njihova sila odbijanja se smanji 25 puta.

c Kad se sila odbijanja povećala 16 puta, njihova se početna udaljenost smanjila četiri puta.

d Kad se početna udaljenost naboja poveća četiri puta, sila njihova odbijanja se smanji četiri puta.

Pronađi još neke pojave čiji intenzitet opada ili raste s kvadratom udaljenosti.

10. Izračunaj:

a $(5+6\sqrt{7})^2$ **b** $(\sqrt{3}-\sqrt{7})^2$ **c** $(8\sqrt{5}-2\sqrt{3})^2$

d $(\sqrt{8}-\sqrt{3})(\sqrt{8}+\sqrt{3})$ **e** $(7-\sqrt{3})^2(52+14\sqrt{3})$ **f** $(\sqrt{2}-\sqrt{11})^2+(\sqrt{2}+\sqrt{11})^2$.

11. Racionaliziraj nazivnik u razlomku:

a $\frac{2}{\sqrt{8}}$ **b** $\frac{1}{\sqrt{17}}$ **c** $\frac{2}{3\sqrt{5}}$ **d** $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ **e** $\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{2}}$ **f** $\frac{3+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.

12. Racionaliziraj:

a $\frac{1}{\sqrt{a}}$ **b** $\frac{1}{\sqrt{x}}$ **c** $\frac{1}{a\sqrt{b}}$ **d** $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ **e** $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ **f** $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

13. Polumjeri veće i manje kružnice kružnog vijenca odnose se kao $5:3$. Površina kružnog vijenca je $144\pi\ \text{cm}^2$. Kolika je duljina polumjera veće kružnice?

a 15 cm **b** 9 cm **c** 8 cm **d** 12 cm

14. Izračunaj vrijednost funkcije $f(x)=2x^2-x+4$ ako je:

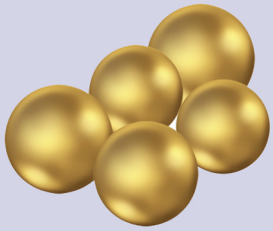
a $x=\sqrt{6}$ **b** $x=\sqrt{17}$ **c** $x=4+3\sqrt{2}$.

1.2. Korijeni

ISTRAŽI!

Zlatar ima pet zlatnih kuglica promjera $0.25\ \text{cm}$, $0.25\ \text{cm}$, $0.5\ \text{cm}$, $0.75\ \text{cm}$ i $0.75\ \text{cm}$. Želi ih pretopiti u jednu zlatnu kuglu. Koliki će biti polumjer nove kugle?

Formula za obujam kugle je $V=\frac{4}{3}R^3\pi$.



Drugi korijen nenegativnog broja a je nenegativno rješenje jednadžbe $x^2=a$. Promotrimo još neke slične jednadžbe.

PRIMJER 1.

Nađimo realni broj x za koji je $x^3 = 8$.

Jednadžbu $x^3 = 8$ napišimo u obliku $x^3 - 8 = 0$ i faktorizirajmo izraz na lijevoj strani:

$$(x-2)(x^2+2x+4) = 0.$$

Istinitost faktorizacije lako se provjeri množenjem zagrada na lijevoj strani. Produkt je jednak nuli ako i samo ako je jedan od faktora jednak 0. Dakle, ili je $x-2=0$ ili je $x^2+2x+4=0$. Rješenje prve jednadžbe je $x=2$, a druga nema realnih rješenja.

Jedini realan broj x za koji vrijedi $x^3 = 8$ jest broj 2. Broj 2 zovemo **treći** (kubni) **korijen** iz 8 i označavamo ga sa $\sqrt[3]{8}$.

PRIMJER 2.

Riješimo jednadžbu

$$x^4 = 16.$$

Jednadžbu napišimo u obliku $x^4 - 16 = 0$ i rastavimo na faktore izraz na lijevoj strani. Tako dobivamo

$$(x-2)(x+2)(x^2+4) = 0.$$

Produkt je jednak nuli ako i samo ako je jedan od faktora jednak 0, tj. ili je $x-2=0$ ili $x+2=0$ ili $x^2+4=0$. Rješenja prvih dviju jednadžbi su $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, a treća jednadžba nema realnih rješenja.

