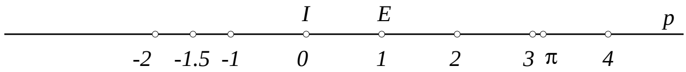
1.

Trigonometrijske funkcije realnog broja

1.1. Brojevna kružnica

Brojevni pravac

Na pravcu p istaknimo dvije različite točke I i E. Točki I pridružimo broj 0, a točki E broj 1. Svakoj točki pravca p možemo pridružiti jedan realan broj. Vrijedi i obratno, svakom realnom broju pridružena je jedna točka pravca p (slika 1.1.).



Sl. 1.1. Brojevni pravac.

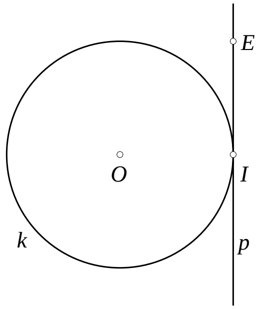
Pravac p zajedno s tim pridruživanjem naziva se **brojevni pravac** ili **koordinatna os**. Točka I naziva se **ishodište** koordinatnog sustava na pravcu, a točka E **jedinična točka**.

Dužina $\overline{IE}$ zove se **jedinična dužina** brojevnog pravca p.

Brojevna kružnica

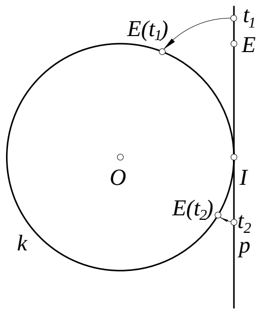
Neka je k kružnica središta O i polumjera $r=1$, a točka I neka je točka kružnice k.

Uočimo brojevni pravac p koji dira kružnicu k u točki I koja je ujedno i ishodišna točka pravca p. Neka je jedinična dužina $\overline{IE}$ brojevnog pravca p jednaka polumjeru kružnice k, pri čemu je točka E postavljena tako da ako se krećemo od točke O do točke E preko I, gibanje ima pozitivan smjer, tj. smjer suprotan od gibanja kazaljke na satu (slika 1.2.).



Sl. 1.2. Brojevni pravac p dira kružnicu k, $d(O,I)=d(I,E)=1$.

Pravac p namotajmo bez klizanja i rastezanja na kružnicu k tako da polupravac s pozitivnim brojevima namatamo u pozitivnom smjeru, a polupravac na kojemu su smješteni negativni brojevi u negativnom smjeru (slika 1.3.). Kako je svakom realnom broju pridružena točno jedna točka pravca p, ovim namatanjem smo svakom realnom broju pridružili točno jednu točku kružnice. Ovo pridruživanje zovemo **eksponencijalno preslikavanje** pravca na kružnicu i označavamo s E.



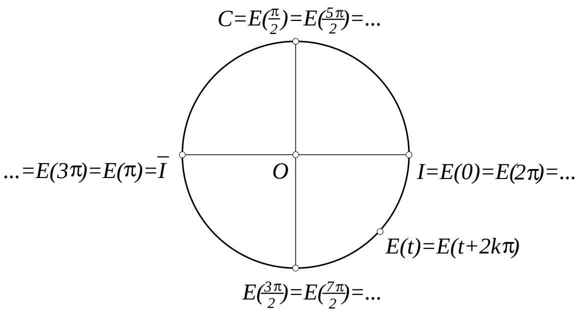
Sl. 1.3. Namatanje pravca na kružnicu.

> **Brojevna kružnica**
>
> Kružnicu k zajedno s eksponencijalnim preslikavanjem $E:\mathbf{R}\to k$ nazivamo **brojevna** ili **trigonometrijska kružnica**.

Broju 0 je pridružena točka I. Kako je duljina jedinične kružnice jednaka 2π, to se broj 2π preslikava opet u točku I. Dalje, broj 4π preslikava se u točku I.

