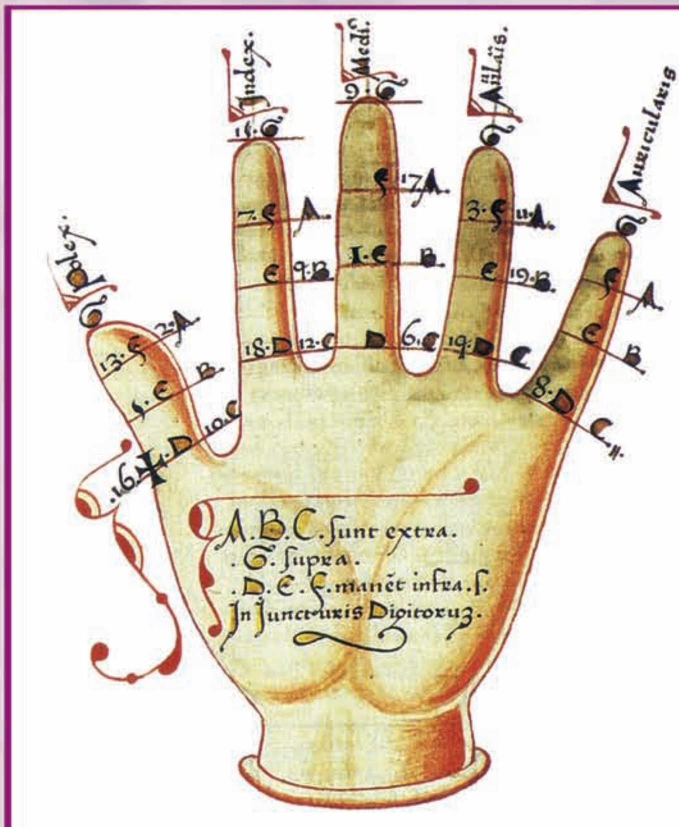
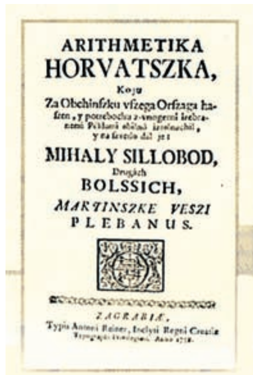
1 Realni brojevi



Slika iz jednog priručnika o računanju na prste (15.st.)

- Skupovi brojeva.. 2
- Operacije sa skupovima... 10
- Racionalni brojevi... 14
- Realni brojevi.. 21
- Brojevni pravac... 26

1.1. Skupovi brojeva


ARITHMETIKA
HORVATSZKA,
Koju
Za Obchinszku vszega Orszaga ha-
MIHALY SILLOBOD,
Drugich
BOLSSICH,
MARTINSZKE VESZI
PLEBANUS.
ZAGRABIÆ,

Upitamo li nekoga tko nije matematičar, ili mu matematika barem nije osobito bliska, čime se bavi ta znanost, vjerojatno će odgovoriti — brojevima. *Premda odgovor baš i nije točan, on nije neobičan, jer prva iskustva s matematikom u svakog su čovjeka vezana uz brojeve i računanje. A i ne baš tako davno matematičke su se početnice zvale* Računice.

Prvi matematički udžbenik na hrvatskom jeziku, tiskan u Zagrebu 1758. godine

Prirodni i cijeli brojevi

Prirodnim se brojevima služimo kad brojimo ili prebrojavamo. Prirodni će broj biti odgovor na pitanje: *koliko članova ima neki konačni skup?*

Skup prirodnih brojeva

Skup **prirodnih brojeva** označavamo s $\mathbf{N}$.

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots\}.$$

U skupu prirodnih brojeva postoji najmanji broj, to je broj 1. Ne postoji najveći prirodni broj; *od ma kako velikog prirodnog broja postoji još veći.* Iz ove činjenice proistječe da je *skup prirodnih brojeva beskonačan*.

Tek prije otprilike 500 godina ljudi su došli na ideju da se postupak brojanja *unatrag*: 3, 2, 1 može nastaviti brojem 0 i *negativnim brojevima* -1, pa -2, pa -3 itd. Negativnim brojevima danas prikazujemo, npr., temperaturu ispod ništice, visinu vodostaja manju od uobičajene, knjigovodstveni manjak u računovodstvu itd.

U skupu prirodnih brojeva definirane su operacije zbrajanja i množenja, o čemu ste učili tijekom osnovne škole. Zbroj prirodnih brojeva prirodni je broj. Umnožak prirodnih brojeva također je prirodni broj.

Razni praktični problemi nametnuli su potrebu za uvođenjem računskih operacija suprotnih zbrajanju i množenju, operacija *oduzimanja* i *dijeljenja*.

Razlika $a - b$ dvaju prirodnih brojeva a i b nije uvijek prirodni broj, jer skup prirodnih brojeva *nije zatvoren* s obzirom na oduzimanje. Ta je razlika općenito **cijeli broj**.

