I.

Skup realnih brojeva

1. Skup racionalnih brojeva

Prirodni brojevi

Prisjetimo se nekih pojmova i činjenica o prirodnim brojevima koje smo naučili u osnovnoj školi. Prirodni su brojevi 1, 2, 3, 4, 5, ... a skup svih prirodnih brojeva označavamo slovom **N** (prema lat. *naturalis* — prirodan) i zapisujemo ovako:

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n, n+1, \ldots\}.$$

Za prirodne brojeve kažemo da su elementi skupa **N**. Činjenicu da je broj n element skupa **N** kraće pišemo $n \in \mathbf{N}$.

U zapisu smo skupa **N** naveli prirodne brojeve od manjeg prema većem, što možemo zato jer je skup prirodnih brojeva uređen po veličini, pa za svaka dva različita prirodna broja možemo reći koji je od njih manji a koji veći. Najmanji prirodni broj je broj 1. Postoji li i najveći prirodni broj? Prisjetimo se da je zbroj svaka dva prirodna broja prirodni broj koji je veći od svakog pribrojnika. Zato je od bilo kojeg prirodnog broja n broj $n+1$ veći pa ne postoji najveći prirodni broj. Kako ne postoji najveći prirodni broj, očito je da prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo. Unatoč tome za zapisivanje prirodnih brojeva u pozicijskom dekadskom sustavu dovoljno nam je samo deset znakova (to su znakovi: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 i 0) koje nazivamo znamenkama. Tako je na primjer 2 504 zapis broja dvije tisuće petsto i četiri, a istim tim znamenkama zapisujemo četveroznamenkasti broj 5 240, tj. broj pet tisuća dvjesto i četrdeset. Tako nam u broju 2 504 znamenka 4 ukazuje da taj broj ima četiri jedinice, a u broju 5 240 nam ta ista znamenka ukazuje da taj broj ima četiri desetice, u broju 2 504 znamenka 2 nam ukazuje da taj broj ima dvije tisućice, a znamenka 5 da ima pet stotica dok nam u broju 5 240 znamenka 2 ukazuje da taj broj ima dvije stotice, a znamenka 5 da ima pet tisućica. Znamenka 0 u broju 2 504 ukazuje da taj broj ima nula desetica, tj. da nema desetica, a u broju 5 240 znamenka 0 ukazuje da taj broj ima nula jedinica. Jedinica, desetica, stotica, tisućica i t.d. su dekadske jedinice. Sjeti se i drugih, većih, dekadskih jedinica!

Osim na navedeni način prirodne brojeve ponekad zapisujemo i oznakama I, V, X, L, C, D, M koje su redom rimske oznake za brojeve jedan, pet, deset, pedeset, sto, petsto i tisuću. Tim se oznakama prirodni brojevi ne zapisuju u pozicijskom sustavu (sjeti se kako se tim znamenkama zapisuju brojevi) pa je zato s tako zapisanim prirodnim brojevima gotovo nemoguće računati. Već smo istaknuli da svaka dva prirodna broja možemo zbrojiti i da im je zbroj također prirodni broj. Prisjetimo se da zbrajanje prirodnih brojeva ima dva važna svojstva:

1) za bilo koja dva prirodna broja a i b je

$$\boxed{a+b=b+a,}$$

2) za bilo koja tri prirodna broja a, b i c je

$$\boxed{(a+b)+c=a+(b+c).}$$

Prvo se od tih svojstava zove **zakon komutacije** i kaže nam da zbroj ne zavisi o redu pribrojnika a drugo se od tih svojstava zove **zakon asocijacije** koji kaže da za zbrajanje više pribrojnika nije bitno kojim ćemo ih redom zbrajati.

Koristeći se navedenim svojstvima olakšavamo računanje prirodnim brojevima.

Primjer 1.1. Izračunajmo $13+29+57$.

$$\begin{aligned} \triangleright\ 13+29+57 &= 29+13+57 && \text{(zakon komutacije)} \\ &= 29+70 && \text{(zakon asocijacije)} \\ &= 99.\ \triangleleft \end{aligned}$$

Prisjetimo se da razlika dva prirodna broja može, ali ne mora biti prirodni broj, jer jedino kad od većeg prirodnog broja oduzimamo manji prirodni broj dobivamo da je razlika prirodni broj. Istaknimo također da za oduzimanje prirodnih brojeva ne vrijedi ni zakon asocijacije ni zakon komutacije.

Prisjetimo se i da svaka dva prirodna broja možemo pomnožiti i da im je umnožak također prirodni broj. I za množenje prirodnih brojeva vrijedi zakon asocijacije, tj. za bilo koja tri prirodna broja a, b i c je

$$\boxed{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)\,,}$$

i zakon komutacije, tj. za bilo koja dva prirodna broja a i b je

$$\boxed{a \cdot b = b \cdot a\,.}$$

Za zbrajanje i množenje prirodnih brojeva vrijedi i **zakon distribucije množenja prema zbrajanju**, tj. za bilo koja tri prirodna broja a, b i c je

$$\boxed{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c\,.}$$

Pogledajmo na primjeru kako se i zakonom distribucije možemo koristiti za lakše računanje s prirodnim brojevima.

