1.

Skup realnih brojeva

1.1. Skup prirodnih i cijelih brojeva

U osnovnoj školi susreli smo se s raznim skupovima brojeva. Ovdje ćemo ponoviti što znamo o tim brojevima i naučiti neke nove činjenice o skupovima brojeva.

Skup prirodnih brojeva označavamo s $\mathbf{N}$ i zapisujemo

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Prirodne brojeve možemo zbrajati i množiti i rezultat tih operacija je uvijek prirodni broj. Razlika prirodnih brojeva ne mora uvijek biti prirodan broj. Naime, ako je umanjenik manji od umanjitelja, primjerice $3 - 7$, tada to oduzimanje nije izvedivo u skupu prirodnih brojeva. Stoga skup $\mathbf{N}$ proširujemo do skupa cijelih brojeva u kojem je i operacija oduzimanja uvijek izvediva. Skup cijelih brojeva označavamo sa $\mathbf{Z}$ i vrijedi

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

U skupu $\mathbf{Z}$ operacija zbrajanja je asocijativna, komutativna, zbroj svakog cijelog broja s 0 je taj isti broj. Također, za svaki cijeli broj n postoji njemu suprotan broj $-n$ i zbroj dva međusobno suprotna broja je 0. Operacija množenja je asocijativna i komutativna i produkt svakog cijelog broja s 1 je taj isti broj. Također, vrijedi i distributivnost množenja prema zbrajanju, tj. za sve cijele brojeve a, b, c vrijedi

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Ukoliko se u brojevnom izrazu (bez zagrada) pojavljuje više operacija, prvo se izvodi operacija množenja (i dijeljenja), a tek onda operacija zbrajanja (i oduzimanja).

Primjer 1. Izračunajmo:

$$7 + 3 \cdot (2 - (2 \cdot (-14) - 3 \cdot (-18 - 4)) \cdot 2 - 5) + 100.$$

$\triangleright$ Sredimo prvo unutarnje zagrade.

$$\begin{aligned}
&7 + 3 \cdot (2 - (2 \cdot (-14) - 3 \cdot (-18 - 4)) \cdot 2 - 5) + 100 \\
&\quad = 7 + 3(2 - (-28 - 3 \cdot (-22)) \cdot 2 - 5) + 100 \\
&\quad = 7 + 3(2 - (-28 + 66) \cdot 2 - 5) + 100 \\
&\quad = 7 + 3(2 - 38 \cdot 2 - 5) + 100 = 7 + 3(2 - 76 - 5) + 100 \\
&\quad = 7 + 3 \cdot (-79) + 100 = 7 - 237 + 100 \\
&\quad = -130. \ \triangleleft
\end{aligned}$$

Zadaci 1.1

1. Izračunaj:
a) $14 + (-22) + 28$; **b)** $-32 + (-10) - 21$;
c) $13 - (-14) - 1$; **d)** $39 + (-24) - 10$;
e) $-28 + (-50) + (-75)$; **f)** $-20 - 33 - 44$.

2. Izračunaj:
a) $(-5) \cdot (14 + (-17))$; **b)** $2 \cdot (-14 + 14)$;
c) $(-12 + (-20)) \cdot 7$; **d)** $(-11 - 22) \cdot (-22 + 33)$;
e) $(-12 + 40) \cdot (-3 - 2)$; **f)** $(-125 + 5 \cdot 15) \cdot (14 - 7 \cdot 2)$.

3. Izračunaj:
a) $441 : (-9) + 9$; **b)** $-256 : 32 - 32 \cdot (-2)$;
c) $48 - 48 : (-8)$; **d)** $(48 - 48) : (-8)$;
e) $165 - 165 : 11 - 1$; **f)** $1001 : (169 : 13)$.

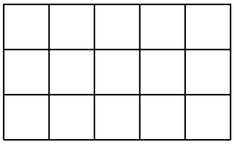
4. Izračunaj primjenjujući svojstva množenja:
a) $11 \cdot 2 \cdot 5$; **b)** $37 \cdot 15 \cdot 2$;
c) $4 \cdot 327 \cdot 25$; **d)** $25 \cdot 11 \cdot 4 \cdot 3$;
e) $8 \cdot 7 \cdot 75 \cdot 10$; **f)** $125 \cdot 13 \cdot 4 \cdot 26$.

5. Koristeći svojstva zbrajanja i množenja, izračunaj na najbrži mogući način:
a) $123 + 327 + 428 + 122$; **b)** $1008 + 289 + 111 + 992$;
c) $3 \cdot 17 + 14 \cdot 17 - 15 \cdot 17$; **d)** $34 \cdot 21 - 20 \cdot 21 + 21 \cdot 86$.