Skup cijelih brojeva

Skup cijelih brojeva označavamo sa $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots\}$$

Kutak plus

GAUSSOVA DOSJETKA

Gauss kao osmogodišnji dječak

Spretnost računanja uvijek je bila cijenjena vještina. Danas, kad gotovo u svakom džepu imamo kalkulator (ne zaboravite da ga imate i na svojem mobilnom telefonu), možda je računanje "napamet" manje važno, ali ne i potpuno nevažno. Primjene svojstava računskih operacija često nam omogućuju da jednostavnije i brže dođemo do rezultata. No i razne dosjetke koje pojednostavnjuju računanje uvijek su dobrodošle. Jedna je takva dosjetka osobito popularna, a vezana je uz ime velikog njemačkog matematičara Carla Friedricha Gaussa (1777. – 1855.). Prema anegdoti Gauss je kao osmogodišnji školarac dobio od učitelja zadatak izračunati zbroj prvih 100 prirodnih brojeva.

Njegovo rješenje tog zadatka sastoji se u tome da se brojevi združuju u parove: prvi s posljednjim ($1 + 100$), drugi s pretposljednjim ($2 + 99$), treći s pretpretposljednjim ($3 + 98$) itd. Tako se dobije 50 parova, u svakom je zbroj 101, te je konačan rezultat jednak $50 \cdot 101 = 5\,050$.

Dakako da se opisani Gaussov postupak može proširiti na zbroj bilo koliko prvih prirodnih brojeva, pa tako dobivamo poznatu formulu

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Istim postupkom možemo računati i zbroj prvih n parnih brojeva. Ali možemo iskoristiti i dobivenu formulu za $S(n)$. Evo kako:

$$2 + 4 + 6 + \ldots + (2n-2) + 2n = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1).$$

Riješi zadatke:

1. Koliki je zbroj prvih 100 neparnih prirodnih brojeva? Poopći te odredi formulu za zbroj prvih n neparnih prirodnih brojeva.

2. Koliko je $1 + 4 + 7 + \ldots + 100$?

3. Koliki je zbroj svih troznamenkastih brojeva koji pri dijeljenju s 5 daju ostatak 3?

4. Izračunaj $50 + 54 + 58 + \ldots + 550$.

5. Zbroj prvih n prirodnih brojeva jednak je $3\,003$. Koliki je n?

6. Kolika je razlika zbroja prvih 1000 parnih i zbroja prvih 1000 neparnih prirodnih brojeva?

Racionalni brojevi

Skup cijelih brojeva je zatvoren s obzirom na zbrajanje, množenje i oduzimanje. Drugim riječima, zbroj, umnožak i razlika svakih dvaju cijelih brojeva uvijek je cijeli broj.

Skup cijelih brojeva nije zatvoren s obzirom na dijeljenje, računsku operaciju obrnutu množenju; količnik dvaju cijelih brojeva nije uvijek cijeli broj. Zbog toga opet uvodimo nove brojeve, to su *razlomci* ili **racionalni brojevi**.

Količnici cijelih brojeva, poput $\frac{3}{5}$, $\frac{-13}{7}$, $\frac{2}{-11}$ su **racionalni brojevi**. Količnik bilo kojih dvaju cijelih brojeva racionalni je broj. Pritom moramo isključiti dijeljenje nulom, jer se nulom ne smije dijeliti.

Koji je tome razlog? Iz $\frac{a}{0}=b$ slijedi $a=b\cdot 0$.

Ako je $a=0$, ta je jednakost ispunjena za svaki broj b. Dakle je količnik b neodređen, on može biti bilo koji realan broj.

Ako je pak $a\neq 0$, jednakost $a=b\cdot 0$ nije ispunjena niti za koji broj b.

Skup racionalnih brojeva

Skup **racionalnih brojeva** označavamo s $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{a}{b}\ :\quad a,b\in\mathbf{Z},\quad b\neq 0.\right\}$$

Ako bismo proveli razlomkom naznačeno dijeljenje, dobili bismo prikaz istog racionalnog broja u **decimalnom zapisu**.

Tako je, primjerice:

$$-\frac{1}{2}=-1:2=-0.5;\qquad \frac{3}{4}=3:4=0.75;\qquad -\frac{5}{8}=-5:8=-0.625,$$

i tako dalje.

Svi su navedeni primjeri **konačni decimalni brojevi**. Znamo, dakako, i za drukčije primjere:

$$\frac{3}{7}=3:7=0.428571428571428571\ldots;$$
$$\frac{1}{3}=1:3=0.333333333333333\ldots;$$
$$-\frac{10}{11}=-10:11=-0.9090909090909090\ldots.$$

Ovdje je riječ o racionalnim brojevima kojima je decimalni prikaz **beskonačan decimalni broj**.

Ako je decimalni zapis racionalnog broja beskonačan, onda možemo uočiti kako se skupina znamenki uzastopce ponavlja. U prvom primjeru tu skupinu čini šest znamenki, u drugom samo jedna, u trećem dvije, u četvrtom tri.