Primjer 1.2. Izračunajmo $58 \cdot 6 + 126 \cdot 7 + 58 \cdot 4 + 74 \cdot 7$.

$$\begin{aligned}
\triangleright\ & 58 \cdot 6 + 126 \cdot 7 + 58 \cdot 4 + 74 \cdot 7 \\
=& 58 \cdot 6 + 58 \cdot 4 + 126 \cdot 7 + 74 \cdot 7 \\
=& 58 \cdot 6 + 58 \cdot 4 + 7 \cdot 126 + 7 \cdot 74 \\
=& 58 \cdot (6 + 4) + 7 \cdot (126 + 74) \qquad \text{(zakon distribucije)} \\
=& 58 \cdot 10 + 7 \cdot 200 = 580 + 1\,400 = 1\,980. \ \triangleleft
\end{aligned}$$

Dijeljenjem prirodnog broja a prirodnim brojem b dobivamo kvocijent koji je prirodni broj samo onda kada je broj a višekratnik broja b, tj. kada je $a = k \cdot b$, gdje je k također neki prirodni broj. Tada kažemo da je broj a **djeljiv** brojem b odnosno da je broj b **djelitelj** broja a.

Prirodni brojevi koji su djeljivi brojem 2 su **parni brojevi**. Prema tome se svaki parni broj može napisati u obliku $2 \cdot n$, gdje je n neki prirodni broj. Tako su 2, 4, 6, . . . parni brojevi, jer je $2 = 2 \cdot 1$, $4 = 2 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3, \ldots$. Kako skupove najčešće zapisujemo tako da u vitičastim zagradama prvo napišemo oznaku elementa toga skupa, zatim znak | ili znak : i onda svojstvo ili svojstva koja određuju elemente toga skupa, tako skup parnih brojeva, koji ćemo označiti s $\mathbf{N}_P$, možemo zapisati ovako:

$$\mathbf{N}_P = \{n \mid n \in \mathbf{N} \text{ i } n \text{ je djeljiv s } 2\}.$$

Za prirodni broj koji nije paran broj, tj. koji nije prirodni broj djeljiv s 2, kažemo da je **neparan broj**. To su brojevi 1, 3, 5, 7, ... Primijetimo da se svaki neparni broj može napisati u obliku $2 \cdot n - 1$, gdje je n neki prirodni broj. Ako skup neparnih brojeva označimo s $\mathbf{N}_N$, onda ga zapisujemo ovako:

$$\mathbf{N}_N = \{n \mid n \in \mathbf{N} \text{ i } n \text{ nije djeljiv s } 2\},$$

ali i ovako

$$\mathbf{N}_N = \{n \mid n \notin \mathbf{N}_P\}$$

(znak se $\notin$ čita: nije element).

Kako je svaki neparni broj prirodni broj, tj. kako je svaki element skupa $\mathbf{N}_N$ također i element skupa $\mathbf{N}$, kažemo da skup $\mathbf{N}$ sadrži skup $\mathbf{N}_N$ ili da je $\mathbf{N}_N$ **podskup** skupa $\mathbf{N}$ i to označavamo s $\mathbf{N}_N \subseteq \mathbf{N}$ (čita se: skup en en je podskup skupa en). Naravno da je i $\mathbf{N}_P \subseteq \mathbf{N}$. Očito je da skup $\mathbf{N}$ nije podskup skupa $\mathbf{N}_P$, što označavamo s $\mathbf{N} \not\subseteq \mathbf{N}_P$ (znak $\not\subseteq$ se čita: nije podskup).

Za skup koji čine svi elementi dvaju ili više skupova kažemo da je **unija** tih skupova. Tako je skup prirodnih brojeva $\mathbf{N}$ unija skupova $\mathbf{N}_N$ i $\mathbf{N}_P$, što zapisujemo ovako

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_N \cup \mathbf{N}_P$$

(čita se: en je en en unija en pe).

Za skup koji čine samo oni elementi dvaju ili više skupova koji su im zajednički, tj. koji su elementi svakog od tih skupova, kažemo da je **presjek** tih skupova. Kako svaki neparni broj pripada i skupu $\mathbf{N}_N$ i skupu $\mathbf{N}$, presjek skupova $\mathbf{N}_N$ i $\mathbf{N}$, koji označavamo s $\mathbf{N}_N \cap \mathbf{N}$ je upravo skup $\mathbf{N}_N$, tj. $\mathbf{N}_N \cap \mathbf{N} = \mathbf{N}_N$ (čita se: en en presjek en je en en). A što je presjek skupova $\mathbf{N}_N$ i $\mathbf{N}_P$? To bi morao biti skup koji nema nijedan element, jer ne postoji nijedan broj koji je i neparni i parni. U matematici se takav skup koji nema elemenata zove **prazan skup** i označava s $\emptyset$. Prema tome je $\mathbf{N}_N \cap \mathbf{N}_P = \emptyset$.

