1. Vektori

1

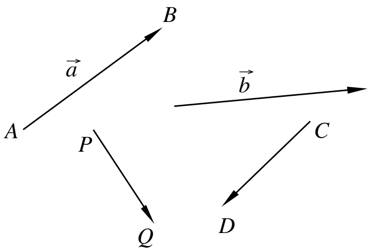
U svijetu oko nas lako ćemo prepoznati mnoge veličine vrijednost kojih se izražava brojem. To su na primjer duljina, površina, obujam, temperatura, tlak, masa, energija, specifična gustoća... Njih nazivamo **skalarnim** veličinama. Međutim, neke se veličine ne mogu opisati samo brojem. Za djelovanje sile važan je njezin iznos, ali i *smjer* djelovanja. Isto tako, brzina je fizikalna veličina koja — uz svoj iznos — mora imati definiran i *smjer*. Isto će vrijediti i za ubrzanje, moment sile, električno ili magnetsko polje, itd. Takve ćemo veličine nazivati **vektorima**.

1.1. Osnovni pojmovi o vektorima

Definicija vektora

Vektor[1] je usmjerena dužina $\overrightarrow{AB}$ u kojoj razlikujemo **početnu točku** (**hvatište**) A i **završnu točku** (**kraj**) B. Vektor crtamo poput obične dužine, s tim da je završna točka označena strjelicom.

[1] vector (*lat.*) — nositelj



Sl. 1.1. Vektor je usmjerena dužina.

Zato ćemo vektor označavati s $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{PQ}$ ili samo malim slovom iznad kojeg je postavljena strjelica: $\vec{a}$, $\vec{b}$, itd.

S V^2 ćemo označavati skup svih vektora kojih se početna i završna točka nalaze u jednoj ravnini, a s V^3 vektore kojima se početna i završna točka nalaze u prostoru. Kažemo da je V^2 *skup svih vektora u ravnini*, a V^3 je *skup svih vektora u prostoru*.

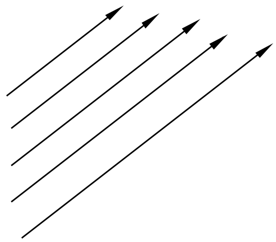
Opis vektora

Vektor je određen ako poznajemo njegovu duljinu, smjer i orijentaciju.

Duljina vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ udaljenost je između njegove početne i završne točke. To je, dakle, duljina dužine $\overline{AB}$. Duljinu vektora označavamo s $|\vec{a}|$, odnosno $|\overrightarrow{AB}|$:

$$|\vec{a}| = d(A, B) = |AB|.$$

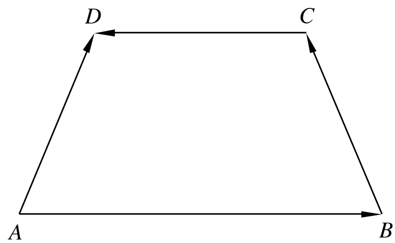
Drugi uobičajeni nazivi za duljinu vektora su **iznos** i **norma** vektora.

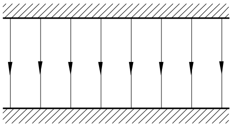


Sl. 1.2. Ovi se vektori razlikuju samo po svojoj duljini.

Smjer vektora. Ako pravac p prolazi točkama A i B vektora $\overrightarrow{AB}$, onda kažemo da taj pravac *sadrži* vektor $\overrightarrow{AB}$, ili da vektor $\overrightarrow{AB}$ leži na pravcu p. Govorimo još da je pravac p **nositelj** vektora $\overrightarrow{AB}$.

Sl. 1.3. Smjer vektora određen je pravcem na kojem vektor leži. Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ imaju isti smjer (a različit iznos). Vektori $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{BC}$ nisu istoga smjera (a iznos im je jednak).





Sl. 1.4. Silnice električnog polja paralelnih ploča. U svakoj točki između ploča ono ima isti smjer i iznos.

1

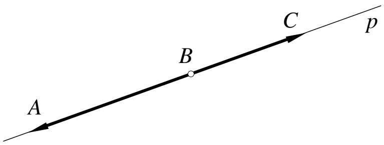
Za sve vektore koji leže na paralelnim pravcima reći ćemo da imaju *isti smjer*. Za njih govorimo još da su **kolinearni**.

Smjer i kolinearnost vektora

Ako dva vektora leže na paralelnim pravcima, za njih kažemo da imaju **isti smjer** ili da su **kolinearni**. U suprotnom slučaju, govorimo o nekolinearnim vektorima.

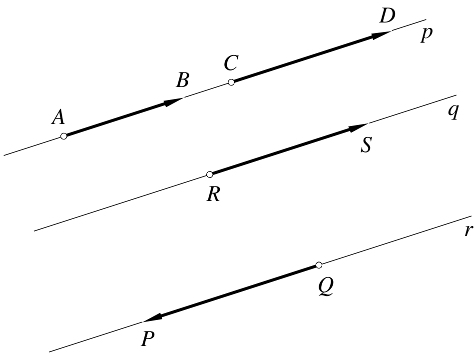
Orijentacija vektora. Vektor kojemu poznajemo duljinu i pravac nositelj još nije potpuno određen — moramo mu poznavati još i *orijentaciju*.