6. Izračunaj:
a) $(3 \cdot 18 + 6) \cdot (25 \cdot 4 - 60)$; **b)** $2 \cdot (12 - 12 \cdot (11 \cdot 7 - 18 \cdot 2))$;
c) $14 \cdot (18 + 2 \cdot (14 \cdot 2 - (-10) \cdot 3))$;
d) $2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 - (-10)) + 10) - 100) + 100$.

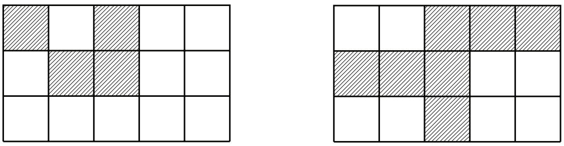
1.2. Skup racionalnih brojeva

Uz proučavanje prirodnih i cijelih brojeva, vrlo rano se susrećemo s problemom dijeljenja neke cjeline na jednake dijelove.



Sl. 1.1.

Tako je, primjerice, pravokutnik na slici 1.1. podijeljen na 15 jednakih dijelova koje nazivamo petnaestine i označavamo s $\frac{1}{15}$.



Sl. 1.2.

Na slici 1.2 iscrtani su dijelovi pravokutnika jednaki $\frac{4}{15}$, odnosno $\frac{7}{15}$ pravokutnika. Vidimo, dakle, kako se prirodno pojavljuje još jedna vrsta brojeva koje nazivamo razlomci ili racionalni brojevi.

Općenito, svaki broj oblika $\frac{a}{b}$ gdje su a i b cijeli brojevi, $b \neq 0$, naziva se racionalni broj, a skup svih takvih brojeva označavamo s $\mathbf{Q}$.

Skup racionalnih brojeva

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbf{Z},\ b \neq 0 \right\}.$$

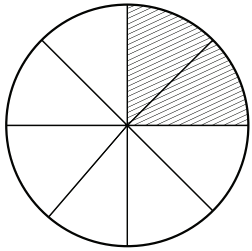
Uočimo da je svaki cijeli broj ujedno i razlomak, jer cijeli broj a možemo zapisati ovako:

$$a = \frac{a}{1}.$$

1.3. Jednakost racionalnih brojeva

Primjer 1. Uočimo iscrtani dio kruga na slici 1.3. Možemo ga zapisati na dva načina: kao $\frac{1}{4}$, ali i kao $\frac{2}{8}$. Dakle, $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$.

Zamijetimo da je produkt brojnika prvog razlomka i nazivnika drugog jednak produktu nazivnika prvog i brojnika drugog razlomka. Ovo svojstvo je karakteristično te nam služi za definiciju jednakosti razlomaka.



Sl. 1.3.

Jednakost racionalnih brojeva

Dva racionalna broja $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ su **jednaka** ako je

$$ad = bc.$$

Primjer 2. Dokažimo da je za svaki $x \neq 0$, $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot x}{b \cdot x}$.

▷ Unakrsnim množenjem dobivamo $a \cdot (b \cdot x) = b \cdot (a \cdot x)$ što je istinito budući da je množenje cijelih brojeva asocijativno i komutativno.

Kažemo da smo razlomak $\frac{ax}{bx}$ dobili **proširivanjem** razlomka $\frac{a}{b}$ brojem x. I obratno, razlomak $\frac{a}{b}$ dobili smo **skraćivanjem** razlomka $\frac{ax}{bx}$ brojem x. ◁

Primjer 3. Skratimo razlomak $\frac{126}{108}$.

▷ Razlomak postepeno skraćujemo brojevima 2 i 9:

$$\frac{126}{108} = \frac{2 \cdot 63}{2 \cdot 54} = \frac{63}{54} = \frac{9 \cdot 7}{9 \cdot 6} = \frac{7}{6}. \quad \triangleleft$$

Primjer 4. Pokažimo da je $\frac{-3}{4} = \frac{3}{-4}$.

▷ Proširimo li razlomak $\frac{-3}{4}$ s -1, dobit ćemo upravo razlomak $\frac{3}{-4}$. ◁

Zadaci 1.3

1. Napiši brojnik, odnosno nazivnik razlomka tako da dobiveni razlomci budu jednaki:

a) $\frac{3}{5} = \frac{}{15}$; **b)** $\frac{8}{-3} = \frac{}{-21}$; **c)** $\frac{3}{20} = \frac{}{20a}$;

d) $\frac{4}{7} = \frac{20}{}$; **e)** $\frac{-8}{18} = \frac{-64}{}$; **f)** $\frac{5}{7} = \frac{15x}{}$.

