1 Skup realnih brojeva

Nakon ovog poglavlja moći ćeš:

- ✓ računati vrijednost brojevnih izraza poštujući redoslijed računskih operacija
- ✓ procjenjivati, zaokruživati i računati u problemskim situacijama
- ✓ uspoređivati realne brojeve rabeći različite strategije
- ✓ računati vrijednost brojevnih izraza poštujući redoslijed računskih operacija
- ✓ procijeniti i računati približnu vrijednost drugog korijena
- ✓ primijeniti računanje pri rješavanju matematičkih problema i problema iz svakodnevnog života
- ✓ istražiti različite strategije i pristupe u novim situacijama te između više rješenja izabrati najbolje

1.1. Skupovi i operacije sa skupovima

Opća obilježja skupa

Skup kao osnovni matematički pojam se ne definira. Prepoznaje se na primjerima u kojima skupina objekata iz života ili matematike ima neko zajedničko svojstvo. Promatrane objekte iz nekog skupa zovemo **elementima**. Dogovorom skup predstavljamo tako da elemente skupa odvajamo zarezom i zapisujemo unutar vitičaste (velike) zagrade. Takve je skupove potrebno označiti jednom oznakom, najčešće velikim slovom latinice.

Primjeri skupova iz života i matematike

- skup učenika II. razreda naše škole
- skup igrača u nogometnoj reprezentaciji Hrvatske 2020. godine
- skup članova obitelji
- skup točaka nekog pravca
- skup realnih brojeva.

Skup je definiran ako se za svaki predloženi element može odrediti pripada li zadanom skupu ili ne. Primjerice, promotrimo skup samoglasnika u našoj abecedi:

$$S = \{a, e, i, o, u\}.$$

Samoglasnik a je element skupa S i pišemo $a \in S$ dok suglasnik m nije element skupa S pa pišemo $m \notin S$. Oznaka $\in$ označava pripadnost nekom skupu i čita se "pripada", odnosno "ne pripada".

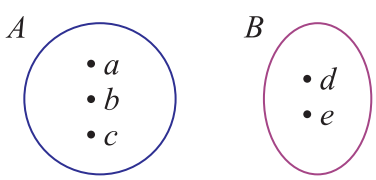
Svaki element skupa zapisuje se samo jednom, a pri tome poredak elemenata nije bitan.

$$\{a, b\} = \{b, a\}$$

Skup možemo zapisati i tako da navedemo obilježje elemenata skupa:

$A = \{a : a$ je učenik naše škole $\}$

U skupu A sadržani su svi učenici i učenice naše škole. Ovakav zapis upotrebljavamo kad je broj elemenata u skupu prevelik ili beskonačan.



Skupovi se mogu prikazivati i grafički tzv. **Vennovim dijagramom**, najčešće kružnicom ili elipsom.

Za skup koji nema elemenata kažemo da je **prazan skup** i pišemo: $S = \emptyset$.

Dijelovi skupova

Neke elemenate skupa možemo razvrstati po određenim obilježjima. Primjerice:

$$A = \{ \text{ skup učenika II. A razreda } \}.$$

Budući da dio učenika u razredu uči engleski jezik, a ostali njemački, uvedimo dva nova skupa:

$E = \{$ učenici koji uče engleski jezik$\}$ i $D = \{$ učenici koji uče njemački jezik$\}$.

Uočavamo da je cijeli skup E sadržan u skupu A. Tada kažemo da je E **podskup** skupa A i pišemo $E \subseteq A$, dok je A **nadskup** skupa E i pišemo $A \supseteq E$. Oznaka $\subseteq$ čita se "podskup". Kad želimo naglasiti da je E podskup od A, ali E i A nisu jednaki, tada kažemo da je E pravi podskup od A i pišemo $E \subset A$. Ako skup B nije podskup skupa C, pišemo $B \not\subseteq C$.