Nacrtajmo pravac p i izdvojimo na njemu tri točke. Neka su to (tim poretkom) A, B i C. Onda su vektori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BC}$ iste orijentacije. Također su iste orijentacije i vektori $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BA}$. Međutim, vektori $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BC}$ na slici 1.5. suprotne su orijentacije.



Sl. 1.5. Vektori $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BC}$ suprotnih su orijentacija.

Orijentacija se na prirodan način prenosi i na vektore istoga smjera. Tako su na slici 1.6. primjerice, vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{RS}$ iste orijentacije, a $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{QP}$ suprotne orijentacije.

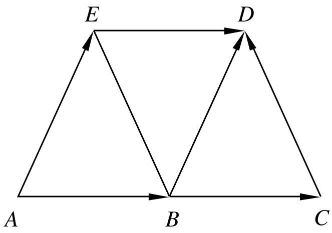


Sl. 1.6. Svi se vektori istoga smjera mogu podijeliti s obzirom na orijentaciju u dvije klase. Svi vektori u jednoj klasi jednako su orijentirani, svi vektori u drugoj također, dok je svaki vektor iz jedne klase suprotno orijentiran u odnosu na bilo koji vektor druge klase.

Zadatak 1. Izdvoji sve vektore s pravaca p, q i r kojima su završetci u istaknutim točkama, a imaju istu orijentaciju. Podijeli ih u dvije skupine tako da bilo koja dva vektora iz pojedine skupine imaju različitu orijentaciju.

Određenost i jednakost vektora

Vektor je određen ako mu znamo **duljinu**, **smjer** i **orijentaciju**.
Dva su vektora **jednaka** ako se podudaraju po duljini, smjeru i orijentaciji.



Sl. 1.7. Vektori $\overrightarrow{AE}$ i $\overrightarrow{BD}$ imaju istu duljinu, smjer i orijentaciju pa su jednaki.

Vektori $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{ED}$ imaju isti smjer, ali različite duljine, pa nisu jednaki. Vektori $\overrightarrow{AE}$ i $\overrightarrow{CD}$ imaju iste duljine, ali nemaju isti smjer pa nisu jednaki. Konačno, $\overrightarrow{CB}$ i $\overrightarrow{ED}$ imaju istu duljinu i smjer, ali suprotnu orijentaciju, pa također nisu jednaki.

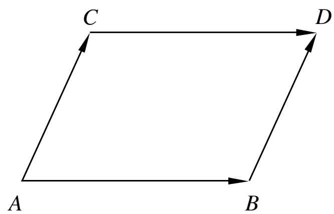
Vektori koji imaju isti nositelj jednaki su kad imaju istu duljinu orijentaciju. Za vektore kojima se nositelji razlikuju imamo sljedeći kriterij:

Kriterij za jednakost vektora

Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ jednaki su onda i samo onda ako je četverokut $ABDC$ paralelogram.

Jedan je smjer u ovoj tvrdnji očigledan: ako je četverokut $ABDC$ paralelogram, tad vrijedi $|AB| = |CD|$, pravci AB i CD su paralelni, a orijentacije vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ identične su.

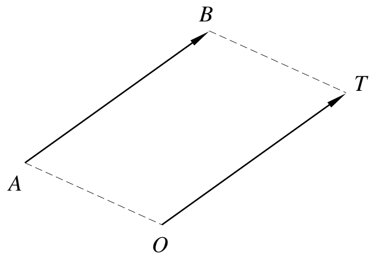
Obratno, ako je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, tad su u četverokutu $ABDC$ dvije nasuprotne stranice paralelne i jednake duljine, što je dovoljno da bi on bio paralelogram. ◁



Sl. 1.8. Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ su jednaki. Isto tako su jednaki $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BD}$.

Temeljni stavak o vektorima

Neka je O bilo koja točka ravnine (ili prostora) i $\overrightarrow{AB}$ zadani vektor. Tad postoji jedinstvena točka T u ravnini (ili prostoru) za koju je $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{AB}$.



Sl. 1.9. Za svaki vektor možemo odabrati njemu jednak, a koji ima početak u unaprijed zadanoj točki O. Kažemo da hvatište vektora možemo izabrati po volji.

▷ Dokažimo ovaj stavak. Postoji (samo jedna) točka T takva da je $OTBA$ paralelogram. Onda je $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{AB}$. Time smo pronašli vektor jednak početnom, a koji ima početak u unaprijed zadanoj točki O. ◁

Kažemo još da smo vektor $\overrightarrow{OT}$ dobili *translacijom* vektora $\overrightarrow{AB}$. Svi vektori koji se translacijom dobivaju jedan iz drugog jednaki su. Primijetimo da je vektor $\overrightarrow{OA}$ dobiven translacijom iz vektora $\overrightarrow{TB}$.