Jednadžba $x^4 = 16$ ima dva realna rješenja: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Pozitivno rješenje, broj 2 zovemo **četvrti korijen** broja 16 i označavamo sa $\sqrt[4]{16}$.

Općenito, definicija n-tog korijena iz nenegativnog broja a glasi:

n-ti korijen

***n*-ti korijen** nenegativnog broja a je nenegativan broj čija je n-ta potencija jednaka a, tj. n-ti korijen iz a je nenegativno rješenje jednadžbe

$$x^n = a.$$

Oznaka za n-ti korijen iz a je $\sqrt[n]{a}$ i kao što slijedi iz definicije, vrijedi

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

PRIMJER 3.

Obrazložimo zašto je $\sqrt[5]{243} = 3$.

Prema definiciji će 3 biti peti korijen iz 243 samo ako je peta potencija broja 3 jednaka 243. Lako je provjeriti da stvarno vrijedi: $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$. Znači, $\sqrt[5]{243} = 3$ jer je $3^5 = 243$.

Zamijetimo da smo n-ti korijen definirali samo za nenegativan broj a. Ima li smisla govoriti o korijenima iz negativnih brojeva? Promotrimo jednadžbu $x^3 = -8$. Njeno realno rješenje je $x = -2$. U ovom slučaju mogli bismo reći da je -2 treći korijen iz -8. Općenito, ako je broj a negativan, a n neparan broj, tada je n-ti korijen iz a negativan realan broj za koji vrijedi $x^n = a$. Jasno je da za slučaj kad je n paran i a negativan, nema smisla govoriti o realnim korijenima jer jednadžba $x^n = a$ tada nema rješenja.

ZADATCI 1.2.

1. Izračunaj i obrazloži dobivene rezultate:

a $\sqrt[3]{27}$ **b** $\sqrt[3]{0.064}$ **c** $\sqrt[3]{8000}$ **d** $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$

e $\sqrt[4]{16}$ **f** $\sqrt[4]{81}$ **g** $\sqrt[4]{256}$ **h** $\sqrt[4]{625}$

i $\sqrt[5]{32}$ **j** $\sqrt[6]{64}$ **k** $\sqrt[10]{1024}$ **l** $\sqrt[6]{1\,000\,000}$

m $\sqrt[5]{100\,000}$ **n** $\sqrt[6]{15\,625}$ **o** $\sqrt[7]{128}$ **p** $\sqrt[n]{a^n}$, $a > 0$.

2. Dane su sljedeće potencije:

$$\left(\frac{10}{3}\right)^5 = \frac{10\,000}{243}, \quad \left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{625}{256}, \quad \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}, \quad \left(\frac{5}{6}\right)^6 = \frac{15\,625}{64}, \quad \left(\frac{10}{3}\right)^3 = \frac{1000}{27}.$$

Promatrajući gore navedene potencije, izračunaj zadane korijene:

a $\sqrt[3]{\frac{64}{27}}$ **b** $\sqrt[3]{\frac{1000}{27}}$ **c** $\sqrt[4]{\frac{625}{256}}$ **d** $\sqrt[5]{\frac{10\,000}{243}}$ **e** $\sqrt[6]{\frac{15\,625}{64}}$.

3. Izračunaj:

a $\sqrt[3]{0.001}$ **b** $\sqrt[3]{0.125}$ **c** $\sqrt[3]{0.008}$ **d** $\sqrt[3]{0.027}$. **e** $\sqrt[4]{0.0016}$

f $\sqrt[4]{0.0001}$ **g** $\sqrt[4]{0.0625}$ **h** $\sqrt[5]{0.00032}$ **i** $\sqrt[5]{0.00001}$ **j** $\sqrt[7]{0.0000128}$.

4. Spoji korijen s njegovom vrijednošću.

a $\sqrt[3]{-1}$	**1** -3
b $\sqrt[3]{-64}$	**2** -1
c $\sqrt[5]{-32}$	**3** -2
d $\sqrt[5]{-243}$	**4** -4

5. Procijeni rezultat pa izračunaj s pomoću džepnog računala i zaokruži na četiri decimale:

a $\sqrt{2}$ **b** $\sqrt{40}$ **c** $\sqrt[3]{9}$ **d** $\sqrt[3]{91}$.

