

# **I. dio**

## **Zadaci za ponavljanje**

## 1. BROJEVI: Prirodni, cijeli, racionalni i realni brojevi. Izgradnja skupova $\mathbf{N}$ , $\mathbf{Z}$ , $\mathbf{Q}$ , $\mathbf{R}$ .

1. Odredi najveću zajedničku mjeru  $M(846, 246)$ .

2. Napiši broj  $121_3$  u sustavu s bazom 2.

3. Dokaži  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}$ .

4. Dokaži da je izraz  $(5n+1)^2 - 36$  djeljiv s 5  $\forall n \in \mathbf{N}$ .

5. Nađi sve prirodne brojeve između 25 000 i 30 000 koji pri dijeljenju sa 133 i 2128 daju isti ostatak 97.

6. Pokaži da je broj  $\frac{1}{(2-\sqrt{3})^3}$  iracionalan.

7. Izračunaj:

$$\left( \frac{4}{3x^2+6x} - \frac{2}{x^2-2x} + \frac{1}{x^2-4} \right) : \left( \frac{10}{x} - \frac{9}{x-2} \right) \cdot \frac{x^2-x+6}{x^3+8} - \frac{1}{x^2-2x+4} + \frac{1}{x+2}$$

8. Izračunaj:

$$\left[ 16^{\frac{1}{8}} + \left( 27^{-\frac{2}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \left[ 2^{0.5} - \left( \frac{1}{9} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

9. Riješi jednadžbe: a)  $\left| \frac{x+2}{2x-1} \right| = 3$ ; b)  $||x-1| - 2| = 1$ ; c)  $2^{1+|x+1|} = 4^{1.5}$ .

10. Riješi nejednadžbe:

a)  $|x-1| + 2| -x+2| < x+2$ ;

b)  $|x^2 - 5x| \leq 6$ ;

c)  $|\sin x - \frac{1}{2}| < 1$ .

## 2. SKUP KOMPLEKSNIH BROJEVA: Računske operacije u skupu $\mathbf{C}$ i svojstva. Konjugirano kompleksni brojevi. Apsolutna vrijednost kompleksnog broja.

1. Izračunaj:  $\frac{1+i^{1997}}{1-i^{1997}}$ .

2. Izračunaj:  $\frac{z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2}{z_1^2 - z_2^2}$  ako je

$$z_1 = -1 + 2i, \quad z_2 = 2 - i.$$

3. Odredi  $\operatorname{Im} \frac{z^6 - 2\bar{z} + i^{928}}{z^2 + |z|}$  ako je

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

4. Odredi modul broja

$$z = \frac{5+i}{(1+i)(2-3i)} + i^{25} + i^{35} + i^{40} + i^{46}.$$

5. Odredi  $z \in \mathbf{C}$  takav da je  $|z| - z = 2 - i$ .

6. U kompleksnoj ravnini prikaži kompleksne brojeve  $z$  za koje je broj  $\frac{z-1}{z+1}$  čisto imaginaran broj.

7. Prikaži u kompleksnoj ravnini skup kompleksnih brojeva  $z$  za koje vrijedi:

a)  $|z - i - 2| = 3$ ; b)  $\left| \frac{z-i+3}{z-2i} \right| \leq 1$ .

8. Dokaži:

a)  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ ;

b)  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ ;

c)  $\overline{\left( \frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ ,  $z_2 \neq 0$ ,  $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ ;

d)  $\overline{(\bar{z})} = z$ ,  $z \in \mathbf{C}$ .

## 3. TRIGONOMETRIJSKI OBLIK KOMPLEKSNOG BROJA: Računske operacije s kompleksnim brojevima u trigonometrijskom obliku. Moivreova formula.

1. Napiši kompleksan broj  $z$  u trigonometrijskom obliku:

a)  $z = 1 + i\sqrt{3}$ ;

b)  $z = 4i$ ;

c)  $z = -\frac{3}{4}$ ;

d)  $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;

e)  $z = -1 + i$ ;

f)  $z = -3\left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}\right)$ .

2. Napiši kompleksan broj  $z$  u trigonometrijskom obliku:

- a)  $z = 1 + \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ ;  
 b)  $z = \frac{\sqrt{3}-i}{-\cos \frac{\pi}{3}-i \sin \frac{\pi}{3}}$ ;  
 c)  $z = (\sin \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5})^3 (\cos \frac{\pi}{5} - i \cos \frac{4\pi}{5})$ ;  
 d)  $z = \frac{1-i}{(i-i \cos \frac{2\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{5})^4}$ .