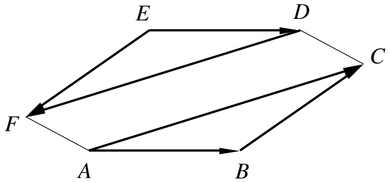
Za točku O biramo neku istaknutu točku ravnine (ili prostora). Vektor $\overrightarrow{OA}$ nazivamo **radijvektor** točke A. Primijetimo da iz $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$ slijedi $A = B$. Dakle, radijvektor je određen svojom završnom točkom.

* * *

Vektori koji imaju istu duljinu i smjer ne moraju biti jednaki. Oni se mogu razlikovati po orijentaciji.

Suprotni vektori

Za dva vektora kažemo da su **suprotni** ako imaju istu duljinu i smjer, a suprotnu orijentaciju. Suprotan vektor vektora $\vec{a}$ označavat ćemo s $-\vec{a}$.



Sl. 1.10. Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{ED}$ imaju isti iznos (duljinu), smjer i orijentaciju pa su jednaki. Vektori $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{EF}$ suprotni su. Jednako tako su suprotni vektori $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{DF}$.

Vektor suprotan vektoru $-\vec{a}$ je $\vec{a}$, pa zato vrijedi $-(-\vec{a}) = \vec{a}$.

Vektor suprotan vektoru $\overrightarrow{AB}$ je $\overrightarrow{BA}$, jer taj vektor ima isti iznos i smjer, a suprotnu orijentaciju. Zato je $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

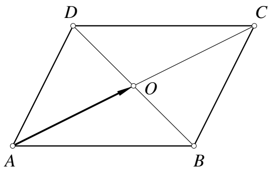
Nulvektor

Vektor kojemu se podudaraju početna i završna točka nazivamo **nulvektor** i označavamo s $\vec{0}$. Njegova je duljina 0, i to je jedini vektor duljine nula. Tako je $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$, za bilo koju točku A. Jedino za nulvektor nema smisla govoriti o smjeru niti o orijentaciji. Prema dogovoru, uzimamo de je nulvektor kolinearan sa svakim vektorom.

Zadatci 1.1.

1. Koje su od sljedećih veličina vektorske, a koje skalarne: temperatura, obujam, brzina, masa, ubrzanje, sila, električni napon?

2. Dan je paralelogram $ABCD$. Točka O sjecište je njegovih dijagonala. Promatramo skup vektora kojima su početna i završna točka vrh paralelograma ili točka O.



Sl. 1.11.

1) Ispiši sve vektore koji imaju jednak smjer kao i vektor $\overrightarrow{AO}$. Ispiši sve vektore koji imaju jednaku orijentaciju kao i vektor $\overrightarrow{AO}$.

2) Ispiši sve vektore koji imaju jednak smjer kao i vektor $\overrightarrow{BD}$. Ispiši sve vektore koji imaju jednaku orijentaciju kao i vektor $\overrightarrow{BD}$.

3. Koliko ima vektora kojima su početna i završna točka neka dva vrha trokuta ABC?

4. Koliko ima vektora kojima su početna i završna točka vrhovi četverokuta $ABCD$, ako je taj četverokut paralelogram, a koliko ako nije paralelogram?

5. Ako je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, onda je $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Dokaži!

6. Nacrtaj pravilan šesterokut $ABCDEF$. Neka je S sjecište dijagonala tog šesterokuta. Ispiši sve vektore kojima su početna i završna točka neki vrh šesterokuta ili točka S, a koji su **1)** jednaki vektoru $\overrightarrow{BC}$; **2)** suprotni vektoru $\overrightarrow{SA}$.

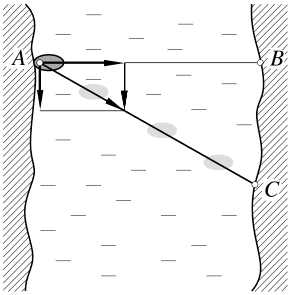
1.2. Zbrajanje vektora

Zbrajanje vektora

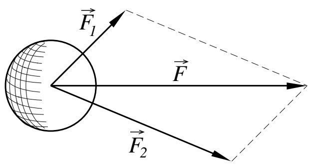
Ako čamac plovi preko rijeke brzinom $3\ \mathrm{m/s}$ okomito na njezin tok, a brzina vode je $1\ \mathrm{m/s}$, kakva će biti njegova putanja? Na ovo su pitanje znali odgovoriti još stari Grci:

čamac će se gibati po pravcu koji je dijagonala pravokutnika koji čine pojedina gibanja. Krene li čamac iz točke A prema točki B i ako cijelo vrijeme vozi okomito na tok vode, stići će na drugu obalu u točki C.