6. S pomoću džepnog računala izračunaj i rezultat zaokruži na četiri decimale:

a $\sqrt{326}$ **b** $\sqrt{1000}$ **c** $\sqrt[3]{444}$ **d** $\sqrt[3]{2000}$

e $4\sqrt{19} - \sqrt[3]{17}$ **f** $8\sqrt[3]{321} - \frac{1}{2}\sqrt{22}$ **g** $\left(32\sqrt[3]{0.175} - 1\right)\left(\sqrt{14} + 1\right)$.

7. Zlatar ima pet zlatnih kuglica promjera $0.25\,\text{cm}$, $0.25\,\text{cm}$, $0.5\,\text{cm}$, $0.75\,\text{cm}$ i $0.75\,\text{cm}$. Želi ih pretopiti u jednu zlatnu kuglu. Koliki će biti polumjer nove kugle?

a $1.5\,\text{cm}$ **b** $0.5\,\text{cm}$ **c** $2.5\,\text{cm}$ **d** $1.2\,\text{cm}$

8. Luka je riješio nekoliko zadataka. Je li sve točno riješio? Ispravi pogreške.

$\sqrt{0.49} = 0.7$, $\sqrt{6.4} = 0.8$, $\sqrt{0.025} = 0.5$, $\sqrt[3]{9} = 3$, $\sqrt[3]{0.001} = 0.1$, $\sqrt{1000} = 10$

1.3. Računanje s korijenima

Kao što za kvadratne korijene postoje neka pravila koja olakšavaju račun, tako i za n-te korijene postoje slična pravila. Navedimo prvo svojstva množenja i dijeljenja korijena.

Ako su a i b nenegativni realni brojevi i $b \neq 0$, tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijede svojstva

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

PRIMJER 1.

Izračunajmo $\sqrt[n]{a^n}$ i $\sqrt[n]{a^{-n}}$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ faktora}}} = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{n \text{ faktora}} = (\sqrt[n]{a})^n = a.$$ Slijedi $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Budući da je $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, vrijedi

$$\sqrt[n]{a^{-n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^n}} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{1}{a} = a^{-1},$$

te je $\sqrt[n]{a^{-n}} = a^{-1}$.

Potraži dokaz... ele-udzbenik.hr

U svim zadatcima u kojima se pojavljuju opći brojevi a, b, c,...,x, y, z smatramo da su izrazi pod znakom korijena nenegativni.

PRIMJER 2.

Za pozitivne brojeve a, b i x izračunajmo $\sqrt[4]{\frac{16a^4b^8}{81x^{12}}}$.

$$\sqrt[4]{\frac{16a^4b^8}{81x^{12}}} = \frac{\sqrt[4]{16a^4b^8}}{\sqrt[4]{81x^{12}}} = \frac{\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{a^4}\cdot\sqrt[4]{b^4}\cdot\sqrt[4]{b^4}}{\sqrt[4]{81}\cdot\sqrt[4]{x^4}\cdot\sqrt[4]{x^4}\cdot\sqrt[4]{x^4}} = \frac{2\cdot a\cdot b\cdot b}{3\cdot x\cdot x\cdot x} = \frac{2ab^2}{3x^3}.$$

PRIMJER 3.

Djelomično korjenujmo izraz $\sqrt[3]{\frac{125x^6y^8}{16a^{-5}b}}$.

$$\sqrt[3]{\frac{125x^6y^8}{16a^{-5}b}} = \frac{\sqrt[3]{5^3\cdot x^6\cdot y^6\cdot y^2}}{\sqrt[3]{2^3\cdot 2\cdot a^{-3}\cdot a^{-2}\cdot b}} = \frac{\sqrt[3]{5^3}\cdot\sqrt[3]{x^6}\cdot\sqrt[3]{y^6}\cdot\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{a^{-3}}\cdot\sqrt[3]{a^{-2}}\cdot\sqrt[3]{b}}$$

$$= \frac{5\cdot x^2\cdot y^2\cdot\sqrt[3]{y^2}}{2\cdot a^{-1}\cdot\sqrt[3]{2\cdot a^{-2}b}} = \frac{5x^2y^2}{2a^{-1}}\sqrt[3]{\frac{y^2}{2a^{-2}b}}.$$

PRIMJER 4.