3. Izračunaj:

- a)  $(\sqrt{3} + i)^5$ ;  
 b)  $(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^{20} \cdot (1 - i)^{10}$ .

4. Odredi:

- a)  $\sqrt[6]{-64i}$ ; b)  $\sqrt[3]{-2 + 2i}$ ;  
 c)  $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$ .

5. Odredi sva rješenja jednadžbe

$$z^6 + 1 = 0$$

te ih prikaži u kompleksnoj ravnini.

#### 4. POLINOMI S JEDNOM VARIJABLOM: Definicija polinoma. Jednakost polinoma. Operacije s polinomima. Nultočke polinoma. Tok i graf polinoma.

1. Koristeći se teoremom o jednakosti polinoma, za zadani polinom  $f(x) = x^3 + x^2$  odredi polinom  $g$  takav da je  $f(x) = g(x+1)$ .

2. Odredi realne brojeve  $a$ ,  $b$  tako da polinom  $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$  bude djeljiv polinomom  $g(x) = x^2 + x + ab$ .

3. Polinom  $f(x)$  pri dijeljenju s polinomom  $g_1(x) = x - 2$  daje ostatak 1, a s  $g_2(x) = x + 2$  ostatak -3. Koliki je ostatak pri dijeljenju polinoma  $f$  polinomom  $g = g_1 \cdot g_2$ .

4. Odredi kratnost nultočke  $x = -\frac{1}{2}$  polinoma  $f(x) = 4x^3 + 8x^2 + 5x + 1$ .

5. Odredi nultočke polinoma:

a)  $f(x) = x^4 - 10x^3 + 39x^2 - 70x + 50$ , ako je jedna njegova nultočka  $x_1 = 3 - i$ ;

b)  $f(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$ .

6. Odredi intervale monotonosti funkcije  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$ .

7. Opiši tok i skiciraj graf polinoma

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4.$$

8. Odredi točke ekstrema, točke infleksije (ako ih ima), te skiciraj graf polinoma  $f(x) = x^3(4 - x)$ .

Uputa: U zadacima 6–8 koristi se derivacijom polinoma.

#### 5. POLINOM PRVOG STUPNJA S JEDNOM VARIJABLOM: Definicija i svojstva (rast, pad). Graf polinoma 1. stupnja. Jednadžba pravca dvjema točkama. Jednadžba pravca s poznatim koeficijentom smjera kroz jednu točku.

1. Ispitaj tok i nacrtaj graf funkcije  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  zadane formulom:

a)  $f(x) = -2x + 3$ ;

b)  $f(x) = |x| + x$ ;

c)  $f(x) = |x - 2|$ ;

d)  $f(x) = |2x + 1| - |x - 2|$ .

2. U skupu funkcija

$$f(x) = (m - 4)x - (3m - 10), \quad m \in \mathbf{R}$$

odredi funkciju  $f$  tako da točka  $T(1, 2)$  pripada grafu funkcije  $f$ . Ispitaj tok i nacrtaj graf te funkcije.

3. Vrhovi trokuta su  $A(-1, 1)$ ,  $B(2, 5)$ ,  $C(7, -5)$ . Nađi:

a) duljine stranica  $|AB|$  i  $|AC|$  te jednadžbe pravaca na kojima leže;

b) duljine težišnica iz vrhova  $A$  i  $B$  te jednadžbe pravaca na kojima leže.

4. Zadana su tri vrha  $A(1, 2)$ ,  $B(5, 4)$ ,  $C(7, 8)$  paralelograma  $ABCD$ . Kako glasi jednadžba pravca na kojem leži stranica  $\overline{AD}$ ?

5. Odredi inverznu funkciju funkcije  $f(x) = -2x + 1$ .

6. Dokaži da je inverzna funkcija polinoma prvog stupnja također polinom prvog stupnja.

## 6. KVADRATNA FUNKCIJA: Definicija, graf, tok i nultočke kvadratne funkcije. Viéteove formule.

1. Prikaži grafički funkciju

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}.$$

Odredi intervale pada i ekstreme funkcije  $f$ .  
Za koje  $x \in \mathbf{R}$  je  $f(x) \leq 0$ ?