Pred oko 400 godina nizozemski znanstvenik Simon Stevin rješavao je općenitiji problem gibanja tijela na koje djeluju različite sile. Mnogo prije nego što je pojam vektora ušao u matematiku, on je ispravno odgovorio na pitanje: *može li se djelovanje dviju sila zamijeniti djelovanjem samo jedne sile koja će imati isti učinak?* Djelovanje dviju sila predstavljenih vektorima $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ može zamijeniti djelovanjem samo jedne sile predstavljene vektorom $\vec{F}$. Pritom je $\vec{F}$ dijagonala paralelograma kojemu su $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ susjedne stranice.



Sl. 1.12.



Sl. 1.13. Na tijelo djeluju dvije sile, predstavljene vektorima $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$. Iskustvo pokazuje da će se tijelo ponašati jednako kao da na njega djeluje samo jedna sila predstavljena vektorom $\vec{F}$.

Time je opravdana sljedeća definicija zbrajanja vektora.

Zbroj dvaju vektora – pravilo paralelograma

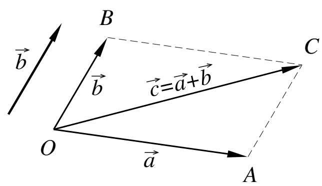
Zbroj dvaju vektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ s istim početkom O je vektor $\overrightarrow{OC}$ takav da je $\overline{OC}$ dijagonala paralelograma $OACB$. Pišemo

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

* * *

Kako ćemo zbrajati vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ koji imaju početke u različitim točkama?

Označimo početnu točku vektora $\vec{a}$ s O. Neka je A njegova završna točka. Izaberimo vektor $\overrightarrow{OB}$ jednak vektoru $\vec{b}$. Zbrojimo vektore $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$. Njihov je zbroj vektor $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. Kako se vektori $\overrightarrow{OB}$ i $\vec{b}$ podudaraju, vrijedi



Sl. 1.14.

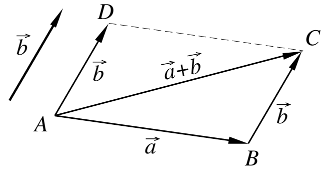
$$\vec{c} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}.$$

* * *

Zbrajanje vektora možemo opisati na još jedan način. Pogledajmo sliku 1.15.

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ bilo koja dva vektora. Označimo početnu točku vektora $\vec{a}$ s A, a završnu s B. Dakle, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Izaberimo vektor $\overrightarrow{AD}$ jednak vektoru $\vec{b}$. Nacrtajmo paralelogram $ABCD$. Po pravilu paralelograma za zbrajanje dvaju vektora je

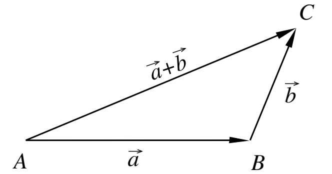
$$\vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.$$



Sl. 1.15. U paralelogramu na slici vektori $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{BC}$ se podudaraju.

Međutim, vektori $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{BC}$ su jednaki, $\vec{b} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. To znači da se zbroj dvaju vektora može dobiti i na ovaj način:

$$\vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$



Sl. 1.16. Zbroj dvaju vektora – pravilo trokuta. Zbroj $\vec{c}$ dvaju vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ jest vektor $\overrightarrow{AC}$.

Primijetimo da smo tu izabrali dva vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ tako da se završetak jednog podudara s početkom drugog vektora. Za takve vektore kažemo da su **ulančani** ili da se **nadovezuju**.

Zbroj vektora – pravilo trokuta

Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su **ulančani** ako se završetak prvog podudara s početkom drugog. Zbroj dvaju ulančanih vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ je vektor $\overrightarrow{AC}$ koji spaja početnu točku prvog vektora sa završnom točkom drugog vektora.

* * *

Ova interpretacija zbroja dvaju vektora pogodna je radi toga što se može lako poopćiti na zbroj više od dva vektora. Da bismo to pokazali, prije toga moramo naučiti osnovna svojstva operacije zbrajanja vektora.

Svojstva operacije zbrajanja vektora

Realne brojeve a i b možemo zbrajati u bilo kojem poretku, jer vrijedi $a+b = b+a$. Isto svojstvo ima i operacija zbrajanja vektora, jer se po pravilu paralelograma zbrojevi $\vec{a}+\vec{b}$ i $\vec{b}+\vec{a}$ računaju na isti način.

Komutativnost zbrajanja vektora

Zbrajanje vektora je **komutativno**, tj. za bilo koja dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vrijedi

$$\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}.$$

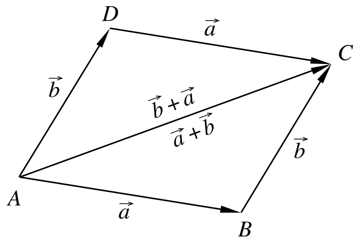
Primjer 1. Provjerimo svojstvo komutativnosti ako pri zbrajanju vektora koristimo pravilo trokuta.