Vratimo se djeliteljima i djeljivosti prirodnih brojeva. Za prirodni broj koji ima točno dva međusobno različita djelitelja kažemo da je **prost broj** ili **prim–broj**. Takvi su, na primjer, brojevi 2, 3, 5, 7, 11, ... i svaki se od njih može napisati kao produkt prirodnih brojeva samo tako da jedan faktor bude broj 1 a drugi faktor sam taj broj.

Prirodni broj koji se može napisati kao umnožak dvaju ili više od tog broja manjih prirodnih brojeva je **složen broj**. Takvi su brojevi 4, 6, 8, 9, 10, 12, ... Primijetimo da broj 1 nije ni prost ni složen i to je jedini prirodni broj s tim svojstvom.

Prisjetimo se da smo pri računanju s razlomcima često morali za dva ili više prirodnih brojeva odrediti koji su brojevi zajednički djelitelji svih tih brojeva, odnosno odrediti broj koji je djeljiv svim tim brojevima i koji je onda njihov zajednički višekratnik. Pri tome nam je često bilo potrebno odrediti **najveći zajednički djelitelj** (za koji kažemo i da je **najveća zajednička mjera**) tih brojeva, odnosno najmanji broj koji je djeljiv svim zadanim brojevima i koji je onda njihov **najmanji zajednički višekratnik**.

Da bismo za neke brojeve odredili najveću zajedničku mjeru ili najmanji zajednički višekratnik, često je bilo potrebno sve te brojeve **rastaviti na faktore**, tj. napisati u obliku umnoška i to najčešće umnoška prostih brojeva. Kako se pri rastavljanju na proste faktore može neki prosti faktor pojaviti i više puta, što zapis toga rastava čini dugačkim, obično se koristimo pisanjem tih faktora u obliku potencija. Sjetimo se da je na primjer $2\cdot 2\cdot 2 = 2^3$, $5\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = 5^4$, ... i, općenitije, da svaki produkt koji se sastoji od n jednakih faktora a možemo napisati u obliku potencije a^n (čita se: “a na en” ili “a na entu”) i pri tome kažemo da je baza potencije a potencirana eksponentom n.

Primjer 1.3. Odredimo najveću zajedničku mjeru M i najmanji zajednički višekratnik V brojeva 252 i 600.

▷ Provjeri da je $252 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 7 = 2^2\cdot 3^2\cdot 7$ i da je $600 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 5 = 2^3\cdot 3\cdot 5^2$ pa dobivamo da je $M(252, 600) = 2^2\cdot 3 = 12$ i $V(252, 600) = 2^3\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7 = 12\,600$. ◁

Često se u istom zadatku javlja više zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i potenciranja. Zbrajanje i oduzimanje zovemo operacijama prvog stupnja, množenje i dijeljenje operacijama drugog stupnja, a potenciranje operacijom trećeg stupnja.

Pri računanju vrijede ovi dogovori:

1) Operacije se istog stupnja obavljaju naznačenim redom slijeva udesno, ako zagradama nije određeno što treba prije učiniti.

2) Operacije se višeg stupnja obavljaju prije operacija nižeg stupnja, ako zagradama nije određeno što treba prije učiniti.

3) Ako u nekom izrazu ima više zagrada, prvo se obavljaju operacije u zagradama unutar kojih nema drugih zagrada.

Cijeli brojevi

Već smo vidjeli da je za bilo koje prirodne brojeve a i b razlika $a-b$ prirodan broj samo kada je $a > b$. Ako je $a = b$, onda je razlika $a - b$ cijeli broj 0. Ako je $a < b$, onda je razlika $b - a$ prirodan broj, označimo ga s c, a razlika $a - b$ je cijeli broj koji označavamo s $-c$.

Prisjetimo se da za prirodne brojeve 1, 2, 3, ..., n, ... kažemo da su **pozitivni cijeli brojevi**, za cijele brojeve -1, -2, -3, ..., $-n$, ... da su **negativni cijeli brojevi** dok cijeli broj 0 nije ni pozitivan ni negativan. Skup cijelih brojeva označavamo slovom $\mathbf{Z}$ (prema njem. *Zahl* – broj) i obično zapisujemo ovako:

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

Očito je $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$. Za cijele brojeve n i $-n$ kažemo da su međusobno suprotni, što znači da je broj $-n$ **suprotan broj** broju n i da je n suprotan broj broju $-n$.