2. U skupu funkcija

$$f(x) = (m-1)x^2 + (m-4)x - m - 1$$

odredi onu funkciju koja postiže najmanju vrijednost za  $x = 1$ . Opiši tok i skiciraj graf te funkcije.

3. Za koje vrijednosti realnog parametra  $m$ , rješenja kvadratne jednačbe

$$(1-m)x^2 - x + m = 0$$

zadovoljavaju uvjet  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} < 1$ ?

4. Za koji  $a \in \mathbf{R}$  je funkcija  $f(x) = ax^2 - 5x + 9a$  pozitivna za sve  $x \in \mathbf{R}$ ?

5. Napiši kvadratnu funkciju s racionalnim koeficijentima ako je  $x = \sqrt{3} - 2$  jedna nultočka te funkcije.

6. Kako rješenja jednačbe

$$(a-1)x^2 - 2(a+3)x + a - 3 = 0, \quad a \neq 1$$

ovise o realnom parametru  $a$ ?

7. Riješi nejednačbe:

a)  $\frac{4x-x^2}{x^2-x-2} \leq 0$ ;

b)  $\frac{-x^2+2x-5}{2x^2-x-1} < -1$ ;

c)  $|x^2 - 2x| \geq 3 - x - x^2$ .

8. Nacrtaj graf funkcije

$$f(x) = |x^2 - 2x| + 3.$$

9. Riješi jednačbu

$$\sqrt{2x+5} - \sqrt{x-6} = \sqrt{x-1}.$$

10. Riješi nejednačbu

$$\sqrt{2x+1} > x - 1.$$

## 7. RACIONALNE FUNKCIJE: Definicija, prirodno područje definicije. Linearna kombinacija racionalnih funkcija.

1. Odredi prirodno područje definicije i nultočke racionalne funkcije

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x^3+x^2+x}.$$

2. Racionalnu funkciju  $h(x) = \frac{x}{x^2-4}$  prikaži kao linearnu kombinaciju racionalnih funkcija  $f(x) = \frac{1}{x-2}$  i  $g(x) = \frac{1}{x+2}$ .

3. Zadane su funkcije  $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$  i  $g(x) = \frac{1}{x-1}$ . Odredi kompozicije  $g \circ f$  i  $f \circ g$ , te nađi domene tih funkcija.

4. Dokaži da je kompozicija racionalnih funkcija oblika

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbf{R}$$

$$\text{i } ad - bc \neq 0$$

opet racionalna funkcija tog oblika.

5. Ispitaj tok i skiciraj graf funkcije

$$f(x) = \frac{x^2+3x}{x+4}.$$

6. Odredi  $\int \frac{x-2}{x^2-2x-3} dx$ .

## 8. EKSPONENCIJALNA FUNKCIJA: Definicija, svojstva i graf eksponencijalne funkcije.

1. Izračunaj:  $32^{\frac{1}{5}} \cdot 0.00032^{\frac{3}{5}} \cdot \left(\frac{1}{32}\right)^{-0.2}$ .

2. Pojednostavni:

a)  $\left[\left(\frac{3x^{-3}}{5y^{-2}}\right)^{-3} : \left(\frac{9x^{-1}}{5y^{-3}}\right)^{-2}\right] \cdot \frac{x^{-6}y}{15}$ ;

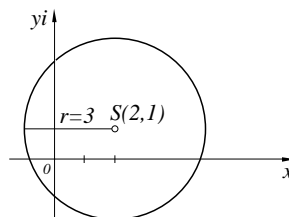
b)  $[\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}} \cdot (\sqrt[3]{x^2})^4] : (\sqrt{x-1})^7$ .

3. Neka je  $f(x) = x - 1$ ,  $g(x) = |x|$ ,  $h(x) = 3^x$ . Odredi kompozicije  $f \circ g$ ,  $h \circ g$ ,  $h \circ f$ ,  $f \circ h$ . Skiciraj grafove dobivenih funkcija.