Univerzalni skup

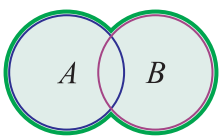
Promatramo li skup svih učenika naše škole, taj skup se sastoji od brojnih podskupova. Svaki razred je poseban podskup danog skupa. Podskupovi mogu biti određeni prema: razredima, stranim jezicima, izbornim predmetima, slobodnim aktivnostima i sl. Svi ti podskupovi (odnosno skupovi) sadržani su u polaznom skupu koji tada zovemo **univerzalni skup**. Univerzalni skup označavamo slovom U i on se određuje ovisno o području koje se promatra. Promijeni li se promatrano područje, mijenja se i univerzalni skup.

Operacije sa skupovima

Operacije sa skupovima su različiti postupci s pomoću kojih iz zadanih skupova nastaju novi skupovi. Najčešće upotrebljavamo: uniju, presjek i razliku skupova.

Zadani su neprazni skupovi A i B. **Unija** skupova A i B skup je svih elemenata koji pripadaju skupu A ili skupu B i označava se s $A \cup B$.

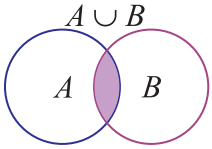
$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ili } x \in B\}$$



$A \cup B$

Presjek skupova A i B je skup svih elemenata koji se nalaze i u skupu A i u skupu B te se označava s $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ i } x \in B\}$$

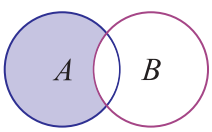


$A \cap B$

U slučaju da skupovi A i B nemaju zajedničkih elemenata njihov je presjek prazan skup i pišemo $A \cap B = \emptyset$.

Razlika skupova A i B je skup koji označavamo sa $A \setminus B$ i sadrži elemente koji jesu u skupu A, a nisu u skupu B.

$$A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$$



$A \setminus B$

Drugim riječima iz skupa A izuzmemo elemente koji pripadaju skupu B.

Ovih nekoliko navedenih svojstava i operacija sa skupovima, a ima ih još mnogo, napisali smo da bismo lakše izražavali i shvatili odnose između beskonačnih skupova brojeva u matematici.

PRIMJER 1.

Zadani su skupovi $A = \{3, 5, 7, 9\}$ i $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Izračunaj $A \cup B$, $A \cap B$ i $A \setminus B$.

▶

$$A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Svaki element u uniji dva skupa, kao i u svakom skupu inače, naznači se samo jednom.

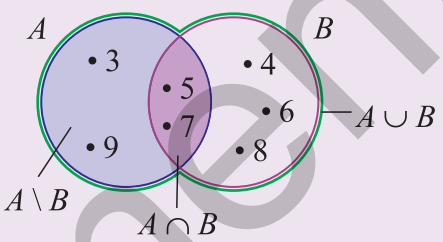
$$A \cap B = \{5, 7\}$$

Samo elementi 5 i 7 su zajednički za oba skupa i A i B.

$$A \setminus B = \{3, 9\}$$

Samo se elementi 3 i 9 nalaze u skupu A, a ne nalaze u skupu B.

Rješenja možemo prikazati i grafički tzv. Vennovim dijagramom.



PRIMJER 2.

Odredimo univerzalni skup čiji su potskupovi skupovi A i B iz primjera 1.

▶

$$U = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

ZADATCI 1.1.

1. Napiši skup rijeka koje prolaze kroz Karlovac.

2. Napiši skup s pet najvećih gradova u Republici Hrvatskoj.

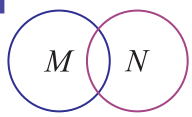
3. Zadani su skupovi $A = \{2, 4, 6\}$ i $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Koja je tvrdnja istinita?

a $B \subset A$ **b** $A \subset B$ **c** $B \in A$ **d** $A \in B$.

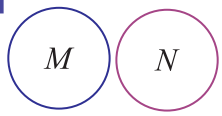
4. Koji crtež prikazuje $M \subset N$?

a

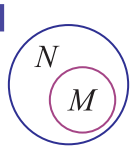
b



c



d



5. Neka je skup $A = \{a,b,c,d,e\}$, a skup $B = \{a,b,d\}$. Nacrtaj Vennov dijagram tako da vrijedi $B \subset A$.

6. Zadani su skupovi: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 4, 5\}$ i $C = \{4, 5, 6\}$. Odredi

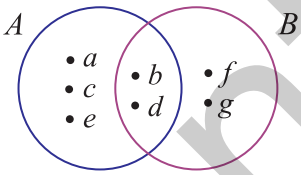
a $A \cup B$ **b** $A \cap B$ **c** $A \setminus B$

d $B \cup C$ **e** $B \cap C$ **f** $B \setminus C$

g $A \cup C$ **h** $A \cap C$ **i** $A \setminus C$.