Duljina jedinične polukružnice je π, pa se broj π preslikava u točku $\overline{I}$ (slika 1.4.) koja je dijametralno suprotna točki I. Ali isto tako, i brojevi $3\pi=\pi+2\pi$, $5\pi=\pi+2\cdot 2\pi,\ldots$ se također preslikavaju u točku $\overline{I}$.

Četvrtina kružnice ima duljinu $\dfrac{\pi}{2}$, pa znači da se u točku C preslikava broj $\dfrac{\pi}{2}$, ali i brojevi $\dfrac{\pi}{2}+2\pi$, $\dfrac{\pi}{2}+4\pi,\ldots$ (slika 1.4.).



Sl. 1.4. Točke koje su na pravcu udaljene za 2π na kružnici imaju isti položaj.

Dakle,

$$I = E(0) = E(2\pi) = E(4\pi) = E(-2\pi) = \dots, \quad \text{tj. } I = E(2k\pi), \qquad k \in \mathbf{Z},$$
$$\bar{I} = E(\pi) = E(-\pi) = E(3\pi) = E(5\pi) = \dots, \quad \text{tj. } \bar{I} = E((2k+1)\pi), \qquad k \in \mathbf{Z},$$
$$C = E\left(\frac{\pi}{2}\right) = E\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = E\left(\frac{\pi}{2} - 2\pi\right) = \dots, \quad \text{tj. } C = E\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Općenito možemo zaključiti da se svake dvije točke koje su na pravcu udaljene za 2π ili za višekratnik broja 2π namatanjem stope u jednu točku kružnice, tj. vrijedi

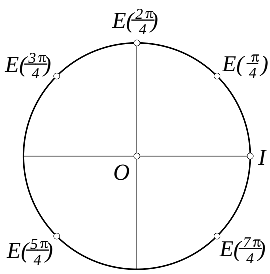
$$E(t + 2k\pi) = E(t) \text{ za svaki } t \in \mathbf{R} \text{ i } k \in \mathbf{Z}.$$

Primjer 1. Nacrtajmo $E(t)$, ako je t jednako:

a) $\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$; **b)** $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$;

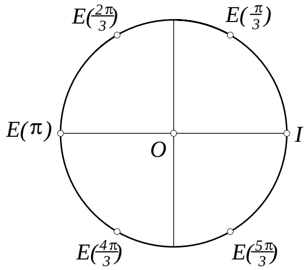
c) $\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

▷ a)



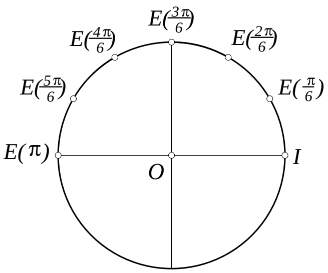
Sl. 1.5. Četvrtina polukružnice ima duljinu $\frac{\pi}{4}$. Točke $E\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $E\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $E\left(\frac{5\pi}{4}\right)$, $E\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ dijele četvrtine kružnice na jednake dijelove.

b)



Sl. 1.6. Trećina polukružnice ima duljinu $\dfrac{\pi}{3}$. *Točke* $E\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ *i* $E\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ *dijele gornju polukružnicu na tri jednaka dijela.*

c)



Sl. 1.7. Točke $E\left(\dfrac{\pi}{6}\right), \ldots, E\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$ *dijele gornju polukružnicu na šest jednakih dijelova.*

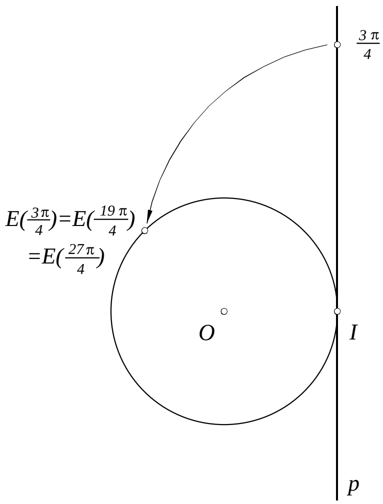
Primjer 2. Za realni broj $t = \dfrac{19\pi}{4}$ nađimo brojeve $t_1 \in [0, 2\pi\rangle$, $t_2 \in [6\pi, 8\pi\rangle$, takve da vrijedi $E(t) = E(t_1) = E(t_2)$.