## Rješenja zadatka za ponavljanje

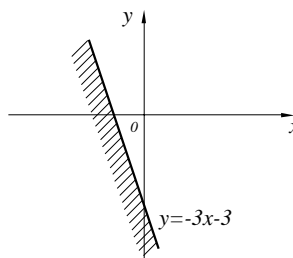
**1.**

1.  $M(846, 246) = 6$ .
2.  $121_3 = 1000_2$ .
3. Dokaz se provodi matematičkom indukcijom po  $n \in \mathbf{N}$ .
5. 25633, 27761, 29889.
6.  $\frac{1}{(2-\sqrt{3})^3} = 26 + 15\sqrt{3}$ .
7.  $\frac{1}{6}$ .
8.  $-7$ .
9. a)  $x_1 = \frac{1}{7}$ ,  $x_2 = 1$ ; b)  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 2$ ,  $x_4 = 4$ ; c)  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = 1$ .
10. a)  $x \in \langle \frac{3}{4}, \frac{7}{2} \rangle$ ; b)  $x \in [-1, 2] \cup [3, 6]$ ; c)  $x \in \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \langle -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \rangle$ .



Sl. 2.

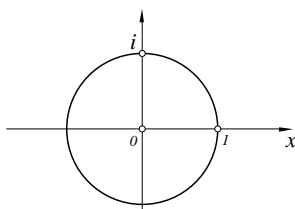
b)  $z = x + yi$ ,  $3x + y + 3 \leq 0$ .



Sl. 3.

**2.**

1.  $i$ .
2.  $-i$ .
3. 1.
4. 1.
5.  $z = -\frac{3}{4} + i$ .
6.  $z = x + yi$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ .



Sl. 1.

7. a)  $z = x + yi$ ,  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$

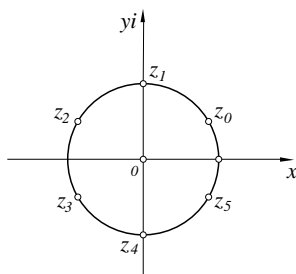
**3.**

1. a)  $z = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$ ;
- b)  $z = 4(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$ ;
- c)  $z = \frac{3}{4}(\cos \pi + i \sin \pi)$ ;
- d)  $z = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}$ ;
- e)  $z = \sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$ ;
- f)  $z = 3(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$ .
2. a)  $z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ ;
- b)  $z = 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$ ;
- c)  $z = 4 \sin^3 \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} (\cos \pi + i \sin \pi)$ ;
- d)  $z = \frac{\sqrt{2}}{16 \sin^{\frac{2}{5}} \frac{\pi}{5}} (\cos \frac{11\pi}{20} + i \sin \frac{11\pi}{20})$ .
3. a)  $16(-\sqrt{3} + i)$ ; b)  $16(-\sqrt{3} + i)$ ;
4. a)  $\sqrt[6]{-64i} = 2 \left[ \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}) \right]$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ;

$$\text{b) } \sqrt[3]{-2+2i} = \sqrt{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right) \right], k = 0, 1, 2;$$

$$\text{c) } \sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}} = 2^{-\frac{1}{12}} \left[ \cos\left(\frac{19\pi}{72} + \frac{k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{19\pi}{72} + \frac{k\pi}{3}\right) \right], k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$\text{5. } z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, z_1 = i, z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, z_4 = -i, z_5 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$



Sl. 4.

4.

$$1. g(x) = x^3 - 2x^2 + x.$$

$$2. a = 1, b = 0.$$

$$3. r(x) = x - 1.$$

4. Kratnost je 2.

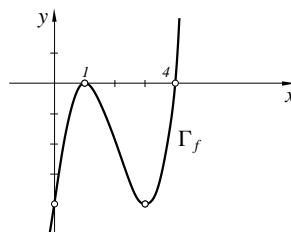
$$5. \text{ a) } x_{1,2} = 3 \pm i, x_{3,4} = 2 \pm i;$$

$$\text{ b) } x_1 = \frac{1}{2}, x_{2,3} = \pm 2i.$$

6.  $f$  raste na  $\langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 4, \infty \rangle$ , a pada na  $\langle 0, 4 \rangle$ .

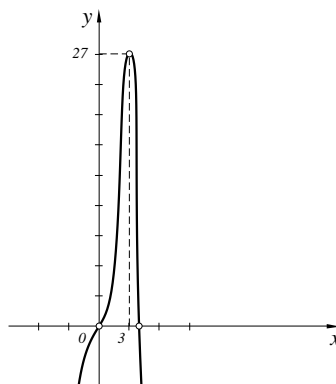
7.

$x$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	3	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$
$f$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
			maks.		min.				