Kažemo da su ti decimalni brojevi **beskonačni i periodski**. Skupinu znamenki koja se ponavlja iza decimalne točke zovemo **period**.

Pri zapisu beskonačnih periodskih decimalnih brojeva nad prvom i posljednjom znamenkom perioda stavljamo točkicu:

$$\frac{3}{7} = 0.\dot{4}2857\dot{1}; \quad \frac{1}{3} = 0.\dot{3}; \quad -\frac{10}{11} = -0.\dot{9}\dot{0}.$$

Zbog čega pri decimalnom zapisu racionalnog broja dolazi do ponavljanja skupine znamenki? Odgovor na ovo pitanje bit će sasvim jasan provedete li pisano dijeljenje (ne dijeljenje džepnim računalom ili bilo kakvim sličnim pomagalom) brojnika i nazivnika u danom razlomku:

$$\begin{array}{l} 26 : 111 = 0.234 \\ 260 \\ \ \ 380 \\ \ \ \ \ 470 \\ \ \ \ \ \ \ 26 \end{array}$$

U ovom trenutku došli smo do početne pozicije. Ako nastavimo dijeljenje, u količniku će se ponavljati niz znamenaka 234.

Bez obzira je li decimalni zapis nekog racionalnog broja konačan ili beskonačan, taj je zapis *potpuno poznat* i može se odrediti bilo koja njegova znamenka.

Primjer 1.

Koja je znamenka na 1001. mjestu iza decimalne točke u decimalnom zapisu broja $\frac{3}{7}$?

Vidjeli smo da je $\frac{3}{7} = 0.\dot{4}2857\dot{1}$, tj. uzastopce se ponavlja skupina od 6 znamenki.

Podijelimo li 1001 sa 6, dobit ćemo količnik 166 i ostatak 5. Stoga će se skupina od 6 navedenih znamenki izredati 166 puta i potom će slijediti još pet znamenki. Zaključujemo da je 1001. po redu znamenka 7.

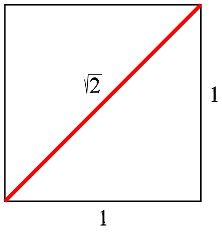
Zadatak 1. Koja je znamenka u broju

$$0.123456789101112131415\ldots$$

na 77. mjestu iza decimalne točke? Je li taj broj racionalan? Obrazloži!

Iracionalni brojevi

Postoje brojevi koji nisu racionalni, koje nije moguće predočiti kao količnike dvaju cijelih brojeva. Takvi se brojevi zovu **iracionalni brojevi**.



Iracionalni su brojevi relativno mladi, njihova povijest pripada novijem dobu. Pitagora i njegovi učenici prvi su se suočili s problemom da dotad poznati brojevi ne odgovaraju na sva pitanja što ih postavljaju problemi geometrije. Tako, primjerice, jednostavan geometrijski zadatak, određivanje duljine dijagonale kvadrata duljine stranice 1, nisu mogli točno riješiti jer je njihovo učenje o brojevima završavalo s racionalnim brojevima. Sama pomisao da postoje brojevi koji nisu omjeri cijelih brojeva, koji nisu racionalni, bila bi bogohulna i rušila bi same temelje Pitagorinog učenja. Legenda kaže da je jednog Pitagorinog učenika naslućivanje o postojanju “neracionalnih” brojeva koštalo glave i da su ga bogovi kaznili morskom olujom te je potonuo zajedno sa svojim čamcem.

Kutak plus

KORIJEN IZ 2 NIJE RACIONALAN BROJ

Broj $\sqrt{2}$ nije racionalan. Dokažimo ovu tvrdnju.

Kad bi $\sqrt{2}$ bio racionalan broj, mogli bismo ga zapisati u obliku količnika dvaju prirodnih brojeva. Pa uzmimo da on to jest, da ga možemo zapisati u obliku razlomka $\frac{m}{n}$, gdje su m i n prirodni brojevi (jer je $\sqrt{2}$ pozitivan broj). Također možemo pretpostaviti da m i n nisu oba parna. Kad bi oni bili takvi, kratili bismo ih sve dok to možemo, dok barem jedan od njih ne bude neparan.

Kvadriramo jednakost $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$ i dobijemo $2 = \frac{m^2}{n^2}$, odnosno $m^2 = 2n^2$. Zaključujemo da je m^2 paran broj. No, onda je i m paran. (Zašto?) **Dakle, *n* je neparan.**

Zapišimo $m = 2k$ pa je $4k^2 = 2n^2$, odnosno $n^2 = 2k^2$. Slijedi n^2 je paran broj, pa je time i ***n* paran**.

No prirodni je broj n ili paran ili neparan; ne može biti jedno i drugo. Do ovog proturječnog zaključka dovela nas je pretpostavka da je $\sqrt{2}$ racionalan broj. Stoga je ta pretpostavka kriva, tj. $\sqrt{2}$ nije racionalan broj.