7. Rezultate zadataka 6. prikaži uz pomoć Vennovih dijagrama.

8. Zadani su skupovi A i B Vennovim dijagramom.



Odredi:

a $A \cup B$ **b** $A \cap B$ **c** $A \setminus B$ **d** $B \setminus A$.

9. Odredi skup B ako je zadan skup $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12\}$. Skupovi A i B nemaju zajedničkih elemenata.

10. Neka je zadan skup $S = \{2, 5, 7, 8\}$. Napiši sve dvočlane podskupove skupa S.

11. Odredi univerzalni skup skupova zadanih u 6. zadatku.

12. Odredi univerzalni skup skupova iz 8. zadatka.

13. **a** Napiši skup naziva svih prstiju na rukama.

b Napiši skup rijeka, rječica i potoka koji prolaze tvojim naseljem.

14. Promotri tvrdnje i za one koje smatraš da nisu istinite pronađi primjere koji potvrđuju tvoju slutnju:

a Za bilo koja dva skupa vrijedi da imaju barem jedan element u presjeku.

b Ako skupovi S i T imaju sve elemente jednake, tada su im unija i presjek jednaki.

c Ako skupovi nemaju zajedničkih elemenata, tada im je unija prazan skup.

d Kad se napravi unija skupa i njegovog podskupa dobiva se upravo taj podskup.

1.2. Skup prirodnih brojeva

Aktivnost
ele-udzbenik.hr

Povijesna je ljudska potreba za prebrojavanjem. Različiti narodi imali su različite oznake i različite riječi koje prate te oznake. Razvojem računanja došlo se do spoznaje da se brojevi mogu prikazivati s pomoću ograničenog broja oznaka. Babilonci su se koristili klinastim pismom. Stari Rimljani upotrebljavali su slova kao brojeve (I, V, X, L, C, D i M). Danas su ti brojevi u upotrebi u izuzetnim situacijama. Indijci su upotrebljavali oznake slične današnjima, a te su oznake Arapi u 10. stoljeću prenijeli u Europu.

Danas se služimo arapskim brojevima i dekadskim brojevnim sustavom, tj. s pomoću deset znamenaka zapisujemo sve brojeve.

Čovjek je prebrojenim članovima nekog skupa pridružio broj koji je nazvao **prirodnim brojem**. **Skup prirodnih brojeva** (lat. *naturalis* – priroda) označavamo pojačanim slovom $\mathbb{N}$ i prikazujemo ovako:

Skup prirodnih brojeva

Skup prirodnih brojeva

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}$$

Brojeve 2, 4, 6, 8, 10, 12. . . nazivamo **parni** brojevi, dok brojeve 1, 3, 5, 7, 9, 11. . . nazivamo **neparni** brojevi. Parni prirodan broj je oblika $2n$, neparni $2n - 1$, pri čemu je $n \in \mathbb{N}$.

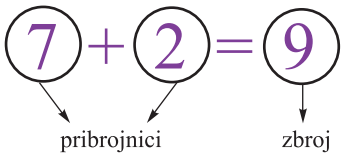
U skupu prirodnih brojeva upotrebljavaju se četiri osnovne računske operacije: zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje. Operacije zbrajanja i množenja uvijek su izvedive, ali oduzimanje i dijeljenje zahtijevaju određene uvjete.

Zbrajanje prirodnih brojeva

Svojstva zbrajanja u skupu $\mathbb{N}$

1. Zbroj dvaju prirodnih brojeva uvijek je prirodan broj
2. Svojstvo komutativnosti
3. Svojstvo asocijativnosti

Brojevi koje zbrajamo zovu se **pribrojnici**, a rezultat zbrajanja zovemo **zbroj** ili suma.