2. Skrati razlomke:

a) $\frac{18}{12}$; **b)** $\frac{321}{216}$; **c)** $\frac{-1001}{39}$;

d) $\frac{141414}{-196}$; **e)** $\frac{25a}{140a}$; **f)** $\frac{36ab}{28abc}$.

3. Jesu li jednaki razlomci:

a) $\frac{9}{10}$ i $\frac{8}{9}$; **b)** $\frac{11}{44}$ i $\frac{3}{12}$; **c)** $\frac{1997}{1998}$ i $\frac{1998}{1999}$;

d) $\frac{-333}{7}$ i $\frac{666}{-14}$?

4. Dane razlomke svedi na najmanji zajednički nazivnik:

a) $\frac{1}{3}$ i $\frac{3}{4}$; **b)** $\frac{8}{5}$ i $\frac{21}{10}$; **c)** $\frac{3}{8}$ i $\frac{7}{6}$;

d) $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{4}$ i $\frac{3}{2}$; **e)** $\frac{18}{11}$, $\frac{3}{22}$ i 3; **f)** $\frac{1}{12}$, $\frac{5}{18}$ i $\frac{13}{8}$.

1.4. Zbrajanje racionalnih brojeva

Primjer 1. Izračunajmo:

a) $\frac{3}{5} + \frac{8}{5}$; **b)** $\frac{5}{4} + \frac{1}{3}$.

▷ **a)** $\frac{3}{5}$ i $\frac{8}{5}$ su razlomci s jednakim nazivnicima i oni se zbrajaju tako da se brojnici zbroje, a nazivnik prepiše, tj. $\frac{3}{5} + \frac{8}{5} = \frac{11}{5}$.

b) $\frac{5}{4}$ i $\frac{1}{3}$ nemaju jednake nazivnike pa ih prvo proširimo tako da su im nazivnici jednaki, tj. $\frac{5}{4} = \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{15}{12}$, $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{4}{12}$, pa je $\frac{5}{4} + \frac{1}{3} = \frac{15}{12} + \frac{4}{12} = \frac{17}{12}$. ◁

Dakle, ako su $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ dva racionalna broja, pri zbrajanju prvo ih svodimo na zajednički nazivnik, tj. na nazivnik koji je višekratnik nazivnika i jednog i drugog razlomka. Na primjer, za zajednički nazivnik možemo uzeti broj $b \cdot d$. Tada je $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ i $\frac{c}{d} = \frac{cb}{bd}$, te je konačno $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$.

Zbrajanje racionalnih brojeva

Ako su $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ racionalni brojevi, tada je

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

Uočimo da je bd samo jedan od beskonačno mnogo zajedničkih nazivnika brojeva $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$. Uobičajeno je pri zbrajanju tražiti najmanji zajednički nazivnik, tj. najmanji zajednički višekratnik nazivnika.

Tako na primjer, zbroj $\frac{1}{120}+\frac{7}{180}$ možemo računati prema gore navedenoj formuli:

$$\frac{1}{120}+\frac{7}{180}=\frac{1\cdot 180+7\cdot 120}{120\cdot 180}=\frac{180+840}{21\,600}=\frac{1020}{21\,600}=\frac{17}{360},$$

ali da smo odabrali najmanji zajednički nazivnik (a to je 360), račun bi bio nešto jednostavniji:

$$\frac{1}{120}+\frac{7}{180}=\frac{3}{360}+\frac{14}{360}=\frac{17}{360}.$$

Promotrimo bilo koji razlomak $r=\frac{a}{b}$. Tada za racionalan broj $r'=\frac{-a}{b}$ vrijedi

$$\frac{a}{b}+\frac{-a}{b}=\frac{a+(-a)}{b}=\frac{0}{b}=0,$$

tj. $r+r'=0$. Broj r' nazivamo **suprotan broj** broja r i označavamo s $-r$.

Primjer 2. Odredimo suprotne brojeve od $\frac{14}{3}$, $\frac{-2}{17}$.

$\triangleright$ $-\frac{14}{3}=\frac{-14}{3}$, $-\left(\frac{-2}{17}\right)=\frac{2}{17}$. $\triangleleft$

Uz ovo svojstvo da za svaki racionalni broj postoji njemu suprotan broj, zbrajanje ima još neka istaknuta svojstva:

1. Zbrajanje je asocijativno, tj. za bilo koja tri racionalna broja r_1, r_2 i r_3 vrijedi

$$(r_1+r_2)+r_3=r_1+(r_2+r_3).$$

2. Zbrajanje je komutativno, tj.

$$r_1+r_2=r_2+r_1 \quad \text{za svaki} \quad r_1,\ r_2\in\mathbf{Q}.$$

3. Za svaki $r\in\mathbf{Q}$ vrijedi

$$r+0=r.$$

Primjer 3. Koristeći svojstva zbrajanja izračunajmo dane izraze:

a) $\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{3}\right)$; **b)** $\left(\frac{8}{5}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}$.