▷ Kako je $\dfrac{19\pi}{4} = 4\pi + \dfrac{3\pi}{4}$ i $\dfrac{3\pi}{4} \in [0, 2\pi\rangle$ to je $t_1 = \dfrac{3\pi}{4}$.

Broj t_2 računamo ovako:

$$\begin{aligned}\frac{19\pi}{4} &= (4\pi + \frac{3\pi}{4}) - 6\pi + 6\pi \\ &= (4\pi - 6\pi) + (6\pi + \frac{3\pi}{4}) \\ &= -2\pi + \frac{27\pi}{4},\end{aligned}$$

pa je $t_2 = \dfrac{27\pi}{4} \in [6\pi, 8\pi\rangle$.



Sl. 1.8. Brojevi $\dfrac{19\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{27\pi}{4}$ *preslikavaju se u istu točku trigonometrijske kružnice.*

Zadaci 1.1

1. Na brojevnoj kružnici odredi točke $E(t)$ ako je t:

a) $\frac{\pi}{3}$; **b)** $\frac{2\pi}{3}$; **c)** $\frac{\pi}{5}$;
d) $\frac{21}{4}\pi$; **e)** $-\frac{3\pi}{4}$; **f)** $-\frac{171}{5}\pi$;
g) $-\frac{1998}{7}\pi$; **h)** $-\frac{289}{3}\pi$; **i)** $\frac{1999}{3}\pi$.

2. Na brojevnoj kružnici skiciraj položaj točke $E(t)$ ako je t:
a) 1; **b)** 12.65; **c)** 16.785;
d) 1988; **e)** -1; **f)** -0.23;
g) -1103; **h)** -30.28; **i)** 6.72;
pri čemu uzmi da je $\pi \approx 3.14159$.

3. Odredi $t \in [0, 2\pi\rangle$ takav da je $E(t) = E(x)$ ako je zadan x:
a) 132π; **b)** 213π; **c)** -11π;
d) -42π; **e)** $\frac{19\pi}{2}$; **f)** $\frac{1999\pi}{2}$.

4. Odredi $t \in [0, 2\pi\rangle$ takav da je $E(t) = E(x)$ ako je zadan x:
a) $\frac{121\pi}{3}$; **b)** $\frac{1432\pi}{3}$; **c)** $\frac{127\pi}{6}$;
d) $\frac{1546\pi}{5}$; **e)** $-\frac{237\pi}{4}$; **f)** $-\frac{37\pi}{10}$.

5. Odredi $t \in [0, 2\pi\rangle$ takav da je $E(t) = E(x)$ ako je zadan x:
a) 16.28; **b)** 32.14; **c)** -10.31;
d) -8; **e)** 101; **f)** -7.51,
pri čemu uzmi da je $\pi \approx 3.14$.

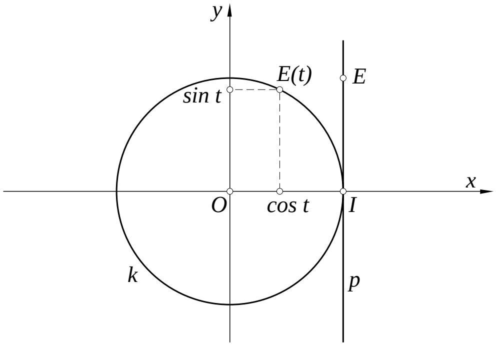
6. Odredi $t \in [-2\pi, 0\rangle$ takav da je $E(t) = E(x)$ ako je zadan x:
a) 13π; **b)** -1434π; **c)** $\frac{25\pi}{4}$;
d) $-\frac{1235\pi}{6}$; **e)** $\frac{132\pi}{17}$; **f)** $-\frac{218\pi}{25}$.