Znamo da je zbroj, razlika odnosno produkt bilo koja dva cijela broja cijeli broj i da za zbrajanje i množenje cijelih brojeva vrijede zakoni asocijacije i komutacije te zakon distribucije množenja prema zbrajanju dok za oduzimanje cijelih brojeva ni zakon asocijacije ni zakon komutacije ne vrijede.

Prisjetimo se da dijeljenje brojem 0 nije definirano (što znači da zapisi $a:0$ ili $\frac{a}{0}$ nisu dozvoljeni) i da se dijeljenjem bilo kojeg cijelog broja a s bilo kojim cijelim brojem $b \neq 0$ ne dobiva uvijek cijeli broj. Istaknimo da za dijeljenje prirodnih brojeva pa prema tome i za dijeljenje cijelih brojeva ne vrijede ni zakon komutacije ni zakon asocijacije.

Za svaka dva cijela broja možemo reći koji je veći a koji manji. Općenito je cijeli broj a manji od cijelog broja b, tj. $a < b$, kada postoji pozitivni cijeli broj n takav da je $a + n = b$. Primijetimo da smo u prije navedenom zapisu skupa cijelih brojeva $\mathbf{Z}$, gledajući slijeva udesno, manji broj pisali prije većeg broja i da ne postoji ni najmanji ni najveći cijeli broj.

Zadatak 1.1. Izračunaj:

a) $25 \cdot (-4)$; **b)** $3 \cdot 14 + 112 \cdot (-6)$;
c) $7 \cdot 45 + 3 \cdot (-85 + 2 \cdot 27) + 256 : 16$.

Racionalni brojevi

Prisjetimo se da dijeljenjem $a:b$ bilo kojeg cijelog broja a cijelim brojem $b \neq 0$ (jer dijeljenje brojem 0 nije definirano) dobivamo **racionalan broj**. Zato svaki racionalan broj možemo zapisati u obliku razlomka $\frac{a}{b}$ kojemu je **brojnik** a cijeli broj, a **nazivnik** b cijeli broj različit od 0. Tako su, na primjer, $\frac{3}{5}$, $\frac{-3}{5}$, $\frac{3}{-5}$, $\frac{-3}{-5}$, $\frac{0}{7}$, $\frac{0}{-7}$, $\frac{8}{1}$, $\frac{-8}{1}$, neki racionalni brojevi zapisani u obliku razlomka. Svaki se racionalni broj može zapisati i u decimalnom obliku.

Podsjetimo se koji su mogući decimalni zapisi racionalnoga broja:

a) konačni decimalni zapis

$$\frac{9}{20} = 9 : 20 = 0.45$$

$$\begin{array}{l} 90 \\ 100 \\ 0 \end{array}$$

Konačan se zapis pojavljuje kad se u nazivniku kao jedini prosti faktori javljaju brojevi 2 i 5.

b) periodični decimalni zapis

$$\frac{4}{21} = 4 : 21 = 0.\dot{1}9047\dot{6}$$

$$\begin{array}{l} 40 \\ 190 \\ \quad 10 \\ \quad 100 \\ \qquad 160 \\ \qquad\ \ 130 \\ \qquad\qquad 4 \end{array}$$

Periodični se zapis pojavljuje kad se ni broj 2 ni broj 5 ne javljaju kao prosti faktori nazivnika.

c) mješoviti decimalni zapis

$$\frac{7}{12} = 7 : 12 = 0.58\dot{3}$$

$$\begin{array}{l} 70 \\ 100 \\ \quad 40 \\ \qquad 4 \end{array}$$

Mješoviti se zapis javlja kad nazivnik sadrži i proste faktore 2 ili 5 i još neke druge proste faktore.

Prisjetimo se da su razlomci $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ jednaki kada je $a \cdot d = b \cdot c$. Tako je, na primjer, $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, jer je $3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$. Primijetimo da je $\frac{6}{8} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2}$, tj. da se razlomak $\frac{6}{8}$ može dobiti tako da se njemu jednakom razlomku $\frac{3}{4}$ i brojnik i nazivnik pomnože brojem 2.

I općenito, ako razlomku $\frac{a}{b}$ pomnožimo i brojnik i nazivnik istim brojem $k \neq 0$, onda je $\frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{a}{b}$, jer je $(a \cdot k) \cdot b = (b \cdot k) \cdot a$, pa je s $\frac{a}{b}$ i s $\frac{a \cdot k}{b \cdot k}$ zapisan u obliku razlomka isti racionalni broj. Kako k može biti svaki cijeli broj različit od broja 0, svaki racionalni broj možemo u obliku razlomka zapisati na beskonačno mnogo različitih načina.