▷ **a)** $\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}+\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)=\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{-2+1}{6}=\frac{-1}{6}=-\frac{1}{6}$, pri čemu smo koristili komutativnost unutar zagrade, pa asocijativnost, te konačno definiciju zbrajanja.

b) $\left(\frac{8}{5}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}=\frac{8}{5}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{8}{5}+0=\frac{8}{5}$, pri čemu smo koristili asocijativnost, zbrajanje suprotnih brojeva, te zbrajanje s nulom. ◁

Primijetimo da ne spominjemo oduzimanje kao posebnu operaciju. Naime, razlika r_1-r_2 se poistovjećuje sa zbrojem $r_1+(-r_2)$, tj. oduzimanje se svodi na zbrajanje.

Zadaci 1.4

1. Zbroji:

a) $\frac{4}{11}+\frac{8}{11}$; **b)** $\frac{14}{19}+\frac{18}{19}$; **c)** $\frac{21}{5}+\frac{13}{5}+\frac{12}{5}$;

d) $\frac{22}{7}-\frac{11}{7}+\frac{2}{7}$.

2. Izračunaj:

a) $1+\frac{7}{8}$; **b)** $2-\frac{1}{4}$; **c)** $1+\frac{14}{19}$;

d) $3+\frac{1}{2}$; **e)** $2+\frac{3}{4}$; **f)** $5-\frac{11}{3}$.

3. Izračunaj:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$; **b)** $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$; **c)** $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$;

d) $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}$; **e)** $\frac{11}{3}-\frac{3}{2}$; **f)** $\frac{22}{5}-\frac{17}{3}$.

4. Izračunaj:

a) $\left(\frac{3}{8}-\frac{5}{4}\right)-\left(\frac{3}{16}-\frac{1}{8}\right)$; **b)** $\left(\frac{5}{7}+\frac{1}{4}-\frac{1}{21}\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{7}\right)$;

c) $-\left(\frac{5}{2}-1\right)+\left(\frac{15}{4}-1\right)-\left(\frac{25}{9}-2\right)$.

1.5. Množenje racionalnih brojeva

Umnožak dva racionalna broja je racionalni broj čiji je brojnik jednak umnošku brojnika faktora, a nazivnik je jednak umnošku nazivnika faktora. Ili ako zapišemo pomoću općih brojeva, imamo sljedeću formulu.

Množenje racionalnih brojeva

Ako su $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ racionalni brojevi, tada je

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Ako je $\frac{a}{b}$ razlomak različit od 0, tada je očito da za broj $\frac{b}{a}$ vrijedi

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

Broj $\frac{b}{a}$ naziva se recipročan broj broja $\frac{a}{b}$ i označava s $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$.

Primjer 1. Napišimo recipročne brojeve brojeva $\frac{3}{4}$, $\frac{-5}{8}$, 10, -1, $-\frac{4}{15}$.

▷ $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{3}$, $\left(\frac{-5}{8}\right)^{-1} = \frac{8}{-5} = -\frac{8}{5}$, $(10)^{-1} = \left(\frac{10}{1}\right)^{-1} = \frac{1}{10}$, $(-1)^{-1} = -1$, $\left(-\frac{4}{15}\right)^{-1} = -\frac{15}{4}$. ◁

Dijeljenje racionalnih brojeva definiramo pomoću recipročnih brojeva ovako: razlomak $\frac{a}{b}$ se dijeli s razlomkom $\frac{c}{d}$ tako da se $\frac{a}{b}$ pomnoži s recipročnim brojem od $\frac{c}{d}$, tj. imamo sljedeću formulu.

Dijeljenje racionalnih brojeva

Za svaka dva racionalna broja $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$, $\frac{c}{d} \neq 0$, vrijedi

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Navedimo i svojstva množenja. Već smo spomenuli da za svaki racionalni broj različit od nule postoji recipročan broj.

Također, istaknimo da za svaki racionalni broj r vrijedi

$$r \cdot 1 = r.$$

Nadalje, množenje je asocijativno, tj.

$$r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3) = (r_1 \cdot r_2) \cdot r_3, \quad \text{za sve } r_1,\ r_2,\ r_3 \in \mathbf{Q};$$

komutativno, tj.

$$r_1 \cdot r_2 = r_2 \cdot r_1, \quad \text{za sve } r_1,\ r_2 \in \mathbf{Q}$$

i distributivno prema zbrajanju, tj.

$$r_1 \cdot (r_2 + r_3) = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3, \quad \text{za sve } r_1,\ r_2,\ r_3 \in \mathbf{Q}.$$

Množenje je operacija višeg stupnja od zbrajanja. Drugim riječima, ukoliko se u izrazu bez zagrada pojave zbrajanje i množenje, prvo će se izvršiti množenje, a zatim zbrajanje.