7. Odredi $t \in [10\pi, 12\pi\rangle$ takav da je $E(t) = E(x)$ ako je zadan x:
a) $\frac{\pi}{4}$; **b)** $\frac{3\pi}{4}$; **c)** $-\frac{\pi}{2}$;
d) $\frac{32\pi}{3}$; **e)** $\frac{25\pi}{6}$; **f)** $-\frac{35\pi}{3}$.

1.2. Definicija trigonometrijskih funkcija

Funkcije sinus i kosinus

Brojevnu kružnicu $k(O, r = 1)$ smjestimo u koordinatni sustav u ravnini tako da se ishodište koordinatnog sustava podudara sa središtem O kružnice k, a os x neka se poklapa s pravcem OI (slika 1.9.).



Sl. 1.9. Koordinate točke $E(t)$ su kosinus i sinus broja t.

Sada je brojevni pravac p paralelan s osi y, a njegove točke I i E imaju koordinate $(1, 0)$ i $(1, 1)$ redom. Kao što smo već opisali, realnom broju t pridružena je točka $E(t)$ kružnice k.

Kosinus i sinus realnog broja

Apscisa točke $E(t)$ naziva se **kosinus broja** t i označava se s $\cos t$.
Ordinata točke $E(t)$ naziva se **sinus broja** t i označava se sa $\sin t$.

Funkcija koja broju t pridružuje broj $\cos t$ naziva se **kosinus** i označava se sa $\cos$, a funkcija koja broju t pridružuje broj $\sin t$ naziva se **sinus** i označava se sa $\sin$.

Funkcije kosinus i sinus definirane su na skupu $\mathbf{R}$, a kodomena im je $[-1, 1]$ jer su koordinate točke $E(t)$ brojevi ne veći od 1 po apsolutnoj vrijednosti.

Funkcije sinus i kosinus

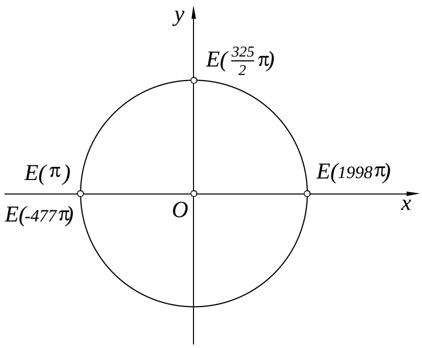
$$\cos : \mathbf{R} \to [-1, 1] \qquad \sin : \mathbf{R} \to [-1, 1]$$

$$t \mapsto \cos t \qquad t \mapsto \sin t$$

Primjer 1. Nacrtajmo točku $E(t)$ i izračunajmo sinus i kosinus od t, ako je t:

a) π; **b)** 1998π; **c)** -477π; **d)** $\dfrac{325}{2}\pi$.

▷ $\sin\pi = 0$, $\cos\pi = -1$;
$\sin 1998\pi = 0$, $\cos 1998\pi = 1$;
$\sin(-477\pi) = 0$, $\cos(-477\pi) = -1$;
$\sin\dfrac{325}{2}\pi = 1$, $\cos\dfrac{325}{2}\pi = 0$.

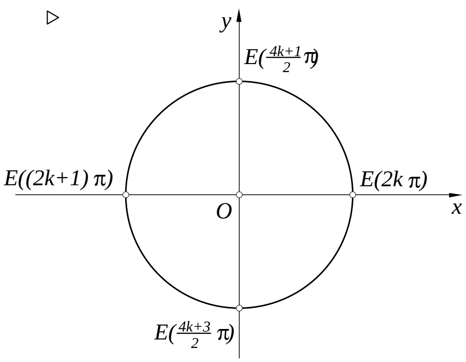


Sl. 1.10.