Za prijelaz od razlomka $\frac{a}{b}$ na njemu jednaki razlomak $\frac{a \cdot k}{b \cdot k}$ kažemo da je **proširivanje razlomka** dok za obratni prijelaz od razlomka $\frac{a \cdot k}{b \cdot k}$ na razlomak $\frac{a}{b}$ kažemo da je **skraćivanje razlomka**. Očito je da razlomak možemo skratiti onda i samo onda kad brojnik i nazivnik toga razlomka imaju neki zajednički djelitelj različit od broja 1. Za razlomak $\frac{a}{b}$ kažemo da je **potpuno skraćen** ili **neskrativ** kad je najveća zajednička mjera njegovog brojnika i nazivnika broj 1, tj. kada je $M(a, b) = 1$. Očito je da svaki razlomak možemo skraćivati dok ne bude potpuno skraćen.

Primijetimo da svaki razlomak kojemu je nazivnik negativan cijeli broj možemo proširivanjem s brojem -1 napisati tako da mu nazivnik bude pozitivan cijeli broj, tj. prirodni broj, pa svaki racionalni broj možemo zapisati u obliku razlomka kojemu je brojnik cijeli broj a nazivnik prirodni broj. Prema tome skup racionalnih brojeva, koji označavamo slovom $\mathbf{Q}$ (prema lat. *quotiens* — koliko puta), možemo odrediti ovako:

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbf{Z} \text{ i } b \in \mathbf{N} \right\}.$$

Istaknimo još da je svaki cijeli broj a također i racionalan broj, jer se može zapisati u obliku $\frac{a}{1}$, pa je prema tome $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}$.

Za racionalni broj $\frac{a}{b}$ kojemu je brojnik a negativan cijeli broj a nazivnik b prirodan broj kažemo da je negativan racionalni broj. Takve brojeve često pišemo tako da znak $-$ umjesto u brojniku pišemo ispred razlomačke crte, na primjer, broj $\frac{-3}{5}$ pišemo u obliku $-\frac{3}{5}$. Skup svih negativnih racionalnih brojeva označavamo s $\mathbf{Q}^-$ pa je

$$\mathbf{Q}^- = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbf{Z}, a < 0 \text{ i } b \in \mathbf{N} \right\}.$$

Racionalni broj $\frac{a}{b}$ kojemu je brojnik a pozitivan cijeli broj, tj. prirodni broj, a nazivnik b također prirodni broj je pozitivan racionalni broj. Skup svih pozitivnih racionalnih brojeva označavamo s $\mathbf{Q}^+$ pa je:

$$\mathbf{Q}^+ = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbf{N} \text{ i } b \in \mathbf{N} \right\}.$$

Naravno, racionalni broj 0 nije ni pozitivan ni negativan.

Vidjeli smo da svaki racionalni broj može biti zapisan u obliku razlomka pa ćemo unaprijed za tako zapisani racionalni broj ravnopravno govoriti da je to racionalni broj ili da je to razlomak.

Uređaj u skupu racionalnih brojeva

Već smo vidjeli da su skup prirodnih brojeva i skup cijelih brojeva uređeni po veličini. Prisjetimo se da je i skup racionalnih brojeva $\mathbf{Q}$ uređen po veličini i pogledajmo na primjerima kako se uspoređuju po veličini dva racionalna broja.

Primjer 1.4. Usporedimo racionalne brojeve $\frac{2}{5}$ i $\frac{4}{5}$.

▷ Kako je $2 < 4$, očito je da je $\frac{2}{5} < \frac{4}{5}$. ◁

> Razlomke istih nazivnika uspoređujemo tako da usporedimo njihove brojnike. Veći je onaj razlomak kojemu je brojnik veći; i obratno: manji je onaj razlomak koji ima manji brojnik.

Primjer 1.5. Usporedimo racionalne brojeve $\frac{9}{10}$ i $\frac{11}{14}$.

▷ Kako je $\frac{9}{10} = \frac{63}{70}$ i kako je $\frac{11}{14} = \frac{55}{70}$, a $63 > 55$, dobivamo da je $\frac{9}{10} > \frac{11}{14}$. ◁

Kako svaka dva prirodna broja imaju najmanji zajednički višekratnik, svaka je dva razlomka moguće svesti na najmanji zajednički nazivnik.

> Razlomke različitih nazivnika uspoređujemo tako da ih prvo svedemo na zajednički nazivnik pa ih onda uspoređujemo kao razlomke istih nazivnika.

Primjer 1.6. Usporedimo racionalne brojeve $-\frac{13}{52}$ i $-\frac{7}{28}$.

▷ Skraćivanjem dobivamo da je $-\frac{13}{52} = -\frac{1}{4}$ i da je $-\frac{7}{28} = -\frac{1}{4}$ pa su i $-\frac{13}{52}$ i $-\frac{7}{28}$ različiti zapisi istog racionalnog broja. ◁

Ako su dva racionalna broja dana u decimalnom obliku, onda se iz njihovog zapisa u decimalnom obliku neposredno vidi koji je od tih brojeva veći a koji manji.