Neka su $a, b \geqslant 0$. Unesimo pod znak korijena $2a\sqrt[4]{3a^2b}$.

Kako je $2a = \sqrt[4]{(2a)^4}$, imamo

$$2a\sqrt[4]{3a^2b} = \sqrt[4]{(2a)^4}\cdot\sqrt[4]{3a^2b} = \sqrt[4]{(2a)^4\cdot(3a^2b)} = \sqrt[4]{2^4\cdot a^4\cdot 3\cdot a^2\cdot b} = \sqrt[4]{48a^6b}.$$

Vidjeli smo već da za pozitivni a vrijedi $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$. Sljedeće tvrdnje govore o općenitoj situaciji.

Ako je a pozitivan realan broj, onda vrijede svojstva

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}, \quad n, p \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z}$$

$$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}, \quad n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

PRIMJER 5.

Pojednostavnimo korijen $\sqrt[20]{32a^{15}b^{35}}$, $a, b \geqslant 0$.

Uočimo da je $32 = 2^5$, $a^{15} = a^{3\cdot 5}$ i $b^{35} = b^{7\cdot 5}$ te iskoristimo svojstvo $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$:

$$\sqrt[20]{32a^{15}b^{35}} = \sqrt[20]{2^5a^{3\cdot 5}b^{7\cdot 5}} = \sqrt[4\cdot 5]{(2a^3b^7)^5} = \sqrt[4]{2a^3b^7}.$$

PRIMJER 6.

Svedimo na zajednički korijen i pojednostavnimo izraz $\sqrt[3]{a^2b} \cdot \sqrt[4]{a^3b^5}$.

Budući da je 12 najmanji zajednički višekratnik brojeva 3 i 4, oba ćemo korijena proširiti do 12. korijena.

$$\sqrt[3]{a^2b} \cdot \sqrt[4]{a^3b^5} = \sqrt[12]{(a^2b)^4} \cdot \sqrt[12]{(a^3b^5)^3} = \sqrt[12]{a^8b^4} \cdot \sqrt[12]{a^9b^{15}} = \sqrt[12]{a^8b^4 \cdot a^9b^{15}} = \sqrt[12]{a^{17}b^{19}}.$$

PRIMJER 7.

Svedimo na jedan korijen $\sqrt[4]{x^3\sqrt[5]{x^2}}$.

Da bismo mogli primijeniti pravilo $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$, x^3, moramo "unijeti" pod peti korijen:

$$\sqrt[4]{x^3\sqrt[5]{x^2}} = \sqrt[4]{\sqrt[5]{(x^3)^5x^2}} = \sqrt[20]{x^{15} \cdot x^2} = \sqrt[20]{x^{17}}.$$

PRIMJER 8.

Racionalizirajmo nazivnik razlomka $\dfrac{1}{\sqrt[7]{5^3}}$.

$$\frac{1}{\sqrt[7]{5^3}} = \frac{1}{\sqrt[7]{5^3}} \cdot \frac{\sqrt[7]{5^4}}{\sqrt[7]{5^4}} = \frac{\sqrt[7]{5^4}}{\sqrt[7]{5^7}} = \frac{\sqrt[7]{5^4}}{5}.$$

ZADATCI 1.3.

1. Primjenjujući jednakosti $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ i $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, izračunaj:

a $\sqrt[4]{256}$ **b** $\sqrt[5]{3125}$ **c** $\sqrt[4]{2401}$ **d** $\sqrt[3]{216\,000}$

e $\sqrt[5]{\frac{32}{3125}}$ **f** $\sqrt[3]{0.003375}$ **g** $\sqrt[6]{0.000729}$ **h** $\sqrt[6]{\frac{64}{729}}$.

2. Izračunaj:

a $\sqrt[3]{24}\cdot\sqrt[3]{9}$ **b** $\sqrt[3]{75}\cdot\sqrt[3]{45}$ **c** $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{135}$ **d** $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}$ **e** $\sqrt[4]{72}\cdot\sqrt[4]{18}$

f $\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[4]{324}$ **g** $\sqrt[5]{160}\cdot\sqrt[5]{625}$ **h** $\sqrt[4]{a^{11}}\cdot\sqrt[4]{a}$ **i** $\sqrt[6]{x^9}\cdot\sqrt[6]{x^{15}}$.