Primjer 2. Nacrtajmo točku $E(t)$ i izračunajmo sinus i kosinus od t, ako je t:

a) $(2k+1)\pi$; **b)** $2k\pi$; **c)** $\dfrac{4k+1}{2}\pi$; **d)** $\dfrac{4k+3}{2}\pi$.

▷



Sl. 1.11.

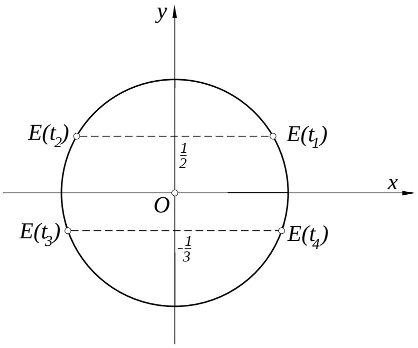
$\sin(2k+1)\pi = 0$,
$\cos(2k+1)\pi = -1$;
$\sin 2k\pi = 0$, $\cos 2k\pi = 1$;
$\sin\dfrac{4k+1}{2}\pi = 1$, $\cos\dfrac{4k+1}{2}\pi = 0$;
$\sin\dfrac{4k+3}{2}\pi = -1$, $\cos\dfrac{4k+3}{2}\pi = 0$.

Primjer 3. Nacrtajmo točke $E(t)$ za koje vrijedi:

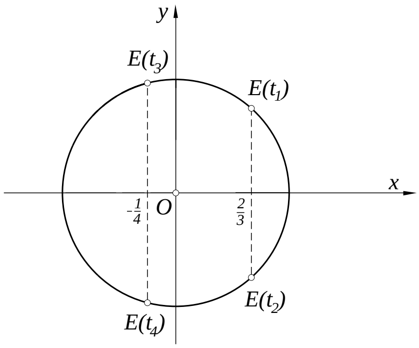
a) $\sin t = \dfrac{1}{2}$; **b)** $\sin t = -\dfrac{1}{3}$;

c) $\cos t = \dfrac{2}{3}$; **d)** $\cos t = -\dfrac{1}{4}$.

▷



Sl. 1.12. Za točke $E(t_1)$ *i* $E(t_2)$ *vrijedi* $\sin t_1 = \sin t_2 = \frac{1}{2}$. *Za točke* $E(t_3)$ *i* $E(t_4)$ *vrijedi* $\sin t_3 = \sin t_4 = -\frac{1}{3}$.

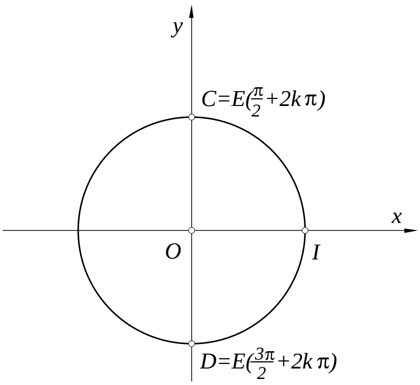


Sl. 1.13. Za točke $E(t_1)$ *i* $E(t_2)$ *vrijedi* $\cos t_1 = \cos t_2 = \frac{2}{3}$. *Za točke* $E(t_3)$ *i* $E(t_4)$ *vrijedi* $\cos t_3 = \cos t_4 = -\frac{1}{4}$.

Funkcija tangens

Funkcija **tangens**, u oznaci tg, definira se pomoću funkcija sinus i kosinus ovako:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \cos t \neq 0.$$



Sl. 1.14. C i D su točke trigonometrijske kružnice s apscisom 0.

Za koje brojeve t vrijedi $\cos t \neq 0$?