Dva racionalna broja od kojih je jedan dan u decimalnom obliku a drugi u obliku razlomka uspoređujemo tako da oba napišemo ili u obliku razlomka ili u decimalnom obliku.

Znamo da u skupu cijelih brojeva uređenom po veličini postoje susjedni brojevi — to su svaka dva cijela broja između kojih se ne nalazi nijedan cijeli broj.

Postoji li neki racionalni broj između brojeva $\frac{1}{3}$ i $\frac{4}{3}$?

Kako je $\frac{1}{3} < \frac{4}{3}$, traženi broj mora biti veći od $\frac{1}{3}$, a manji od $\frac{4}{3}$. Takav je, na primjer, broj $\frac{3}{3}$, pa je

$$\frac{1}{3} < \frac{3}{3} < \frac{4}{3}.$$

Je li $\frac{3}{3}$ jedini takav racionalni broj? Očito je da nije jer je $\frac{1}{3} < \frac{2}{3} < \frac{4}{3}$. Postoje li racionalni brojevi $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ takvi da je $\frac{1}{3} < \frac{a}{b} < \frac{3}{3} < \frac{c}{d} < \frac{4}{3}$? Očito je da za broj $\frac{2}{3}$ vrijedi $\frac{1}{3} < \frac{2}{3} < \frac{3}{3}$ pa $\frac{a}{b}$ postoji. Za $\frac{c}{d}$ rješenje nije tako očito. Pogledajmo je li broj $\dfrac{\frac{3}{3}+\frac{4}{3}}{2}$ između brojeva $\frac{3}{3}$ i $\frac{4}{3}$. Kako je $\dfrac{\frac{3}{3}+\frac{4}{3}}{2} = \frac{7}{6}$, kako je $\frac{3}{3} = \frac{6}{6}$ i $\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$ i kako je $\frac{6}{6} < \frac{7}{6} < \frac{8}{6}$, to je

$$\frac{3}{3} < \dfrac{\frac{3}{3}+\frac{4}{3}}{2} < \frac{4}{3},$$

pa i $\frac{c}{d}$ postoji.

Istaknimo da je za bilo koja dva različita racionalna broja $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ racionalni broj $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2}$ uvijek između njih, što znači da u skupu racionalnih brojeva ne postoje susjedni brojevi.

Zadatak 1.2. Usporedi racionalne brojeve:

a) $1\frac{3}{4}$ i $\frac{4}{3}$; **b)** $\frac{-3}{4}$ i $\frac{-4}{3}$; **c)** $\frac{2}{7}$ i $\frac{-1}{2}$; **d)** $\frac{5}{4}$ i $\frac{10}{8}$.

Zadatak 1.3. Poredaj brojeve -3, $\frac{2}{12}$, $\frac{-5}{7}$, $\frac{0}{2}$, $\frac{15}{9}$ od najmanjeg do najvećeg. Koji su od navedenih razlomaka potpuno skraćeni?

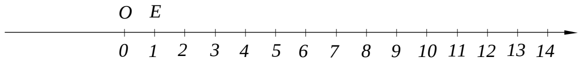
Zadatak 1.4. Koji je od navedenih brojeva $\frac{19}{7}$, 0, $\frac{-2}{7}$, $\frac{-5}{2}$, 1 između brojeva $\frac{7}{6}$ i $\frac{-5}{14}$?

Zadatak 1.5. Napiši dva racionalna broja koja su između brojeva $\frac{2}{6}$ i $\frac{2}{3}$.

Pridruživanje racionalnih brojeva i točaka pravca

U osnovnoj smo školi naučili kako se pridružuju racionalni brojevi i točke pravca. Prisjetimo se.

Prvo smo na pravcu istaknuli dvije točke: točku O, koju uzimamo za početak i kojoj pridružujemo broj 0, i točku E, kojoj pridružujemo broj 1.

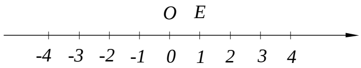


Sl. 1.

Strelicom na pravcu OE označavamo smjer od točke O prema točki E i kažemo da je to pozitivan smjer.

Dužina $\overline{OE}$ jedinična je dužina. Općenito se točki koja je za n jediničnih dužina $\overline{OE}$ udaljena od točke O u smjeru označenom strelicom pridružuje prirodni broj n (sl. 1.).

Na sličan način pridružujemo negativne cijele brojeve i točke pravca (sl. 2.).

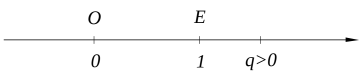


Sl. 2.

Točki pravca koja je za n jediničnih dužina $\overline{OE}$ udaljena od točke O i koja je s one strane točke O na kojoj nije točka E pridružili smo negativni cijeli broj $-n$.