Riješi zadatke:

1. Dokaži da broj $\sqrt{3}$ nije racionalan broj.

2. Dokaži da broj $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ nije racionalan broj.

Duljina dijagonale spomenutog kvadrata jednaka je $\sqrt{2}$, a taj broj nije racionalan. On se ne može zapisati u obliku omjera dvaju prirodnih brojeva.

Posljednjih desetljeća među stručnjacima u radu na kompjutorima razvilo se nadmetanje u izračunavanju što više decimalnih mjesta nekih iracionalnih brojeva. Tako su oni sa Sveučilišta Columbia u Sjedinjenim Američkim Državama odredili više od milijun decimala broja $\sqrt{2}$. Evo prvih 120 decimala tog mora znamenki:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2} = 1.&41421356237309504880168872420969807856967\\
&18753769480731766797379907324784621070388\\
&50387534327641572735013846230912297024\ldots
\end{aligned}
$$

I pitanje: možeš li na temelju ovog ispisa približne vrijednosti broja $\sqrt{2}$ zaključiti da taj broj nije racionalan? Zašto?

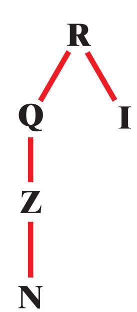
Skup iracionalnih brojeva je beskonačan. U tom se skupu, uz ostale, nalaze i vama poznati brojevi $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ itd. U tom je skupu i čuveni broj π, omjer duljine bilo koje kružnice i njezinog promjera.

Realni brojevi

Svaki je prirodni broj ujedno i cijeli broj. Kažemo da je skup prirodnih brojeva podskup skupa cijelih brojeva.

Svaki je cijeli broj racionalan pa kažemo da je skup cijelih brojeva podskup skupa racionalnih brojeva. Dakako, i svaki je prirodni broj (jer je cijeli) racionalan.

Udruženi u jedan skup, racionalni i iracionalni brojevi čine **skup realnih brojeva**. Skup realnih brojeva označavamo s $\mathbf{R}$.



Međusobni odnosi skupova brojeva mogu se zorno prikazati dijagramom u kojem je skup zapisan na nižoj razini podskup skupa što je na višoj razini i s kojim je povezan crtom. Pozorno razmotrite sliku i protumačite je.

Skup realnih brojeva

Skup realnih brojeva $\mathbf{R}$ sastoji se od racionalnih i iracionalnih brojeva. Svaki realni broj a možemo prikazati u (konačnom ili beskonačnom) decimalnom prikazu:

$$a = a_0.a_1a_2a_3\ldots$$

pri čemu je a_0 cijeli broj, a a_1, a_2, $a_3\ldots$ neke od znamenaka 0, 1,..., 9.

Povijesni kutak

BROJEVI

Prirodni brojevi razvili su se radi praktične potrebe prebrajanja i taj se razvoj odvijao kroz gotovo cijelu ljudsku povijest. U pradavno doba prebrajanje se provodilo uspoređivanjem pa je svakom predmetu u nekom konačnom skupu pridružen jedan kamenčić. Taj je skup onda imao isto onoliko predmeta koliko i skup tim predmetima pridruženih kamenčića. Zanimljivo je primijetiti da suvremen naziv *Calculus* za višu matematiku u engleskom jezičnom području potječe od latinskog *calculus — kamenčić*.

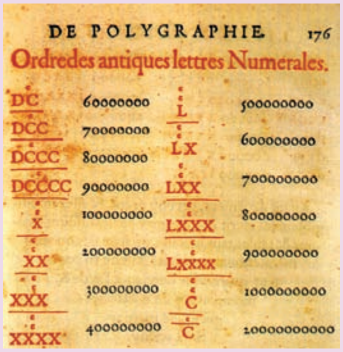
U daljnjem razvoju prebrajanje se provodi tako da se elementima skupa pridružuju točkice ili crtice. Ovaj se postupak ponekad primjenjuje i danas pri zabilješkama uz neke kartaške igre ili kad se provodi glasovanje o nekom izboru ponuđenih mogućnosti. Vjerojatno odatle potječu i prvi znakovi za brojeve.

Suvremen sustav prirodnih brojeva ima dvije osnovne karakteristike, on je **pozicijski** i **dekadski**.

U pozicijskom brojevnom sustavu vrijednost koju nosi pojedina znamenka ovisi o njezinoj poziciji u zapisu broja. Tako, primjerice, u zapisu broja 333 prva znamenka nosi vrijednost $3 \cdot 100 = 300$, druga $3 \cdot 10 = 30$, a treća $3 \cdot 1 = 3$.

U nepozicijskom je sustavu upravo obrnuto i svaka znamenka u zapisu broja nosi istu vrijednost bez obzira na svoj položaj (poziciju). Takav je, između ostalih, i rimski brojevni sustav. U njemu je s X zapisan broj 10 pa je primjerice $XXX = 10 + 10 + 10 = 30$.

Rog jelena s urezanim oznakama za brojeve star je oko 15 000 godina.



DE POLYGRAPHIE 176

Ordredes antiques lettres Numerales.