Sl. 5.

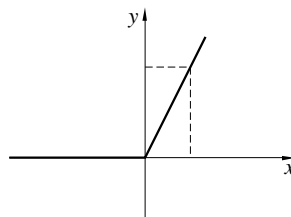
8. U  $x = 3$   $f$  ima maksimum, a on je  $f(3) = 27$ . Točka infleksije je  $x = 0$ .



Sl. 6.

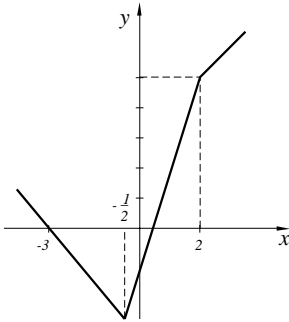
5.

1. b)



Sl. 7.

d)



Sl. 8.

2.  $m = 2, f(x) = -2x + 4.$

3. a)  $|AB| = 5, |AC| = 10,$

$\langle AB \rangle \dots 4x - 3y + 7 = 0,$

$\langle AC \rangle \dots 3x + 4y - 1 = 0;$

b)  $|t_A| = \frac{5\sqrt{5}}{2}, |t_B| = 5\sqrt{2}, t_A \dots 2x + 11y - 9 = 0, t_B \dots 7x + y - 19 = 0.$

4.  $\langle AD \rangle \dots y = 2x.$

5.  $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$

6.

1.  $f$  pada na  $\langle -\infty, -1 \rangle$ ; u  $x_0 = -1$  ima minimum  $y_0 = -2$ ;  $f(x) \leq 0$  za  $x \in [-3, 1]$ .

2.  $f(x) = x^2 - 2x - 3.$

3.  $m \in \langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle.$

4.  $a \in \langle \frac{5}{6}, +\infty \rangle.$

5.  $f(x) = a(x^2 + 4x + 1), a \in \mathbf{R}, a \neq 0.$

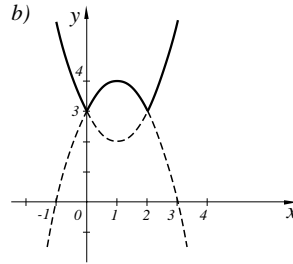
6. Za  $a > -\frac{3}{5}$  jednačba ima dva različita realna rješenja, za  $a = -\frac{3}{5}$  ima dvostruko realno rješenje, za  $a < -\frac{3}{5}$  ima dva konjugirano kompleksna rješenja.

7. a)  $x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup [0, 2] \cup [4, +\infty);$

b)  $x \in \langle -3, -\frac{1}{2} \rangle \cup \langle 1, 2 \rangle;$

c)  $x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup [1, +\infty).$

8.



Sl. 9.

9.  $x = 10.$

10.  $x \in [-\frac{1}{2}, 4).$

7.

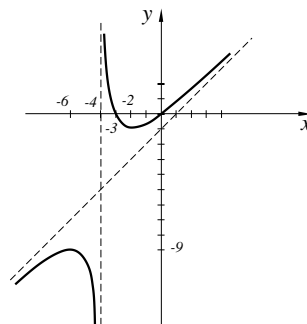
1.  $\mathcal{D}_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ , nultočke:  $x_1 = -3, x_2 = 3.$

2.  $h(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}g(x).$

3.  $(g \circ f)(x) = -\frac{x+1}{3}, \mathcal{D}_{g \circ f} = \mathbf{R} \setminus \{-1\};$   
 $(f \circ g)(x) = \frac{-2x+3}{x}, \mathcal{D}_{f \circ g} = \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}.$

5.

$x$	$-\infty$	$\nearrow$	$-6$	$\nearrow$	$-3$	$\nearrow$	$-2$	$\nearrow$	$0$	$\nearrow$	$\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-9$	$\searrow$	$0$	$\searrow$	$-1$	$\nearrow$	$0$	$\nearrow$	$\infty$



Sl. 10.