Uočimo da su pozitivni brojevi s one strane točke O na kojoj je i točka E, a negativni su brojevi s one strane točke O na kojoj nije točka E. Točki O pridružen je broj 0 koji nije ni pozitivan ni negativan.

Točkama pravca pridružili smo i racionalne brojeve koji nisu cijeli brojevi. Tako smo pozitivnom broju $q = \dfrac{a}{b}$ pridružili točku pravca kojoj je udaljenost od točke O (mjerena jediničnom dužinom $\overline{OE}$) jednaka tome broju i koja je s iste strane točke O kao i točka E (sl. 3.).



Sl. 3.

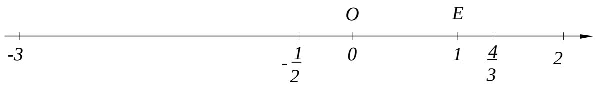
Negativnom smo broju $q = \dfrac{a}{b}$ pridružili točku pravca kojoj je udaljenost od točke O (mjerena jediničnom dužinom $\overline{OE}$) jednaka apsolutnoj vrijednosti broja q i koja je u odnosu na točku O na onoj strani pravca na kojoj nije točka E (sl. 4.).

Sl. 4.

Primjer 1.7. Na pravcu prikazanom na slici 5. označena je jedinična dužina $\overline{OE}$. Kojim su točkama toga pravca pridruženi brojevi 2, -3, $-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{4}{3}$?

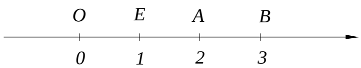
Sl. 5.

▷ Uočimo da su točke pravca kojima su pridruženi brojevi 2 i $\frac{4}{3}$ s iste strane točke O kao i točka E, a točke pravca kojima su pridruženi brojevi -3 i $-\frac{1}{2}$ s one su strane točke O na kojoj nije točka E. Udaljenost točaka od točke O jednaka je apsolutnoj vrijednosti zadanih brojeva. Rješenje je prikazano na slici 6. ◁



Sl. 6.

Uočimo točku A kojoj je pridružen prirodni broj 2 i točku B kojoj je pridružen prirodni broj 3 (sl. 7.).



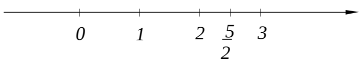
Sl. 7.

Postoji li neka točka pravca koja je između točaka A i B i kojoj je pridružen neki prirodni broj?

Takva točka ne postoji jer ne postoji nijedan prirodni broj između brojeva 2 i 3. To su dva susjedna prirodna broja. Između točaka kojima su pridruženi susjedni prirodni brojevi ne postoji nijedna točka kojoj je pridružen neki prirodni broj.

Isto vrijedi i za cijele brojeve. Između točaka kojima su pridruženi susjedni cijeli brojevi ne postoji nijedna točka kojoj je pridružen cijeli broj.

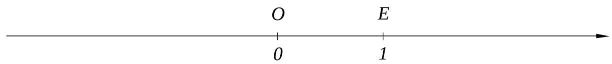
Pogledajmo još jednom sliku 7. Postoji li između točaka A i B točka kojoj je pridružen neki racionalni broj? Da, postoji. Jedna je takva točka ona kojoj je pridružen racionalni broj $\frac{5}{2}$.



Sl. 8.

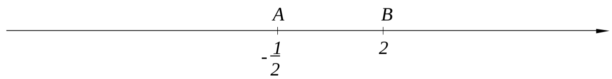
To, naravno, nije jedina takva točka. Takve su, na primjer, i točke kojima su pridruženi brojevi $\frac{12}{5}$, $\frac{15}{6}$, $\frac{25}{12}$. (Jesu li to jedine takve točke?) Već smo vidjeli da ne postoje dva susjedna racionalna broja. Kako za svaki racionalni broj postoji točka pravca kojoj je taj broj pridružen i kako se različiti racionalni brojevi pridružuju različitim točkama pravca, očito je da ne postoje dvije susjedne točke pravca kojima su pridruženi različiti racionalni brojevi.

Zadatak 1.6. Na pravcu na slici 9. zadana je jedinična dužina $\overline{OE}$. Odredi točke pravca kojima su pridruženi racionalni brojevi $-\frac{2}{8}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{3}{4}$, $-\frac{3}{4}$, -3.



Sl. 9.

Zadatak 1.7. Na pravcu na slici 10. zadane su točke A i B kojima su pridruženi brojevi $-\frac{1}{2}$ i 2. Odredi točke pravca kojima su pridruženi brojevi 0, 1, -2 i $\frac{7}{3}$.



Sl. 10.

Računanje s racionalnim brojevima

U osnovnoj smo školi naučili računati s razlomcima. Podsjetimo se!

Primjer 1.8. Izračunajmo: $\frac{5}{7}+\frac{1}{7}$.