DC	60000000	L	500000000
DCC	70000000	LX	600000000
DCCC	80000000	LXX	700000000
DCCCC	90000000	LXXX	800000000
X	100000000	LXXXX	900000000
XX	200000000	C	1000000000
XXX	300000000	C	2000000000
XXXX	400000000		

Ova tablica iz 16. stoljeća uspoređuje rimski i suvremeni zapis nekih velikih brojeva.

Gotovo u cijelom svijetu danas se rabi dekadski brojevni sustav. To znači da temeljnu cjelinu pri prebrajanju čini 10 jedinica. Vjerojatni razlog je taj što čovjek na obje ruke ima ukupno 10 prstiju, a prsti su ipak najpraktičniji računski stroj koji svaki čovjek u svakom trenutku ima uza se. U povijesti su poznati i brojevni sustavi s drugim bazama. Tako su se, primjerice, naši dalji preci služili sustavom kojem je baza bio broj 12 (tuce). Poznat nam je i heksadekadski brojevni sustav kakav su koristili Babilonci, a i danas je zadržan pri mjerenju veličine kuta i pri mjerenju vremena.

Uz dekadski, valja spomenuti da je danas osobito važan binarni sustav brojeva, sustav kojem temeljnu cjelinu čine dvije jedinice i u kojem su svega dvije znamenke, 0 i 1. Taj sustav, kao i sustav s bazom 16 (heksadecimalni) usko je vezan uz rad modernih računala.

Čini se da su negativne cijele brojeve i nulu u matematiku uveli Kinezi, premda se danas drži da su oni djelo indijske matematike i da su nastali negdje u 7. i 8. stoljeću i to iz praktične potrebe trgovačkih računanja. Ipak, njihovo sustavno uvođenje u matematiku započinje u ranim godinama 17. stoljeća. Pritom su se javljala i žestoka osporavanja čak i tako uglednih matematičara kao što su Descartes ili Pascal (*Ne postoji manje od nule*), ali su ih mnogi, među njima Leibnitz i Newton, spremno prihvaćali.

Pojam racionalnog broja povijesno je stariji od pojma negativnog cijelog broja. Tako je poznato da su Egipćani razvili razlomke i računali s njima. U Staroj Grčkoj omjeri pozitivnih cijelih brojeva osobito su razmatrani u vezi s raznim geometrijskim zadacima. No ipak, potpuniji razvoj racionalnih brojeva počinje početkom nove ere. Čak štoviše, dekadski razlomci u obliku u kakvom ih danas poznajemo potječu s konca 16. stoljeća.

I konačno, iracionalni, a osobito realni brojevi potječu iz novijeg vremena, a posebice su se njima bavili i razvili njihovu sustavnu teoriju matematičari 19. i s početka 20. stoljeća.

Zadaci 1.1.

1. **1)** Zapiši prirodni broj koji neposredno slijedi iza prirodnog broja n.

2) Zapiši prirodni broj koji neposredno prethodi prirodnom broju $n-2$. Kad zadatak ima rješenje?

3) Zapiši broj koji je za 2 veći od zbroja brojeva m i n.

4) Zapiši broj koji je dvostruko veći od razlike brojeva a i b.

5) Zapiši broj koji je tri puta manji od umnoška brojeva a i b.

2. Ispiši:

1) sve cijele brojeve koji su između cijelih brojeva $k-1$ i $k+5$;

2) sve neparne cijele brojeve koji su veći od $2k-1$ i manji od $2k+7$, gdje je k cijeli broj;

3) sve parne cijele brojeve veće od $2k-5$ i manje od $2k+1$, gdje je k cijeli broj.

3. Zamisli neki broj. Dodaj mu 1 pa zbroj pomnoži s 4. Zatim oduzmi 4 pa dobiveni rezultat podijeli s 4. Koji je broj rezultat?

Ponovi ovaj postupak nekoliko puta. Što primjećuješ? Obrazloži!

4. Neka je d dan, a m mjesec rođenja tvojeg prijatelja. Evo kako ćeš odrediti kojeg je dana njegov rođendan. Zadaj mu neka provede sljedeći račun:

— *Podvostruči broj* d.

— *Pomnoži dobiveni rezultat s 10.*

— *Dodaj 73.*

— *Pomnoži s 5.*

— *Dodaj broj* m.

Neka ti sada prijatelj kaže rezultat koji je dobio. Oduzmi krišom od tog rezultata broj 365 i dobit ćeš datum njegovog rođenja.

Obrazloži matematičku pozadinu ovog općeg rješenja.

5. Odredi četiri uzastopna prirodna broja kojima je zbroj jednak $1\,258$.

6. Zbroj pet uzastopnih parnih prirodnih brojeva jednak je $6\,080$. Koji su to brojevi?

7. Zbroj sedam uzastopnih neparnih prirodnih brojeva jednak je 581. Koji su to brojevi?

8. Koja je posljednja znamenka umnoška
$$1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot 99?$$

9. S koliko nula završava umnožak $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot 33$?

10. Koja je posljednja znamenka umnoška prvih stotinu prostih brojeva?

11. Razlomke $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{15}{16}$ prikaži u obliku decimalnog broja.

12. Brojeve 0.5, 0.25, 0.125, 0.75, 0.625 prikaži u obliku razlomka.

13. Poredaj po veličini brojeve: $\frac{2}{3}$, 66%, 0.666, $0.\dot{6}$.

14. Ako je $\frac{1}{3}=0.\dot{3}$, koliko je $\frac{1}{30}$?

Ako je $\frac{2}{7}=0.\dot{2}8571\dot{4}$, koliko je $2\,\frac{6}{7}$?