6.  $\frac{1}{4} \ln(|x - 3||x + 1|^3) + C.$

## **II. dio**

### **Maturalne zadaće**



### Zadaća 1.

**1.1.** Zadan je polinom  $p(x) = 12x^3 + 17x^2 - 7x$ .

a) Zadani polinom rastavi na faktore.

b) Riješi nejednadžbu

$$\frac{12x^3 + 17x^2 - 7x}{3x - 1} \geq 0.$$

c) Riješi jednadžbu

$$\sqrt{\frac{12x^3 + 17x^2 - 7x}{4x + 7}} = |3x - 1|.$$

**1.2.** Zadan je trokut  $ABC$  stranicama  $|AB| = 8$  cm,  $|BC| = 7$  cm i  $|CA| = 5$  cm. Pravac koji siječe segment  $\overline{AB}$  u točki  $D$ , a segment  $\overline{AC}$  u točki  $E$ , dijeli zadani trokut na trokut  $ADE$  i četverokut  $BCED$ . Neka je  $AD = x$  i  $AE = y$ .

a) Odredi vezu između  $x$  i  $y$  ako trokut  $ADE$  i četverokut  $BCED$  imaju iste opsege.

b) Odredi vezu između  $x$  i  $y$  ako trokut  $ADE$  i četverokut  $BCED$  imaju iste površine.

c) Za koje vrijednosti od  $x$  i  $y$  trokut  $ADE$  i četverokut  $BCED$  imaju i jednake opsege i jednake površine?

d) Izračunaj obujam tijela koje nastaje rotacijom zadanog trokuta  $ABC$  oko stranice  $AB$ .

**1.3.** Zadane su funkcije  $f(x) = 2^x$  i  $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}$ .

a) U istom koordinatnom sustavu nacrtaj grafove funkcija  $f$  i  $g$ .

b) Riješi jednadžbu  $f(x) = g(x)$ .

c) Izračunaj površinu onog dijela ravnine koji je omeđen grafovima zadanih funkcija i pravcem  $x = 2$ .

**1.4.** Kružnica s jednadžbom  $x^2 + y^2 - 8y + 11 = 0$  je upisana jednakokrakom trokutu  $ABC$  s kracima  $\overline{AC}$  i  $\overline{BC}$ , te vrhom  $C\left(-\frac{5}{3}, \frac{22}{3}\right)$ .

a) Odredi ostale vrhove trokuta.

b) Pod kojim se kutom iz središta kružnice vidi stranica  $AB$  trokuta?

**1.5.** Zadana je krivulja  $y = -x^2 + 2x$ .

a) Nacrtaj graf zadane krivulje.

b) Odredi jednadžbu tangente krivulje u njenoj točki  $T(x_0, y_0)$ .

c) Odredi  $T(x_0, y_0)$  iz uvjeta da trapez određen tangentom na krivulju u točki  $T$ , te pravcima  $x = 0$ ,  $x = 1$  i  $y = 0$  ima najmanju površinu.

**Zadaća 2.**

- 2.1.** a) U skupu kompleksnih brojeva riješi jednadžbu  $z^3 - 1 = 0$  i skiciraj njena rješenja u Gaussovoj ravnini.  
b) Nađi moguće vrijednosti izraza  $z^2 + z + 1$  ako je  $z$  rješenje gornje jednadžbe.  
c) Ako je  $z$  ono kompleksno rješenje jednadžbe iz a) koje nije realno, pojednostavi izraze  $a = (1 + 3z + z^2)^2$  i  $b = (1 + z + 3z^2)^2$  i dokaži da vrijedi  $\begin{cases} a \cdot b = 16 \\ a + b = -4. \end{cases}$
- 2.2.** Zadana je parabola  $y^2 = 4x$ .  
a) Pokaži da tetiva  $\overline{PQ}$ , gdje je  $P(2, y > 0)$  i  $Q(x, -\sqrt{2})$ , prolazi fokusom parabole.  
b) Nađi sjecište normala povučenih na parabolu u točkama  $P$  i  $Q$  i provjeri da se ono nalazi na paraboli  $y^2 = x - 3$ .  
c) Nađi površinu lika omeđenog parabolom i tetivom  $\overline{PQ}$ .
- 2.3.** Od kocke brida  $a$  odsijeku se ravninama vrhovi tako da od svake strane kocke nastane pravilni osmerokut.  
a) Nađi stranicu tog osmerokuta.  
b) Nađi oplošje nastalog tijela.  
c) Nađi obujam nastalog tijela.
- 2.4.** a) Odredi domenu i skiciraj graf funkcije  $f(x) = \log_2(2 - x)$ .  
b) Nađi zadanoj funkciji inverznu te i nju nacrtaj u istom koordinatnom sustavu.  
c) Riješi nejednadžbu  $f(x) > (g \circ f)(x)$ , gdje je  $g(x) = 4x + 6$ .
- 2.5.** U jednakokračnom trapezu zadana je veća osnovica  $a = 10$  cm, a kut uz nju neka je  $\alpha$ . Dijagonala trapeza okomita je na bočni brid.  
a) U ovisnosti o kutu  $\alpha$  izračunaj duljinu dijagonale i visinu trapeza.  
b) U ovisnosti o kutu  $\alpha$  izračunaj površinu trapeza.  
c) Za koji  $\alpha$  je površina najveća?  
d) Nađi najveću površinu.