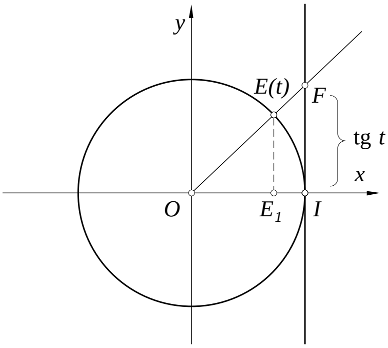
Jedine točke na brojevnoj kružnici s apscisom 0 su točke $C(0,1)$ i $D(0,-1)$ (slika 1.14.). Brojevi koji se namatanjem preslikavaju u točku C su brojevi $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{9\pi}{2}\dots$, $\frac{-3\pi}{2}$, $\frac{-7\pi}{2}, \dots$, tj. $C = E\Big(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\Big)$, $k \in \mathbf{Z}$. Za točku D vrijedi $D = E\Big(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\Big), k \in \mathbf{Z}$. Dakle, tangens je definiran za sve realne brojeve t različite od $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Funkcija tangens

$$\mathrm{tg} : \mathbf{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$$

$$\mathrm{tg}\, t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

Gdje se na brojevnoj kružnici pojavljuje tangens broja t? Neka je $t \in \mathbf{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbf{Z}\}$ takav da $E(t)$ pripada prvom kvadrantu. Označimo sa E_1 ortogonalnu projekciju točke $E(t)$ na os x, a sa F presjek pravca p i spojnice $OE(t)$ (slika 1.15.).



Sl. 1.15. Geometrijska interpretacija broja $\mathrm{tg}\, t$.

Očito je da su trokuti $OE_1E(t)$ i OIF slični, pa vrijedi

$$\frac{|FI|}{|OI|} = \frac{|E_1E(t)|}{|OE_1|},$$

tj. uvažavajući da je $|OI| = 1$, $|E_1E(t)| = \sin t$, $|OE_1| = \cos t$, dobivamo

$$|FI| = \frac{\sin t}{\cos t} = \mathrm{tg}\, t.$$

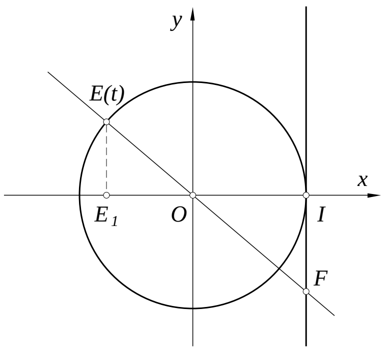
Dakle, točka F ima koordinate $(1, \mathrm{tg}\, t)$, tj. tangens broja t je ordinata točke dobivene presjekom pravca p i spojnice $OE(t)$.

Promotrimo slučaj kad je $E(t)$ u drugom kvadrantu, tj. kad je $\sin t > 0$ i $\cos t < 0$ (slika 1.16.).

Definirajmo opet točke E_1 i F kao u prethodnom slučaju. Vrijedi $\triangle OE_1E(t) \sim \triangle OIF$, pa je

$$\frac{|FI|}{|OI|} = \frac{|E_1E(t)|}{|E_1O|},$$

tj. $|FI| = \dfrac{\sin t}{|\cos t|} = |\,\mathrm{tg}\, t|$. Dakle, udaljenost od F do x-osi iznosi $|\,\mathrm{tg}\, t|$, a kako je F u četvrtom kvadrantu, ordinata joj je negativan broj, pa je $F = (1, -|\,\mathrm{tg}\, t|) = (1, \mathrm{tg}\, t)$ jer je $\mathrm{tg}\, t$ negativan zbog negativnosti kosinusa od t. Znači i u ovom slučaju je $\mathrm{tg}\, t$ ordinata točke F.



Sl. 1.16. $E(t)$ je u drugom kvadrantu i $\mathrm{tg}\, t$ *je opet ordinata točke F.*

U slučajevima kad $E(t)$ pripada trećem, odnosno, četvrtom kvadrantu uz analogni postupak imamo isti zaključak koji posebno i istaknimo.