Primjer 2. Izračunajmo:

a) $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{6}$; **b)** $\dfrac{\frac{11}{15}\cdot\left(3-\frac{7}{4}\right)}{\frac{5}{4}-1:\frac{3}{2}}-\frac{1}{7}:\frac{1}{2}$.

▷ **a)** Ovo je izraz bez zagrada i prvo se vrši množenje, pa tek zatim zbrajanje. $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{6}=\frac{3}{5}+\frac{2\cdot 7}{5\cdot 6}=\frac{3}{5}+\frac{7}{15}=\frac{9+7}{15}=\frac{16}{15}$.

b) U ovom izrazu se pojavljuje zagrada koja se prva izračunava, a zatim se vrši množenje (i dijeljenje), te na kraju zbrajanje (i oduzimanje).

$$\dfrac{\frac{11}{15}\cdot\left(3-\frac{7}{4}\right)}{\frac{5}{4}-1:\frac{3}{2}}-\frac{1}{7}:\frac{1}{2}=\dfrac{\frac{11}{15}\cdot\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}-1\cdot\frac{2}{3}}-\frac{1}{7}\cdot 2=\dfrac{\frac{11}{12}}{\frac{5}{4}-\frac{2}{3}}-\frac{2}{7}$$
$$=\dfrac{\frac{11}{12}}{\frac{7}{12}}-\frac{2}{7}=\frac{11\cdot 12}{12\cdot 7}-\frac{2}{7}=\frac{11}{7}-\frac{2}{7}=\frac{9}{7}.$$

Primijetimo da se u računu pojavio dvojni razlomak $\dfrac{\frac{11}{12}}{\frac{7}{12}}$ koji smo izračunali koristeći definiciju dijeljenja i množenja. Naime, vrijedi

$$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}. \quad \triangleleft$$

Uvedimo oznaku i za produkt nekoliko istih faktora. Ako je $r\in\mathbf{Q}$, $n\in\mathbf{N}$, tada ćemo s r^n označavati produkt $\underbrace{r\cdot r\cdot\ldots\cdot r}_{n \text{ puta}}$. Dogovorno se uzima da je $r^0=1$. Izraz r^n se naziva n-ta potencija broja r i potencije su predmet detaljnog proučavanja u 5. poglavlju.

Zadaci 1.5

1. Pomnoži:

a) $\frac{22}{35}\cdot\frac{49}{33}$; **b)** $\frac{225}{18}\cdot\frac{27}{144}$; **c)** $\frac{1800}{128}\cdot\frac{144}{810}$.

2. Pomnoži:

a) $\left(-\frac{25}{7}\right)\cdot\frac{11}{125}$; **b)** $\left(-\frac{30}{11}\right)\cdot\left(-\frac{44}{45}\right)$; **c)** $\frac{121}{144}\cdot\left(-\frac{60}{77}\right)$.

3. Podijeli:

a) $1 : \frac{2}{3}$; **b)** $-3 : \frac{4}{7}$; **c)** $\frac{12}{7} : \frac{36}{28}$;

d) $\left(-\frac{11}{3}\right) : \frac{22}{21}$; **e)** $\left(-1\frac{1}{3}\right) : 4$; **f)** $\left(-2\frac{1}{5}\right) : \left(-\frac{33}{7}\right)$.

4. Izračunaj:

a) $2 \cdot \left(\frac{2}{7} - 1\right) - 3\left(\frac{4}{3} + 1\right)$; **b)** $3 \cdot \left(\frac{3}{4} + 2\right) + 2\left(-\frac{1}{2} - 1\right)$;

c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(3 - \frac{1}{2}\right)$; **d)** $\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \left(2 + \frac{1}{2}\right)$.

5. Izračunaj:

a) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \cdot 24$; **b)** $\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3} + \frac{4}{5}\right) : \frac{3}{25}$;

c) $1 - 1 : 7 + \frac{3}{7} - \frac{14}{3} \cdot \frac{16}{49}$; **d)** $\left(1 - \frac{14}{5} \cdot \frac{25}{21}\right) \cdot 3 - 2 \cdot \frac{1}{2}$;

e) $\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{9}\right)\right) \cdot \frac{27}{2}$; **f)** $\left(\frac{7}{2} + \frac{1}{3}\right) : \frac{35}{42} + \frac{7}{42}$;

g) $\left(\frac{4}{9} - \frac{5}{4}\right) : \left(\frac{3}{16} + \frac{1}{8}\right)$.