3. Izračunaj:

a $\sqrt[4]{4^2}$ **b** $\sqrt[4]{16^3}$ **c** $\sqrt[6]{16^3}$ **d** $\sqrt[6]{100^3}$

e $\sqrt[3]{8^2\cdot 27^4}$ **f** $\sqrt[4]{4^3\cdot 8^6}$ **g** $\sqrt[4]{25^6\cdot\frac{1}{81^3}}$ **h** $\sqrt[5]{10^{10}\cdot\frac{1}{32^2}}$.

4. Za $a,b,c,x,z>0$ izračunaj:

a $\sqrt[4]{16a^4b^8c^{12}}$ **b** $\sqrt[4]{81a^{-4}b^4c^{28}}$ **c** $\frac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{243}}$ **d** $\frac{\sqrt[4]{162x^6}}{\sqrt[4]{2x^2}}$ **e** $\frac{\sqrt[4]{10^5x^5z^{26}}}{\sqrt[4]{10xz^2}}$ **f** $\frac{\sqrt[5]{64(a+b)^{11}}}{\sqrt[5]{2(a+b)}}$.

5. Lara tvrdi: "Kad imam broj napisan kao umnožak $5^8\cdot 7^{32}\cdot 11^{16}$, tada ću njegov četvrti korijen izračunati tako da svaki eksponent podijelim s 4. Dakle, četvrti korijen zadanog broja je $5^2\cdot 7^8\cdot 11^4$." Je li Larino zaključivanje pravilno?

6. Spoji brojevni izraz s njegovom vrijednošću.

a $\sqrt[3]{0.027}+7\cdot\sqrt[4]{0.0256}$ **1** $2\cdot 6-10=2$

b $5\cdot\sqrt[4]{8^8}-2\cdot\sqrt[3]{0.9\cdot 30}$ **2** $0.3+7\cdot 0.4=3.1$

c $\sqrt[5]{0.03125}+4\cdot\sqrt{0.7\cdot 0.343}$ **3** $0.5-4\cdot 0.49=-1.46$

d $2\cdot\sqrt[4]{24}\cdot\sqrt[4]{54}-\sqrt[3]{40}\cdot\sqrt[3]{25}$ **4** $5\cdot 64-2\cdot 3=314$

7. Djelomično korjenuj:

a $\sqrt[3]{24}$ **b** $\sqrt[3]{54}$ **c** $\sqrt[3]{250}$ **d** $\sqrt[3]{10\,000}$ **e** $\sqrt[4]{32}$

f $\sqrt[4]{1250}$ **g** $\sqrt[4]{162}$ **h** $\sqrt[4]{768}$ **i** $\sqrt[4]{80}$ **j** $\sqrt[5]{224}$.

8. Neka su $a,b,c,x,y,z>0$. Djelomično korjenuj:

a $\sqrt[4]{81x^{11}}$ **b** $\sqrt[4]{10\,000x^{4n+1}}$ **c** $\sqrt[4]{16x^5}$ **d** $\sqrt[4]{80x^5y^7}$

e $\sqrt[4]{32a^6b^{13}}$ **f** $\sqrt[5]{32x^6y^8}$ **g** $\sqrt[5]{\frac{64a^6}{2b^8c^{10}}}$ **h** $\sqrt[4]{\frac{100^2x^6y^7}{z^{14}}}$.

9. Unesi pod znak korijena:

a $2\sqrt[3]{2}$ **b** $3\sqrt[3]{2}$ **c** $2\sqrt[3]{5}$ **d** $4\sqrt[3]{7}$ **e** $2\sqrt[4]{3}$ **f** $10\sqrt[4]{2}$ **g** $2\sqrt[4]{9}$

h $3\sqrt[4]{5}$ **i** $5\sqrt[4]{10}$ **j** $a^n\sqrt[4]{a}$ **k** $b\sqrt[4]{ab}$ **l** $2a\sqrt[5]{3ab^2}$ **m** $a^2\sqrt[5]{a^3}$ **n** $x^2y\sqrt[4]{xy^3}$.