▷ Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ bilo koja dva vektora. Odaberimo njima jednake vektore tako da budu ulančani. Neka je, dakle, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ (slika 1.17.). Onda je

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Odaberimo sad vektore jednake vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, ali tako da budu ulančani u drugom poretku. Vrijedi $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ i $\vec{a} = \overrightarrow{DC}$. Zato je

$$\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}.$$



Sl. 1.17. Zbrajanje vektora je komutativno.

Zaključujemo da vrijedi $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, pa je zbrajanje vektora komutativno. ◁

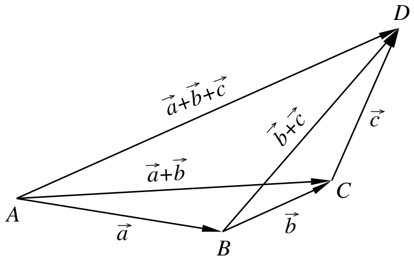
* * *

Da bismo zbrojili više od dva broja, moramo odabrati poredak zbrajanja. Tako na primjer tri broja a, b i c možemo zbrojiti na način $(a+b)+c$, u kojem se zbroju prva dva broja dodaje treći, ali i na način $a+(b+c)$, u kojem smo najprije zbrojili posljednja dva broja i taj zbroj dodali prvom broju. Kako je zbrajanje realnih brojeva asocijativno, u oba ćemo postupka dobiti isti rezultat. Pokažimo da isto svojstvo ima i zbrajanje vektora.

Asocijativnost zbrajanja vektora

Zbrajanje vektora je **asocijativno**, tj. za bilo koja tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ vrijedi

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$



Sl. 1.18. Zbrajanje vektora je asocijativno. Zbroju ulančanih vektora odgovara vektor koji ima početak u početku prvog, a završetak u završetku posljednjeg.

▷ Uvjerimo se u istinitost ovog svojstva koristeći pravilo trokuta za zbrajanje vektora. Izaberimo vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ tako da budu ulančani. Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ i $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$. Onda vrijedi (vidi sliku 1.18.):

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

Zbrajajući u drugom poretku dobit ćemo

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}.$$

Dakle, vrijedi $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$. ◁

* * *

Radi svojstva asocijativnosti smijemo zbroj triju vektora pisati bez ikakvih zagrada. Isto vrijedi i za zbroj više od tri vektora.

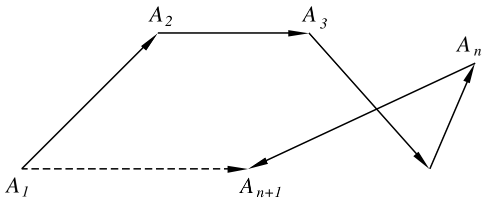
Neka su $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ zadani vektori. Njihov zbroj $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n$ je vektor koji možemo dobiti na sljedeći način. Izaberimo vektore jednake zadanima, tako da budu ulančani:

$$\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1A_2}, \ \vec{a}_2 = \overrightarrow{A_2A_3}, \ \ldots, \vec{a}_n = \overrightarrow{A_nA_{n+1}}.$$

Onda za zbroj ovih vektora vrijedi (slika 1.19.)

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \ldots + \vec{a}_n &= \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \ldots + \overrightarrow{A_nA_{n+1}} \\ &= \overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \ldots + \overrightarrow{A_nA_{n+1}} = \ldots \\ &= \overrightarrow{A_1A_{n+1}}. \end{aligned}$$

Rezultat zbrajanja je vektor $\overrightarrow{A_1A_{n+1}}$ početna točka kojeg je početak prvog, a završna točka završetak posljednjeg vektora.



Sl. 1.19. Zbroj više vektora. Vektore izaberemo tako da budu ulančani. Onda je njihov zbroj vektor kojemu je početna točka početak prvog, a završna točka završetak posljednjeg vektora.

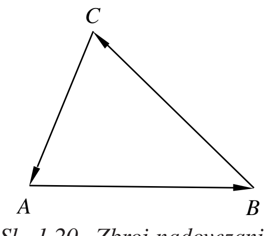
Primjer 2. Neka je ABC bilo koji trokut. Odredimo zbroj vektora

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}.$$

To su vektori stranica ovog trokuta koji su odabrani tako da budu ulančani. Prema pravilu za zbrajanje, rezultat je vektor kojemu je početna točka početak prvog, a završna točka završetak trećeg vektora:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

Dakle, zbroj vektora stranica trokuta (koji su ulančani) jednak je nulvektoru.



Sl. 1.20. Zbroj nadovezanih vektora stranica trokuta jednak je nulvektoru.