**Zadaća 3.**

- 3.1.** a) U skupu kompleksnih brojeva riješi jednađžu  $z^3 + 1 = 0$  i prikaži njena rješenja u Gaussovoj ravnini.  
b) Dokaži da je  $z_k \cdot \bar{z}_k = 1$  za svako rješenje  $z_k$  zadane jednađže.  
c) Izračunaj  $A_k = (2z_k^2 + 4z_k - 3\sqrt{3}i)^2$  za svako rješenje  $z_k$  zadane jednađže i pokaži da je  $\sum_k \operatorname{Im} A_k = 0$ .
- 3.2.** Zadan je trokut svojim vrhovima  $A(-1, 2)$ ,  $B(1, 5)$  i  $C(4, 3)$ .  
a) Provjeri da je trokut pravokutan.  
b) Odredi mu kutove.  
c) Izračunaj mu površinu.  
d) Napiši jednađžu kružnice koja je opisana trokutu.  
e) Izračunaj površinu kružnog odsječka između stranice  $\overline{BC}$  i kružnice.
- 3.3.** Pravac  $3x - 5y + 25 = 0$  je zajednička tangenta elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  i konfokalne parabole  $y^2 = 2px$ .  
a) Odredi jednađže krivulja i nacrtaj ih.  
b) Pokaži da se dio tangente između dirališta vidi iz zajedničkog fokusa pod pravim kutom.  
c) Izračunaj površinu dijela ravnine omeđenog zadanom tangentom, osi  $x$  i lukom parabole.
- 3.4.** Zadan je krug polumjera 10 cm, a  $\overline{AB}$  je jedan njegov promjer. Tetiva  $\overline{AC}$  zatvara s tim promjerom kut  $\alpha$ .  
a) Izračunaj duljinu tetive  $\overline{AC}$  u ovisnosti o  $\alpha$ .  
Tetiva  $\overline{AC}$  rotira oko promjera  $\overline{AB}$ .  
b) Izračunaj visinu nastalog stošca u ovisnosti o  $\alpha$ .  
c) Izračunaj obujam stošca u ovisnosti o  $\alpha$ .  
d) Za koji  $\alpha$  je obujam stošca najveći?  
e) Koliki je najveći obujam?
- 3.5.** a) Zadana je funkcija  $f(x) = x^2 - x - 2$ . Za koje  $x$  vrijedi  $f(x) \leq 0$ ?  
b) Odredi prirodno područje definicije funkcije  $g(x) = \sqrt{\ln(3+x-x^2)}$ .  
c) Napiši jednađžu tangente na graf funkcije  $g$  u točki  $x_0 = 0$ .