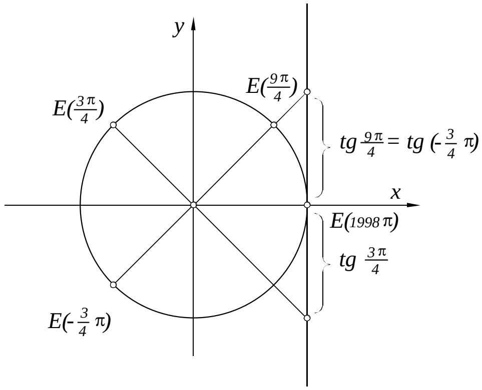
Tangens broja t

Tangens broja t je ordinata točke dobivene presjekom pravca p i spojnice točaka O i $E(t)$. Pravac p nazivamo **tangensnom osi**.

Primjer 4. Nacrtajmo $E(t)$ na trigonometrijskoj kružnici i $\operatorname{tg} t$ na tangensnoj osi ako je t:

a) $\dfrac{9\pi}{4}$; **b)** $\dfrac{3\pi}{4}$; **c)** 1998π; **d)** $-\dfrac{3\pi}{4}$.

▷



Sl. 1.17.

Funkcija kotangens

Funkcija **kotangens**, u oznaci ctg, definira se ovako

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}, \quad \sin t \neq 0.$$

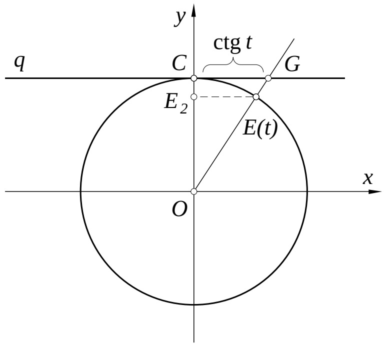
Brojevi za koje je $\sin t = 0$ su oni koji se preslikaju u točke $I(1,0)$ i $\bar{I}(-1,0)$. Kako je $I = E(2k\pi), k \in \mathbf{Z}$ i $\bar{I} = E(\pi + 2k\pi), k \in \mathbf{Z}$, brojevi za koje je $\sin t = 0$ su oblika $k\pi, k \in \mathbf{Z}$ pa je domena funkcije ctg skup $\mathbf{R}\backslash\{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$.

Funkcija kotangens

$$\operatorname{ctg} : \mathbf{R}\backslash\{k\pi : k \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$$

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Neka je q tangenta brojevne kružnice k u točki $C(0,1)$. Uzmimo takav realan broj t kojemu namatanjem pridružena točka $E(t)$ koja pripada prvom kvadrantu.



Sl. 1.18. Geometrijska interpretacija kotangensa broja t.

Neka je E_2 ortogonalna projekcija točke $E(t)$ na y-os, a G presjek pravca q i spojnice $OE(t)$. Trokuti $OE_2E(t)$ i OCG su slični i kako je $|E_2E(t)| = \cos t$, $|OC| = 1$ i $|OE_2| = \sin t$, to je $\dfrac{|CG|}{|CO|} = \dfrac{|E_2E(t)|}{|E_2O|}$, tj. $|CG| = \dfrac{\cos t}{\sin t} = \operatorname{ctg} t$, tj. koordinate točke G su $(\operatorname{ctg} t, 1)$.

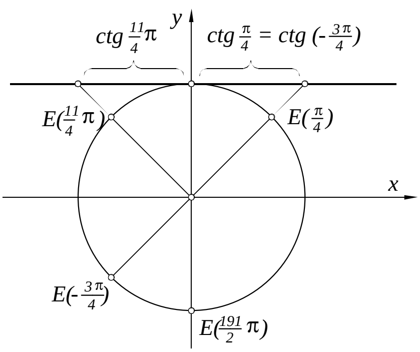
U ostalim slučajevima kada $E(t)$ pripada ostalim kvadrantima način razmišljanja je sličan, pa imamo sljedeći zaključak.