6. Izračunaj:

a) $\dfrac{\frac{11}{3} - \frac{1}{3}}{\frac{25}{2} - \frac{7}{2}}$; **b)** $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{23}{6} - \frac{1}{2}}$; **c)** $\dfrac{\frac{13}{2} - \frac{8}{3}}{\frac{13}{2} + \frac{8}{3}} : \frac{46}{25}$; **d)** $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}} : \frac{39}{28}$.

7. Izračunaj:

a) $\dfrac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} : \dfrac{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{5}} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right)$; **b)** $\dfrac{\frac{13}{21} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{7}\right) : \frac{18}{13} - 0.15}{\left(\frac{1}{3} + 0.5\right) : \frac{5}{2} + 0.2}$;

c) $\dfrac{3 - \frac{15}{22} \cdot \left(2 + \frac{1}{5}\right)}{\left(\frac{5}{6} + \frac{7}{10} - \frac{11}{15}\right) \cdot 1.875 + \frac{1}{4}}$; **d)** $1 - \dfrac{1 + \frac{1}{1+2}}{2 + \frac{1}{1+3}} + \dfrac{2 + \frac{1}{3+4}}{3 + \frac{1}{3+6}}$;

e) $\dfrac{\left(1.87 - 1\frac{3}{25}\right) \cdot 1.2 + 1.25 + 1\frac{7}{18}}{1.4 : 0.01 - 50}$;

f) $\dfrac{7.5 - 0.028}{\frac{3}{4} - 0.36 : 0.6} - \left(\frac{1}{15} + \frac{3}{8} + 0.725\right) : 1\frac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{4.5 - 3\frac{4}{7}} \cdot \frac{65}{28}$;

g) $\left(\left(1 + \dfrac{1}{9 + \dfrac{1}{9 + \frac{1}{5}}}\right) : \dfrac{465}{419}\right) - \dfrac{1}{1995}$.

1.6. Uređaj u skupu $\mathbf{Q}$

Uočimo da svaki racionalni broj možemo zapisati tako da mu je nazivnik pozitivan. Naime, ako je razlomak oblika $\frac{a}{-b}$, $a \in \mathbf{Z}$, $b > 0$, tada proširivanjem s (-1) dobivamo razlomak $\frac{-a}{b}$ kojemu je nazivnik pozitivni broj. Zato možemo pisati da je

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbf{Z},\ b \in \mathbf{N} \right\}.$$

Dva racionalna broja obično uspoređujemo ako su dani u obliku gdje je nazivnik pozitivni broj.

Uređaj na $\mathbf{Q}$

Neka su $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d} \in \mathbf{Q}$, b, $d > 0$. Kažemo da je $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ako je $ad < bc$.

Primjer 1. Usporedimo brojeve

a) $\frac{3}{4}$ i $\frac{-5}{-6}$; **b)** $\frac{10}{-13}$ i $\frac{-11}{14}$.

▷ **a)** Prvo $\frac{-5}{-6}$ proširivanjem s -1 svedimo na razlomak s pozitivnim nazivnikom: $\frac{-5}{-6} = \frac{5}{6}$. Sada uspoređujemo $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{6}$. Kako je $3 \cdot 6 = 18 < 4 \cdot 5 = 20$, slijedi da je $\frac{3}{4} < \frac{5}{6}$.

b) Kako je $\frac{10}{-13} = \frac{-10}{13}$ i $(-10) \cdot 14 = -140 > 13 \cdot (-11) = -143$, slijedi da je $\frac{-10}{13} > \frac{-11}{14}$. ◁

Racionalne brojeve koje možemo svesti na oblik u kojem su i brojnik i nazivnik pozitivni brojevi zovemo **pozitivni racionalni brojevi**, a racionalni brojevi koji u zapisu s pozitivnim nazivnikom imaju negativni brojnik nazivamo **negativni racionalni brojevi**.

Primjer 2. Dokažimo da je aritmetička sredina $\frac{r_1 + r_2}{2}$ racionalnih brojeva r_1 i r_2 opet racionalni broj koji se nalazi između tih brojeva.

▷ Neka su $r_1 = \frac{a}{b}$ i $r_2 = \frac{c}{d}$, a, $c \in \mathbf{Z}$, b, $d \in \mathbf{N}$. Tada je $\frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{ad + bc}{2bd}$ što je očito opet racionalni broj.