### Zadaća 4.

- 4.1.** Točke  $A(0, -1)$ ,  $B(2, 7)$ ,  $C(-1, -2)$ ,  $D(1, 0)$  pripadaju grafu polinoma  $f$  trećeg stupnja.
- Odredi polinom  $f$  i nacrtaj graf tog polinoma.
  - Odredi jednadžbu pravca  $\langle AB \rangle$ .
  - Odredi površinu omeđenu grafom polinoma  $f$  i pravcem  $\langle AB \rangle$ .
- 4.2.** Zadana je elipsa  $9x^2 + 25y^2 = 225$ .
- Izračunaj duljinu njezine tetive  $\overline{MN}$  ako je  $M(-e, y \geq 0)$  i  $N(x \geq 0, \frac{12}{5})$ ,  $e$  je linearni ekscentricitet.
  - Odredi sjecište  $S$  tangenata te elipse povučenih u točkama  $M$  i  $N$ .
  - Pod kojim se kutom iz točke  $S$  vidi zadana elipsa?
  - Trokut, što ga tangente elipse u točkama  $M$  i  $N$  zatvaraju s  $x$  osi, rotira oko te osi. Koliki je obujam tako nastalog tijela?
- 4.3.**
- Kompleksni brojevi  $z$  i  $w$  zadovoljavaju jednadžbu  $w = \frac{z-6i}{z+8}$ . Ako je  $\operatorname{Re} w = 0$ , pokaži da kompleksni brojevi  $z$  leže na kružnici i nađi njenu jednadžbu, koordinate središta te radijus.
  - Ako je  $\operatorname{Im} w = 0$ , pokaži da kompleksni brojevi  $z$  leže na pravcu i nađi njegovu jednadžbu u segmentnom obliku.
  - Odredi površinu koju taj pravac zatvara s koordinatnim osima i kut kojeg pravac zatvara s pozitivnim smjerom osi  $x$ .
- 4.4.** Pravilni šesterokut stranice  $a$  rotira oko jedne svoje stranice. Nađi oplošje i obujam dobivenog rotacionog tijela.
- 4.5.** Zadane su funkcije  $f(x) = (\sqrt{x} + 1)^3$  i  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ .
- Odredi domenu funkcija  $f$ ,  $g$  i funkcije  $h = f \cdot g$
  - Prikaži funkciju  $h$  kao zbroj četiriju pribrojnika.
  - Primijeni rezultat zadatka b) i izračunaj  $I = \int_0^9 \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{\sqrt{x}} dx$ .
  - Odredi  $I$  koristeći supstituciju  $u = \sqrt{x} + 1$ .

### Zadaća 5.

**5.1.** a) Dokaži da za bilo koje realne brojeve  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  uvijek vrijedi relacija:

$$(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

b) Koristeći izraz pod a) ili drugačije pokaži da za kompleksne brojeve  $z$ ,  $w$  vrijedi:  $|zw|^2 = |z\bar{w}|^2 = |z|^2|w|^2$ , gdje je  $\bar{w}$  konjugirano kompleksni broj broja  $w$ .

c) Pokaži da svi kompleksni brojevi  $z$  koji zadovoljavaju jednadžbu  $|z + 1| = |z - 2i|$ ,  $z \in \mathbb{C}$  leže na pravcu u kompleksnoj ravnini; nađi jednadžbu tog pravca i nacrtaj ga.

**5.2.** Rješenja jednadžbe

$$\frac{1}{2} \log 2 + \log \sqrt{x^2 + 4x + 5} = \frac{1}{2} [\log(x^2 - 4x + 5) + \log 10]$$

su deseti i jedanaesti član rastućeg aritmetičkog niza.

a) Odredi te članove, te prvi član i razliku danog niza.

b) Koliko članova niza treba zbrojiti da se dobije 264?

c) Odredi domenu funkcije  $f(x) = \log(x^2 - 4x + 5)$ .

d) Zapiši funkciju pod c) pomoću logaritma u bazi  $e$ .

e) Pokaži da funkcija pod c) ima ekstremnih vrijednosti i nađi ih.

**5.3.** Kvadrat stranice  $a$  rotira oko pravca koji prolazi jednim vrhom tog kvadrata okomito na dijagonalu koja prolazi istim vrhom. Odredi obujam i oplošje nastalog rotacionog tijela.

**5.4.** Zadana je funkcija:  $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$ .

a) Napiši  $f(x)$  u obliku  $f(x) = r \sin(x - \varphi)$ .

b) Odredi amplitudu i period funkcije  $f$ .

c) Skiciraj graf te funkcije na intervalu  $[-\pi, 2\pi]$ .

d) Nađi sva rješenja jednadžbe  $f(x) = 1$  na tom intervalu.

**5.5.** a) U pravokutnom koordinatnom sustavu skiciraj dio ravnine određene nejednadžbama:

$$\begin{aligned} x - y + 2 &> 0 \\ x + 2y - 10 &\leq 0 \\ x + 5y - 10 &\geq 0. \end{aligned}$$

Odredi vrhove nastalog ravninskog lika.

b) Odredi obujam tijela koje nastaje rotacijom tog lika oko osi  $x$  i rezultat zaokruži na najbliži cijeli broj.

c) Odredi jednadžbu kružnice na kojoj leže vrhovi dobivenog lika te odredi njeno središte i radijus.