15. Odredi period u decimalnom zapisu racionalnog broja:

1) $\frac{5}{6}$; **2)** $\frac{3}{11}$; **3)** $\frac{5}{13}$; **4)** $\frac{6}{7}$.

16. Koja se znamenka nalazi na 101. mjestu iza decimalne točke u decimalnom zapisu svakog od četiriju brojeva iz prethodnog zadatka?

17. Odredi 303. znamenku u dec. zapisu broja $\frac{15}{37}$.

18. Odredi 777. znamenku u dec. zapisu broja $-\frac{111}{11}$.

19. Odredi 1500. znamenku u dec. zapisu broja $\frac{3}{13}$.

20. Koji su od sljedećih brojeva racionalni:
$$-\frac{11}{15},\ \sqrt{17},\ \frac{\pi}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ 5,\ \frac{5}{\sqrt{5}},\ -444?$$

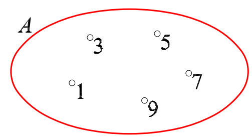
21. Između kojih se dvaju uzastopnih cijelih brojeva nalaze sljedeći brojevi:
$$\sqrt{117},\ -\sqrt{515},\ \frac{5\pi}{3},\ -\sqrt{77},\ \sqrt{777},\ -15\pi?$$

22. Poredaj po veličini brojeve: 3.14, $\frac{22}{7}$, π, $\frac{355}{113}$, $\sqrt{9.9}$.

1.2. Operacije sa skupovima

Pojam skupa

Govorili smo o *skupu* prirodnih brojeva, *skupu* racionalnih brojeva... Što je to *skup*? Poput drugih temeljnih pojmova (npr., broja, točke, pravca i sl.) taj se pojam *ne definira*, jer ga je teško raščlaniti na jednostavnije pojmove, pa to nećemo ni pokušavati. Zadovoljit ćemo se dogovorom da je *skup određen ako je dobro definiran zakon prema kojem određujemo njegove elemente*. Tako je, npr., skup "svih učenika u vašem razredu" dobro definiran. Međutim, skup "svih visokih učenika u vašem razredu" nije dobro definiran, jer nam je nepoznat kriterij "biti visok". Skupove zorno predočavamo Euler-Vennovim dijagramima.



$7 \in A$

Označimo s A skup *neparnih prirodnih brojeva manjih od* 10. Taj je skup dobro definiran, jer za svaki zadani broj znamo odrediti pripada li mu ili ne. Zapisujemo ga unutar vitičaste zagrade, navodeći njegove elemente:

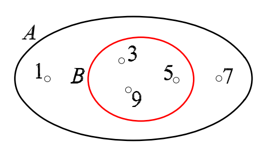
$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\},$$

ili na ovaj način:

$$A = \{n : n \in \mathbf{N} \text{ je neparan}, n < 10\}.$$

Broj 7 pripada ovom skupu; pišemo $7 \in A$. (Čitaj: 7 *je element* skupa A, ili 7 pripada skupu A.) Broj 6 mu ne pripada. Pišemo $6 \notin A$.

Neka je $B = \{3, 5, 9\}$. Svaki element skupa B pripada skupu A. Kažemo onda da je B *podskup* skupa A i pišemo $B \subseteq A$. Ako skup A sadrži barem jedan element koji *ne pripada* skupu B, onda kažemo da je B *pravi podskup* skupa A i pišemo $B \subset A$. U ovom je primjeru, dakle, $B \subset A$.



$B \subset A$

Tako je, primjerice, (obrazloži!)

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}.$$

Primjer 1.

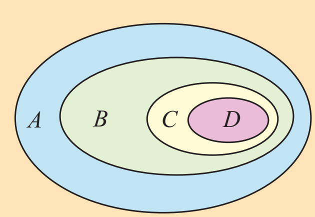
U skupu A svih četverokuta u ravnini izdvojimo podskupove:

$B = \{\text{skup svih paralelograma}\}$,

$C = \{\text{skup svih pravokutnika}\}$,

$D = \{\text{skup svih kvadrata}\}$.

Obrazloži: $D \subset C \subset B \subset A$.



Neka je sada

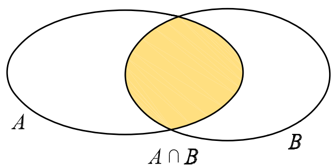
$$A = \{n \in \mathbf{N} : n \text{ je paran}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\},$$
$$B = \{n \in \mathbf{N} : n \text{ je djeljiv s } 3\} = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}.$$

Za ove skupove ne vrijedi ni $A \subseteq B$ ni $B \subseteq A$. Međutim, ovi skupovi ipak imaju neke zajedničke elemente, a to su brojevi 6, 12, 18 itd, tj. brojevi djeljivi sa 6.