▷ $\frac{5}{7}+\frac{1}{7}=\frac{5+1}{7}=\frac{6}{7}$. ◁

> Zbroj je dvaju razlomaka istih nazivnika razlomak. Njegov je brojnik jednak zbroju brojnika razlomaka koje zbrajamo, a nazivnik mu je jednak nazivnicima razlomaka koje zbrajamo.

Primjer 1.9. Izračunajmo: $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$.

▷ $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3}{12}+\frac{2}{12}=\frac{3+2}{12}=\frac{5}{12}$. ◁

> Razlomke različitih nazivnika zbrajamo tako da ih svedemo na najmanji zajednički nazivnik i onda ih zbrojimo.

Budući da svaka dva prirodna broja imaju najmanji zajednički višekratnik, svaka je dva razlomka moguće svesti na najmanji zajednički nazivnik i onda zbrojiti.

Istaknimo da i za zbrajanje racionalnih brojeva vrijedi i zakon asocijacije i zakon komutacije.

Razliku dvaju razlomaka računamo slično kao i zbroj pa je razlika bilo kojih dvaju razlomaka također razlomak.

Primjer 1.10. Izračunajmo: $\dfrac{5}{2} - \dfrac{4}{3}$.

$$\triangleright \quad \frac{5}{2} - \frac{4}{3} = \frac{15}{6} - \frac{8}{6} = \frac{15-8}{6} = \frac{7}{6}. \quad \triangleleft$$

Podsjetimo se sad kako množimo razlomke.

Primjer 1.11. Izračunajmo: $\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5}$.

$$\triangleright \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}. \quad \triangleleft$$

> Umnožak je dvaju razlomaka razlomak kojemu je brojnik jednak umnošku brojnika, a nazivnik jednak umnošku nazivnika razlomaka koje množimo.

Prisjetimo se da za množenje racionalnih brojeva vrijede zakon asocijacije i zakon komutacije i da za računanje s racionalnim brojevima vrijedi također i zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

Za dva racionalna broja kažemo da su jedan drugome recipročni ili inverzni kada je njihov produkt broj 1. Očito je da ne postoji broju 0 recipročni broj, jer je $0 \cdot q = 0$ za svaki $q \in \mathbf{Q}$. Uočimo da za racionalan broj $\dfrac{a}{b} \neq 0$ (što znači da je $a \neq 0$) postoji racionalan broj $\dfrac{b}{a}$ i da je $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{b}{a} = 1$.

Prema tome za svaki racionalni broj $\dfrac{a}{b}$, osim broja 0, postoji tom broju **recipročan broj** $\dfrac{b}{a}$ i obično se kaže da je $\dfrac{b}{a}$ recipročna vrijednost broja $\dfrac{a}{b}$.

Kako dijelimo racionalne brojeve? Podsjetimo se na primjerima pravila koje smo naučili u osnovnoj školi.

Primjer 1.12. Koliko je $\dfrac{8}{9} : \dfrac{2}{3}$?

$\triangleright$ $\dfrac{8}{9} : \dfrac{2}{3} = \dfrac{8:2}{9:3} = \dfrac{4}{3}$. $\triangleleft$

A što radimo kad nije djeljiv brojnik s brojnikom i nazivnik s nazivnikom?

Primjer 1.13. Koliko je $\dfrac{2}{5} : \dfrac{7}{3}$?

$\triangleright$ $\dfrac{2}{5} : \dfrac{7}{3} = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{3}{7} = \dfrac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \dfrac{6}{35}$. $\triangleleft$

Razlomak se dijeli razlomkom tako da se djeljenik pomnoži recipročnom vrijednošću djelitelja.

Primijetimo da pri dijeljenju racionalnih brojeva djelitelj ne smije biti 0, jer broj 0 nema recipročnu vrijednost, i da dijeljenjem bilo kojega racionalnog broja racionalnim brojem različitim od 0 dobivamo racionalni broj.

Na koji smo još način mogli zapisati zadatak iz primjera 1.13.? Mogli smo to učiniti u obliku dvojnog razlomka ovako:

$$\frac{2}{5} : \frac{7}{3} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{3}}.$$

Zbog drukčijeg zapisa rezultat se, naravno, neće promijeniti, pa je

$$\frac{2}{5} : \frac{7}{3} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{3}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}.$$

I općenito je

$$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}.}$$

Istaknimo još da s dvojnim razlomcima možemo računati na isti način kao i s običnim razlomcima ili ih prije računanja pretvoriti u obične razlomke.

Zadatak 1.8. Izračunaj:

a) $\dfrac{2}{5} + 3\dfrac{2}{4}$; **b)** $\dfrac{13}{29} \cdot \dfrac{3}{26} + \dfrac{-7}{29}$;

c) $\dfrac{12}{5} : \dfrac{18}{7} + \dfrac{6}{5} \cdot \left(3 \cdot \dfrac{4}{15} - \dfrac{7}{5} \cdot \dfrac{9}{14}\right)$.