Kotangens broja t

Kotangens broja t je apscisa točke dobivene presjekom pravca q i spojnice točaka O i $E(t)$. Pravac q nazivamo **kotangensnom osi**.

Primjer 5. Nacrtajmo $E(t)$ na trigonometrijskoj kružnici i $\operatorname{ctg} t$ na kotangensnoj osi ako je t:

a) $\dfrac{\pi}{4}$; **b)** $\dfrac{11\pi}{4}$; **c)** $\dfrac{191}{2}\pi$; **d)** $-\dfrac{3\pi}{4}$.



Sl. 1.19.

Primjer 6. Odredimo predznake trigonometrijskih funkcija u pojedinim kvadrantima.

▷ Ako je $E(t)$ u prvom kvadrantu, tada su obje koordinate te točke pozitivne, tj. $\sin t > 0$, $\cos t > 0$, te su i $\operatorname{tg} t$ i $\operatorname{ctg} t$ pozitivni. Za ostale kvadrante vrijedi ova tablica:

kvadrant	I.	II.	III.	IV.
$\sin t$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos t$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\operatorname{tg} t$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\operatorname{ctg} t$	$+$	$-$	$+$	$-$

Zadaci 1.2

1. Nacrtaj $E(t)$ i istakni sinus i kosinus od t ako je t jednako:
a) 32π; **b)** -14π: **c)** -197π:
d) $\dfrac{321\pi}{2}$; **e)** $-\dfrac{141\pi}{2}$; **f)** $\dfrac{33\pi}{4}$.

2. Nađi $\sin t$, $\cos t$ ako je t:
a) 27π; **b)** -18π; **c)** 384π;
d) $\dfrac{21}{2}\pi$; **e)** $-\dfrac{43}{2}\pi$; **f)** $-\dfrac{1997}{2}\pi$.

3. Nacrtaj na trigonometrijskoj kružnici točke $E(t)$ za koje vrijedi:
a) $\sin t = \dfrac{3}{4}$; **b)** $\sin t = \dfrac{1}{6}$; **c)** $\sin t = -\dfrac{1}{4}$;
d) $\cos t = \dfrac{1}{3}$; **e)** $\cos t = -\dfrac{1}{2}$; **f)** $\cos t = -\dfrac{2}{3}$.

4. Nacrtaj $E(t)$ i istakni tangens i kotangens od t (ukoliko postoje), ako je t jednako:
a) 36π; **b)** -43π; **c)** $\dfrac{19}{2}\pi$;
d) $\dfrac{-123\pi}{2}$; **e)** $\dfrac{145\pi}{4}$; **f)** $-\dfrac{237\pi}{4}$.

5. Istakni na trigonometrijskoj kružnici točke $E(t)$ za koje vrijedi:
a) $\operatorname{tg} t = 1$; **b)** $\operatorname{tg} t = 2$; **c)** $\operatorname{tg} t = -\frac{5}{4}$;
d) $\operatorname{ctg} t = 1.5$; **e)** $\operatorname{ctg} t = -1.8$; **f)** $\operatorname{ctg} t = 2$.

6. Izračunaj:
a) $\cos\pi - \cos 4\pi + \sin\dfrac{\pi}{2}\cdot\cos(-\pi)$; **b)** $\sin\dfrac{3\pi}{2} - \cos\pi + \sin\pi$;
c) $\sin 1996\pi - \cos 1997\pi + \operatorname{tg} 1998\pi$; **d)** $\dfrac{\operatorname{tg} 14\pi + \sin(-\frac{17}{2}\pi)}{\sin 27\pi - \cos 27\pi}$;
e) $\dfrac{\sin\frac{19\pi}{2} + \cos^2(-\frac{5\pi}{2})}{\sin^2(-\frac{19\pi}{2}) + \cos(\frac{5\pi}{2})}$; **f)** $\dfrac{\cos^2 7\pi - 2\sin^2 7\pi}{\cos^2\frac{17\pi}{2} + 2\sin^2\frac{17\pi}{2}}$.