Presjek skupova

Presjek skupova A i B je skup $A \cap B$, koji sadrži zajedničke elemente ovih dvaju skupova:

$$A \cap B = \{x : x \in A \quad \text{i} \quad x \in B\}.$$



Za prije navedene skupove je presjek:

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{n \in \mathbf{N} : n \text{ je djeljiv s 2 i s 3}\} \\ &= \{n \in \mathbf{N} : n \text{ je djeljiv sa } 6\} \\ &= \{6, 12, 18, 24, \ldots\}. \end{aligned}$$

Zadatak 1. Ako je V_n skup višekratnika prirodnog broja n, odredi skupove
1) $V_2 \cap V_3$; **2)** $V_5 \cap V_{10}$; **3)** $V_{12} \cap V_{18}$.

Svaki se parni broj može napisati u obliku $2k$, gdje je k cijeli broj. Skup svih parnih cijelih brojeva možemo zapisati u obliku

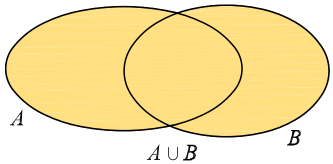
$$A = \{n : n = 2k, \ k \in \mathbf{Z}\}.$$

Oduzmemo li parnom broju 1, dobit ćemo neparan broj. Svaki neparni broj je oblika $2k - 1$. Skup svih neparnih cijelih brojeva je:

$$B = \{n : n = 2k - 1, \ k \in \mathbf{Z}\}.$$

Skupovi A i B nemaju zajedničkih elemenata. Za njih kažemo da su **disjunktni**. Njihov presjek $A \cap B$ je **prazan**. Pišemo: $A \cap B = \emptyset$. $\emptyset$ je oznaka za **prazan skup**, skup koji nema nijednog elementa.

S druge strane, svaki je cijeli broj bilo paran bilo neparan. To znači da se svaki cijeli broj nalazi ili u skupu A ili u skupu B. Kažemo da je **unija** skupova A i B jednaka skupu cijelih brojeva. Općenitije, definiramo:



Unija skupova

Unija skupova A i B je skup $A \cup B$, koji sadrži one elemente koji se nalaze u barem jednom od ovih dvaju skupova:

$$A \cup B = \{x : x \in A \quad \text{ili} \quad x \in B\}.$$

Primjer 2. Za skupove brojeva vrijedi: $\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \emptyset$, $\mathbf{Q} \cup \mathbf{I} = \mathbf{R}$.

Zadatak 2. Ako je D_n skup djelitelja prirodnog broja n, odredi skupove:
1) $D_{12} \cup D_{18}$; **2)** $D_{15} \cup D_{30}$; **3)** $D_{23} \cup D_{41}$.

Zadatak 3. Euler-Vennovim dijagramima uvjeri se u istinitost sljedećih jednakosti:
1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

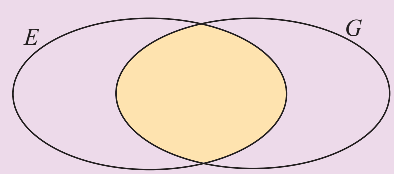
Kutak plus

KOLIKO JE ELEMENATA U SKUPU?

Od 25 učenika nekog razreda njih 20 uči engleski jezik, a 18 njemački jezik. Koliko učenika uči oba jezika ako svaki učenik uči barem jedan od njih?

Očito, kako je $20 + 18 > 25$, onda sigurno ima učenika koji uče oba strana jezika. Označimo s $k(E)$ broj učenika koji uče engleski, a s $k(G)$ broj učenika koji uče njemački jezik. Neka je $n = k(E \cap G)$ broj učenika koji uče oba jezika.

Prikažimo dijagramom te skupove:



Očito je $k(E \cup G) = k(E) + k(G) - k(E \cap G)$ pa imamo jednadžbu $25 = 20 + 18 - n$. Odatle slijedi $n = 13$.

Dakle, oba jezika uči svega 13 učenika, samo engleski uči njih 7, a samo njemački 5.

Riješi zadatke:

1. U nekom je razredu 28 učenika. U razne sportske aktivnosti uključeno ih je 15, a 16 učenika pjeva u pjevačkom zboru škole. Sedam učenika tog razreda niti su među sportašima, niti su članovi pjevačkog zbora. Koliko je učenika ovog razreda uključeno u obje aktivnosti?

2. Učenici nekog razreda uče dva jezika, engleski i njemački. Engleski uče 23 učenika, njemački 19, a oba jezika uči 12 učenika. Koliko je učenika u tom razredu ako svaki uči barem jedan od ova dva jezika?

3. U nekoj udruzi umirovljenika $\frac{3}{4}$ muških članova nosi naočale, a $\frac{2}{3}$ ih je ćelavo. U toj je udruzi 48 muških članova i svaki je ili ćelav ili nosi naočale. Ima li među njima takvih koji su ćelavi, a nose i naočale?