Ako je $r_1 \leqslant r_2$, tj. $ad \leqslant bc$, dokažimo da vrijedi

$$r_1 \leqslant \frac{r_1 + r_2}{2} \leqslant r_2.$$

Prema definiciji uspoređivanja brojeva $r_1 = \frac{a}{b}$ i $\frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{ad + bc}{2bd}$ treba provjeriti vrijedi li $a \cdot 2bd \leqslant b \cdot (ad + bc)$. Ovo je ekvivalentno s $2ad \leqslant ad + bc$ (podijelili smo s $b > 0$), tj. $ad \leqslant bc$. Zadnja nejednakost je istinita prema pretpostavci, pa je istinita i početna, tj. $r_1 \leqslant \frac{r_1 + r_2}{2}$. Analogno se dokazuje i druga nejednakost. ◁

Ovim primjerom smo dokazali jedno vrlo važno svojstvo skupa $\mathbf{Q}$, koje glasi:

Gustoća skupa Q

Skup $\mathbf{Q}$ je **gust**, tj. između svaka dva racionalna broja postoji racionalni broj.

Primijetimo da ni skup $\mathbf{N}$ ni skup $\mathbf{Z}$ nisu imali ovo svojstvo, jer, na primjer, između dva cijela broja -2 i -1 ne postoji nijedan cijeli broj.

Zadaci 1.6

1. Usporedi brojeve:

a) $-\frac{3}{5}$ i $\frac{8}{15}$; **b)** $\frac{21}{43}$ i $\frac{22}{41}$; **c)** $\frac{-31}{20}$ i $\frac{30}{-29}$.

2. Poredaj po veličini brojeve od najmanjeg do najvećeg:

a) $\frac{3}{7}, \frac{12}{7}, \frac{-4}{7}, \frac{18}{7}, \frac{25}{7}, 0$; **b)** $-\frac{23}{11}, -\frac{111}{11}, \frac{-43}{11}, -1, -9$;

c) $\frac{8}{3}, \frac{11}{6}, \frac{7}{6}, \frac{3}{2}$; **d)** $\frac{49}{111}, \frac{1}{3}, \frac{21}{37}, \frac{152}{333}$.

3. Napiši jedan racionalni broj koji se nalazi između racionalnih brojeva:

a) 5 i 19; **b)** $\frac{17}{8}$ i $\frac{21}{8}$; **c)** $\frac{19}{15}$ i $\frac{4}{3}$;

d) $-\frac{12}{7}$ i -1; **e)** $-\frac{11}{9}$ i $-\frac{7}{9}$; **f)** $-\frac{17}{21}$ i $-\frac{1}{3}$.

4. Napiši dva racionalna broja koji se nalaze između racionalnih brojeva:

a) 3 i 4; **b)** $\frac{1}{2}$ i 1; **c)** $\frac{5}{3}$ i $\frac{7}{3}$;

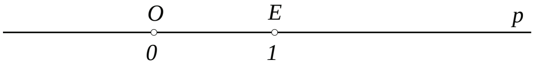
d) $\frac{8}{7}$ i $\frac{6}{5}$; **e)** -10 i -9; **f)** $-\frac{11}{3}$ i $-\frac{11}{5}$.

5. Dokaži ako je $r_1 > r_2$, r_1, $r_2 \in \mathbf{Q}$, da je tada $r_1 + r > r_2 + r$ za svaki $r \in \mathbf{Q}$.

6. Dokaži ako je $r_1 > r_2$, r_1, $r_2 \in \mathbf{Q}$, da je tada $r_1 \cdot r > r_2 \cdot r$ za svaki $r > 0$, $r \in \mathbf{Q}$.

1.7. Smještanje racionalnih brojeva na pravac

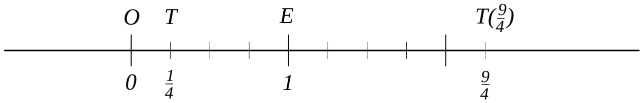
Neka je dan pravac p i njegove dvije različite točke O i E. Točku O zovemo ishodištem i pridružujemo je broju 0, a točku E, koja je obično desno od točke O, zovemo jedinična točka i pridružujemo je broju 1.



Sl. 1.4. Točku O zovemo ishodište, a E jedinična točka. Dužinu $\overline{OE}$ nazivamo jedinična dužina.

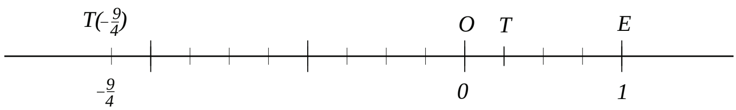
Kažemo da smo na pravcu p zadali koordinatni sustav $(O,\overline{OE})$. Svakom racionalnom broju r pridružena je jedna točka pravca p. S ovim pridruživanjem susreli smo se već u osnovnoj školi, a ovdje ćemo ponoviti taj postupak.