Ista tvrdnja vrijedi i za po volji odabrani mnogokut. Ako su A_1, $A_2, \ldots, A_n$ njegovi vrhovi, onda vrijedi

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_nA_1} = \overrightarrow{A_1A_1} = \vec{0}.$$

* * *

Dakako, to svojstvo vrijedi i za zbroj dva vektora:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$ suprotni su jer imaju isti nositelj i suprotnu orijentaciju. Dakle, *zbroj suprotnih vektora jednak je nulvektoru.* Ta činjenica opravdava oznaku

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}.$$

Suprotan vektor bilo kojeg vektora $\vec{a}$ označavali smo s $-\vec{a}$. Znači, vrijedi

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}.$$

* * *

Nul-vektor možemo napisati na način $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$, gdje je A bilo koja točka. Ako je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ neki vektor, onda je

$$\vec{0} + \vec{a} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}.$$

Isto tako je $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$. To pokazuje da nulvektor ima slična svojstva koje je imao i broj nula za operaciju zbrajanja brojeva.

* * *

Svojstva operacije zbrajanja vektora

1. **Komutativnost.** Za bilo koja dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vrijedi
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$
2. **Asocijativnost.** Za bilo koja tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ vrijedi
$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$
3. **Svojstvo suprotnog vektora.** Ako je $\vec{a}$ bilo koji vektor, onda za suprotni vektor $-\vec{a}$ vrijedi
$$\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}.$$
4. **Svojstvo nulvektora.** Ako je $\vec{a}$ bilo koji vektor, onda vrijedi
$$\vec{0} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

Oduzimanje vektora

Oduzimanje je operacija izvedena iz zbrajanja. Prisjetimo se operacije oduzimanja realnih brojeva. Razliku $a - b$ brojeva a i b, možemo izračunati tako da broju a pribrojimo broj $-b$ suprotan broju b:

$$a - b = a + (-b).$$

Na isti se način definira i oduzimanje vektora

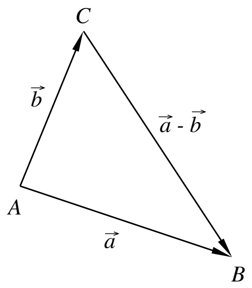
Oduzimanje vektora

Razlika vektora definira se kao zbroj sa suprotnim vektorom:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

Opišimo kako se geometrijski određuje razlika $\vec{a}-\vec{b}$ dvaju vektora. Izaberimo vektore jednake početnima tako da imaju zajednički početak (slika 1.21.). Neka je $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$. Onda je $\overrightarrow{CA}=-\vec{b}$, pa je

$$\vec{a}+(-\vec{b})=(-\vec{b})+\vec{a}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}.$$



Sl. 1.21. Dva se vektora oduzimaju tako da se dovedu u zajedničko hvatište. Razlici odgovara vektor kome je početak u završetku drugog, a završetak u završetku prvog vektora.

Razlika vektora

Razlika $\vec{a}-\vec{b}$ vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ određuje se tako da se izaberu vektori jednaki početnim, a koji imaju zajednički početak. Tad je razlika vektor koji spaja završetak drugog sa završetkom prvog vektora.

Zadatci 1.2.

1. Dan je paralelogram $ABCD$. Neka je točka S sjecište njegovih dijagonala. Izračunaj:

1) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}$; **2)** $\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{BS}$; **3)** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$;

4) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{SD}$; **5)** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BS}$; **6)** $\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{CS}$.

2. Točka S sjecište je dijagonala paralelograma $ABCD$. Izračunaj:

1) $\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{CS}$; **2)** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{BD}$;

3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$; **4)** $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}$.

3. Neka je $ABCDEF$ pravilni šesterokut i neka je S sjecište njegovih dijagonala. Izračunaj:

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF}$; **2)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SD}$; **3)** $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ES}$;

4) $\overrightarrow{CS} + \overrightarrow{EF}$; **5)** $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{SC}$; **6)** $\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{AS}$.

4. Točka S sjecište je dijagonala pravilnog šesterokuta $ABCDEF$. Izračunaj:

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{SF}$; **2)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$;

3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AF}$; **4)** $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{SF}$.

1

5. Odredi zbroj vektora:

1) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA}$; **2)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$.

6. Može li zbroj vektora biti vektor manje duljine nego što je duljina svakog pojedinog pribrojnika?
Može li razlika vektora biti manje duljine od njihova zbroja?

7. Nacrtaj paralelogram $ABCD$ i odredi njegovo središte S. Izračunaj:

1) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC}$; **2)** $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$; **3)** $\overrightarrow{AS} - \overrightarrow{BS}$;

4) $\overrightarrow{BS} - \overrightarrow{SD}$; **5)** $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{SC}$; **6)** $\overrightarrow{AS} - \overrightarrow{SD}$.

8. Neka su A, B, C, D, E, F vrhovi pravilnog šesterokuta. Provjeri jednakosti:

1) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC}$; **2)** $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AF}$;

3) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BA}$; **4)** $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$.

9. Nacrtaj neka tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ te konstruiraj sljedeće vektore:

1) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; **2)** $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$; **3)** $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$.