4. Maturalna zadaća iz matematike sastojala se od triju zadataka. Prvi je riješilo 82% učenika koji su pristupili ispitu, drugi i treći po 78%. Prvi i drugi zadatak riješilo je 62% maturanata, prvi i treći 66%, a drugi i treći 60%. Sva tri zadatka točno je riješilo 75 učenika. Koliko je učenika rješavalo ovu zadaću?

5. Od 20 dječaka 14 ih ima smeđe oči, 15 svijetlu kosu, 17 ih je težih od 20 kg, a 18 viših od 1.60 m. Dokaži da su među njima barem četvorica koji imaju sve četiri navedene osobine.

Zadaci 1.2.

1. Ispiši sve elemente ovih skupova:

1) skup svih djelitelja broja 48;

2) skup svih zajedničkih višekratnika brojeva 6 i 9 manjih od 150;

3) skup prostih brojeva manjih od 100;

4) skup svih dvoznamenkastih brojeva čije su znamenke 1, 2 ili 3.

2. Dan je skup

$$S = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0.11, 3.14159, -101, \frac{\pi}{4}, \frac{0.7}{1.23} \right\}.$$

Napiši podskup ovog skupa čiji su elementi iracionalni brojevi.

3. Za prirodni broj n definiramo skup $S_n = \{x \in \mathbf{N} : x < n\}$. Odredi skupove S_1, S_{10} i S_{1000}.

4. Odredi sve skupove X za koje vrijedi $X \subseteq \{a, b, c\}$.

5. Neka je $A \subseteq B$. Čemu su jednaki skupovi $A \cap B$, $A \cup B$?

6. U kojem su međusobnom odnosu sljedeći skupovi:

1) $A = \{n \in \mathbf{N} : n=3k\}$, $B = \{n \in \mathbf{N} : n=6k\}$;

2) $A=\{n \in \mathbf{N} : n=4k-1\}$, $B=\{n \in \mathbf{N} : n=2k+4\}$?

7. Odredi neki skup A tako da vrijedi:

1) $\{1, 2, 3\} \cap A = \{1, 2\}$;

2) $\{1, 2, 3\} \cap A = \emptyset$;

3) $\{1, 2, 3\} \cap A = \{3, 4\}$.

8. Odredi neki skup B tako da vrijedi:

1) $\{1, 2, 3\} \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

2) $\{1, 2, 3\} \cup B = \{1, 2, 3\}$.

9. Elementi skupova A, B i C neki su od prirodnih brojeva koji su manji od 10. Pritom je: $A \cap B = \{3, 8\}$, $A \cap C = \{8, 9\}$, $B \cap C = \{8\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 8, 9\}$, $A \cup C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B \cup C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Odredi skupove A, B i C.

10. Elementi skupova A, B i C neki su od prirodnih brojeva koji su manji od 10. Pritom je: $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{3, 4\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$, $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B \cup C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Odredi skupove A, B i C.

11. Skupovi A, B i C podskupovi su skupa prirodnih brojeva: $A = \{n : n = 2k - 1, k \in \mathbf{N}\}$, $B = \{n : n = 3k, k \in \mathbf{N}\}$, $C = \{n : n = 4k, k \in \mathbf{N}\}$. Odredi skupove $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$.

12. Što se može reći o skupovima A, B, C za koje vrijedi:

1) $A \cup B = A$,

2) $A \cup B = A \cap B$

3) $A \cap B \cap C = A$,

4) $A \cup B \cup C = A$?

13. Odredi $A \cup B$ i $A \cap B$ ako je:

$A = \{x \in \mathbf{N} : 2 < x < 11\}$,

$B = \{x \in \mathbf{N} : 7 \leqslant x \leqslant 17\}$.

14. Odredi $A \cup B$ i $A \cap B$ ako je:

$A = \{x \in \mathbf{Z} : -12 < x < -1\}$,

$B = \{x \in \mathbf{N} : -2 \leqslant x \leqslant 5\}$.

15. Odredi $A \cup B$ i $A \cap B$ ako je:

$$A = \left\{ x \in \mathbf{Q} : 0 < x \leqslant \frac{1}{2} \right\},$$

$$B = \left\{ x \in \mathbf{Q} : -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{4} \right\}.$$

16. Odredi $A \cup B$ i $A \cap B$ ako je:

$$A = \left\{ x \in \mathbf{Q} : -\frac{3}{8} < x \leqslant \frac{5}{7} \right\},$$

$$B = \left\{ x \in \mathbf{Q} : -\frac{4}{9} \leqslant x \leqslant \frac{7}{9} \right\}.$$

17. Obrazloži:

1) $A \cap B \subseteq A$ i $A \cap B \subseteq B$;

2) $A \subseteq A \cup B$ i $B \subseteq A \cup B$;

3) $A \cap B \subset A \cup B$.

18. Odredi skup X tako da vrijedi:

$$\{1, 2, 3, \} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$