1. Ako je $r=\dfrac{a}{b}$ pozitivan racionalan broj ($a,\ b\in\mathbf{N}$), tada dužinu $\overline{OE}$ podijelimo na b jednakih dijelova. Dužinu $\dfrac{1}{b}\overline{OE}$ nanesimo a puta počevši od točke O udesno. Dobivena točka je točka koju pridružujemo broju $\dfrac{a}{b}$ i označavamo s $T\left(\dfrac{a}{b}\right)$.



Sl. 1.5. Broju $\dfrac{9}{4}$ pridružujemo točku $T\left(\dfrac{9}{4}\right)$ tako da $\overline{OE}$ podijelimo na 4 jednaka dijela, te dužinu $\overline{OT}=\dfrac{1}{4}\overline{OE}$ nanesemo 9 puta udesno od O. Točku $T\left(\dfrac{9}{4}\right)$ možemo naći i ovako: budući da je $\dfrac{9}{4}=2\dfrac{1}{4}$, nakon točke pridružene broju 2 nanesemo dužinu $\overline{OT}=\dfrac{1}{4}\overline{OE}$.

2. Ako je $r=\dfrac{a}{b}<0$, tj. $a<0,\ b>0$, tada opet dužinu $\overline{OE}$ podijelimo na b jednakih dijelova, te dužinu $\dfrac{1}{b}\overline{OE}$ nanesemo $|a|$ puta ulijevo od točke O. Dobivenu točku pridružujemo broju $\dfrac{a}{b}$ i označavamo s $T\left(\dfrac{a}{b}\right)$.



Sl. 1.6. Točku $T\left(-\dfrac{9}{4}\right)$ nalazimo tako da $\overline{OE}$ podijelimo na 4 jednaka dijela, te dužinu $\overline{OT}=\dfrac{1}{4}\overline{OE}$ nanesemo 9 puta ulijevo od O.

Naravno, ukoliko je r cijeli broj, ovaj postupak se pojednostavljuje, jer nije potrebno jediničnu dužinu $\overline{OE}$ dijeliti na dijelove, nego je nanosimo udesno ili ulijevo, ovisno o tome je li r pozitivan ili negativan broj.

Zadaci 1.7

1. Nacrtaj brojevni pravac s jediničnom dužinom $\overline{OE}$, $|OE| = 8$ mm. Odredi točke koje su pridružene brojevima:

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ -3,\ -5,\ -7.$$

2. Nacrtaj brojevni pravac s jediničnom dužinom $\overline{OE}$, $|OE| = 4$ cm i odredi točke pridružene brojevima:

$$\frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{2},\ -\frac{3}{2},\ -\frac{3}{4},\ -\frac{7}{4}.$$

3. Nacrtaj brojevni pravac s jediničnom dužinom $\overline{OE}$, $|OE| = 5$ cm. Odredi točke koje su pridružene brojevima:

$$\frac{1}{5},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{4}{3},\ \frac{5}{3}.$$

4. Nacrtaj brojevni pravac s jediničnom dužinom $\overline{OE}$, $|OE| = 4$ cm. Odredi točke koje su pridružene brojevima:

$$\frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{7}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{5}{3}.$$

5. Na brojevnom pravcu označena je točka O i točka $T(4)$. Nađi jediničnu točku E.

6. Na brojevnom pravcu označena je točka O i točka $T\left(\frac{1}{2}\right)$. Nađi jediničnu točku E.

7. Na brojevnom pravcu označena je točka O i točka $T\left(-\frac{4}{3}\right)$. Nađi jediničnu točku E.

8. Na brojevnom pravcu označene su točke $T(-2)$ i $T(4)$. Nađi ishodište O i jediničnu točku E.

9. Na brojevnom pravcu označene su točke $T\left(\frac{3}{2}\right)$ i $T\left(\frac{1}{3}\right)$. Nađi ishodište O i jediničnu točku E.

1.8. Skup realnih brojeva

U sljedećem primjeru pokazat ćemo da postoje brojevi koji nisu racionalni, tj. koji nisu prikazivi u obliku $\frac{a}{b}$, a, $b \in \mathbf{Z}$, $b \neq 0$.

Primjer 1. Promotrimo pravokutni trokut s katetama duljine 1. Prema Pitagorinom poučku za duljinu c hipotenuze tog trokuta vrijedi

$$c^2 = 1^2 + 1^2, \qquad c^2 = 2.$$

Broj za koji vrijedi da kvadriran daje 2 označavamo s $\sqrt{2}$. Očito je da $\sqrt{2}$ postoji, jer je to duljina hipotenuze promatranog pravokutnog trokuta. Pokazat ćemo da $\sqrt{2}$ nije racionalni broj.