10. Točka T težište je trokuta ABC. Odredi zbroj vektora $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC}$.

1.3. Množenje vektora skalarom

Definicija operacije množenja vektora skalarom

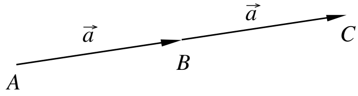
Sad ćemo definirati novu operaciju: množenje vektora realnim brojem. Realni broj kratko ćemo zvati **skalarom**[1] i označavati slovima grčkog alfabeta.

U skupu realnih brojeva množenje je bila operacija izvedena iz zbrajanja. Tako je na primjer zbroj $a+a$ jednak broju $2a$, te $a+a+a=3a$, itd. Prirodno je zahtijevati da isto svojstvo vrijedi i za vektore.

[1] Umjesto realnog broja, moguće je definirati i operaciju množenja vektora kompleksnim brojem. Kako taj umnožak nema jasnu geometrijsku interpretaciju, mi ćemo se ograničiti na množenje realnim brojevima.

Vektor $2\vec{a}$ definiramo kao zbroj $\vec{a}+\vec{a}$. Odredimo taj vektor. Neka je $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$. Nacrtajmo još jednom vektor $\vec{a}$, ali tako da mu početak bude u točki B. Dakle, $\vec{a}=\overrightarrow{BC}$. Pritom su točke A, B i C kolinearne i vrijedi $|\vec{a}|=|AB|=|BC|$ (slika 1.22.). Onda je $2\vec{a}=\overrightarrow{AC}$.

Dakle, za vektor $2\vec{a}$ vrijedi:
- njegov je smjer isti kao i za vektor $\vec{a}$;
- za njegovu duljinu vrijedi $|2\vec{a}|=2|\vec{a}|$.



Sl. 1.22. Vektor $2\vec{a}$

* * *

Kako ćemo množiti vektor negativnim brojem? Prisjetimo se ponovno svojstava množenja realnih brojeva. Umnožak realnog broja a i negativnog broja -2 je broj suprotan broju $2a$. To ćemo svojstvo zahtijevati i za množenje vektora negativnim skalarom: umnožak $(-2)\vec{a}$ bit će vektor suprotan vektoru $2\vec{a}$.

Ovim smo pokazali koji se vektor dobiva množenjem vektora cijelim brojem. Pokažimo sad kako se definira operacija množenja vektora bilo kojim skalarom. Rezultat te operacije bit će vektor. Moramo mu odrediti duljinu, smjer i orijentaciju.

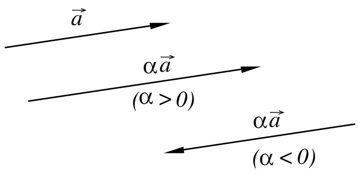
Množenje vektora skalarom

Vektor $\vec{a}$ množi se skalarom α tako da se dobije vektor $\alpha\vec{a}$ sa svojstvima:

1. duljina mu je jednaka umnošku apsolutne vrijednosti skalara i duljine vektora:
$$|\alpha\vec{a}|=|\alpha|\cdot|\vec{a}|;$$

2. smjer mu je jednak smjeru vektora $\vec{a}$;

3. orijentacija mu je jednaka orijentaciji vektora $\vec{a}$ ako je $\alpha>0$, a suprotna orijentaciji vektora $\vec{a}$ ako je $\alpha<0$.



Sl. 1.23. Množenje vektora skalarom.

* * *

Kad je umnožak vektora i skalara nulvektor?

Ako je skalar jednak nuli, onda za umnožak $0\cdot\vec{a}$ mora biti
$$|0\cdot\vec{a}|=|0|\cdot|\vec{a}|=0,$$
pa je $0\cdot\vec{a}$ nulvektor, jer samo nulvektor ima duljinu jednaku nuli.

Ako je vektor jednak nulvektoru, onda slično imamo
$$|\alpha\cdot\vec{0}|=|\alpha|\cdot|\vec{0}|=|\alpha|\cdot 0=0,$$
pa je $\alpha\cdot\vec{0}$ ponovno nulvektor.

Obratno, ako je $\alpha\vec{a}=\vec{0}$, onda je $0=|\vec{0}|=|\alpha|\cdot|\vec{a}|$, pa mora barem jedan od faktora biti jednak nuli. Zato je ili $|\alpha|=0$, tj. $\alpha=0$, ili $|\vec{a}|=0$, tj. $\vec{a}=\vec{0}$ (ili oboje).

Zaključujemo:

Vrijedi $\alpha\vec{a} = \vec{0}$ onda i samo onda ako je $\alpha = 0$ ili $\vec{a} = \vec{0}$.

* * *

Operacija množenja vektora negativnim skalarom usklađena je s prije definiranim suprotnim vektorom. Naime, vektor $(-1)\vec{a}$ ima duljinu

$$|(-1)\vec{a}| = |-1| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|,$$

dakle, jednaku duljini vektora $\vec{a}$, isti smjer kao $\vec{a}$ i orijentaciju suprotnu orijentaciji vektora $\vec{a}$, pa je to upravo suprotni vektor, $-\vec{a}$. Dakle, vrijedi

$$(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a},$$

tj. množenjem vektora s -1 dobiva se suprotan vektor.

Svojstva operacije množenja vektora skalarom

Za bilo koje skalare α, β i vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$ vrijedi:

1. Usklađenost s množenjem skalara

$$\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}.$$

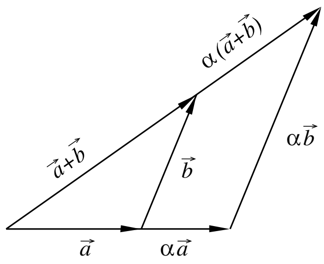
2. Distributivnost prema zbrajanju skalara:

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}.$$

3. Distributivnost prema zbrajanju vektora:

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}.$$

Ova bi svojstva trebalo dokazati na temelju definicije dviju operacija: množenja skalara vektorom i zbrajanja vektora. Treba provjeriti jednakost vektora s obje strane navedenih izraza. Neprilika je u tome što definicija množenja vektora skalarom ovisi o predznaku tog skalara, pa u svim tim relacijama moramo ispitivati sve moguće slučajeve izbora predznaka za skalare α i β. To ovdje nećemo činiti. Slika desno objašnjava svojstvo distributivnosti prema zbrajanju vektora.



Sl. 1.24.

Navedena svojstva omogućuju da dopuštene izraze s vektorima sređujemo na način na koji smo to navikli raditi za realne brojeve. Tako na primjer, vrijedi

$$6(\vec{a} + 2\vec{b}) - 2(\vec{4a} - 2\vec{b}) = 6\vec{a} + 12\vec{b} - 8\vec{a} + 4\vec{b} = -2\vec{a} + 16\vec{b},$$

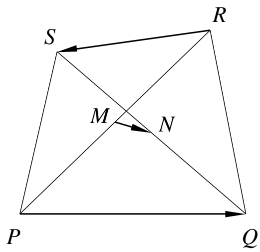
$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + (2\alpha - \beta)\vec{b} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + 2\alpha\vec{b} - \beta\vec{b} = \alpha\vec{a} + 2\alpha\vec{b} = \alpha(\vec{a} + 2\vec{b}).$$

Primjer 1. Neka su P, Q, R i S vrhovi četverokuta. Dokažimo da vrijedi $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = 2\overrightarrow{MN}$, gdje je M polovište dužine $\overline{PR}$, a N polovište dužine $\overline{QS}$.

▷ Jer je zbroj ulančanih vektora stranica u četverokutu jednak nulvektoru, vrijedi

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MP} = \vec{0},$$
$$\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SN} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MR} = \vec{0}.$$

Zbrojimo ove dvije jednakosti. Pritom uvažimo da su $\overrightarrow{MP}$ i $\overrightarrow{MR}$ suprotni vektori jer su istih duljina i smjera, a suprotne orijentacije. Zato je $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MR} = \vec{0}$. Isto tako, suprotni su vektori $\overrightarrow{QN}$ i $\overrightarrow{SN}$. Dobivamo



Sl. 1.25.

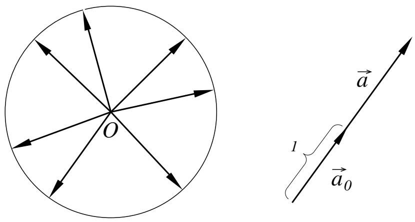
$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} + 2\overrightarrow{NM} = \vec{0},$$

te je

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = -2\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{MN}. \quad ◁$$

Jedinični vektor

Za vektor $\vec{a}$ kažemo da je **jedinični vektor** (ili **ort**) ako je njegova duljina $|\vec{a}| = 1$.



Sl. 1.26. Neka je O istaknuta točka ravnine. Svi vektori u ravnini kojima je početna točka O, a duljina jednaka 1 imaju završetak na kružnici k polumjera 1. Gdje bi se nalazili završetci svih takvih vektora u prostoru?

Podijelimo li bilo koji vektor $\vec{a}$ (različit od nulvektora) njegovom duljinom[1], dobit ćemo jedinični vektor $\vec{a}_0$:

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Uistinu, ovako definiran vektor $\vec{a}_0$ kolinearan je s vektorom $\vec{a}$ (dakle ima isti smjer), ima istu orijentaciju kao i $\vec{a}$, a duljina mu iznosi:

$$|\vec{a}_0| = \left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right| = \frac{1}{|\vec{a}|}\,|\vec{a}| = 1.$$

Kažemo da smo vektor $\vec{a}$ *normirali*.

[1] zapravo, radi se o množenju vektora skalarom jednakim recipročnoj vrijednosti duljine vektora