Pri zbrajanju prirodnih brojeva nije bitan slijed, tj. pribrojnici smiju zamijeniti svoja mjesta, pri čemu rezultat ostaje isti. Primjerice:

$$7 + 2 = 2 + 7 = 9.$$

Općenito, za svaka dva prirodna broja a i b vrijedi:

$$a + b = b + a.$$

Ovo svojstvo zbrajanja zovemo **svojstvo komutativnosti** (izmjenjivosti).

Ako u brojevnom izrazu dolaze zagrade, općenito se prvo računaju operacije u zagradama. Međutim, ako za operaciju vrijedi **svojstvo asocijativnosti** (združivanja), zagrada u zadatku smije promijeniti mjesto. I ovo svojstvo vrijedi za zbrajanje prirodnih brojeva, tj. za svaka tri prirodna broja a, b i c vrijedi:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Zato često u izrazu koji sadržava samo pribrojnike izostavljamo zagrade i pišemo $a + b + c$.

PRIMJER 1.

Primjenjujući svojstva zbrajanja, izračunajmo što kraćim putom:

a) $27 + 45 + 13 + 55$ **b)** $356 + 237 + 344 + 263$.

▶ **a)** $27 + 45 + 13 + 55 = (27 + 13) + (45 + 55) = 40 + 100 = 140$

b) $356 + 237 + 344 + 263 = (356 + 344) + (237 + 263) = 700 + 500 = 1200$.

Množenje prirodnih brojeva

Svojstva množenja u skupu $\mathbb{N}$

1. Umnožak dvaju prirodnih brojeva prirodan je broj
2. Svojstvo komutativnosti
3. Svojstvo asocijativnosti
4. Postojanje neutralnog elementa
5. Svojstvo distributivnosti

Brojevi koji se množe zovu se **faktori**, a rezultat množenja zovemo **umnožak** ili **produkt**.

$$\underbrace{2}_{\text{faktori}} \cdot \underbrace{7}_{\text{faktori}} = \underbrace{14}_{\text{umnožak}}$$

Ako faktori pri množenju zamijene svoja mjesta, umnožak se neće promijeniti. Primjerice:

$$2 \cdot 7 = 7 \cdot 2 = 14.$$

Dakle, za množenje prirodnih brojeva vrijedi **svojstvo komutativnosti**, tj. za svaka dva prirodna broja a i b vrijedi:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Kao i kod zbrajanja i za množenje vrijedi **svojstvo asocijativnosti**, tj. za svaka tri prirodna broja a, b i c vrijedi:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Umnožak prirodnog broja a i broja 1 je broj a. To znači da je broj 1 **neutralan element** za množenje.

Sljedeće svojstvo povezuje operacije zbrajanja i množenja, a zove se **svojstvo distributivnosti** (razdijelnosti) množenja prema zbrajanju:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$$

gdje su a, b i c bilo koja tri prirodna broja.

PRIMJER 2.

Primjenjujući svojstva množenja, izračunajmo što kraćim putom:

a) $2 \cdot 25 \cdot 5 \cdot 4$ **b)** $4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 50 \cdot 25 \cdot 125$.

▶ **a)** Jedan od načina primjene svojstava množenja je ovaj:
$2 \cdot 25 \cdot 5 \cdot 4 = (2 \cdot 5) \cdot (25 \cdot 4) = 10 \cdot 100 = 1000$

b) $4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 50 \cdot 25 \cdot 125 = (4 \cdot 25) \cdot (4 \cdot 50) \cdot (8 \cdot 125) = 100 \cdot 200 \cdot 1000 = (100 \cdot 1000) \cdot 200 = 100\,000 \cdot 200 = 20\,000\,000$.

Oduzimanje prirodnih brojeva

U skupu prirodnih brojeva oduzimanje je izvedivo samo ako od većeg broja oduzimamo manji. Broj od kojeg oduzimamo zovemo **umanjenik**, a broj koji oduzimamo zovemo **umanjitelj**. Rezultat oduzimanja zovemo **razlika** ili diferencija.

$$\underbrace{25}_{\text{umanjenik}} - \underbrace{10}_{\text{umanjitelj}} = \underbrace{15}_{\text{razlika}}$$

Rezultat dobiven oduzimanjem možemo provjeriti tako da zbrojimo razliku i umanjitelja. Zbroj mora biti jednak umanjeniku. U ovom primjeru je $10 + 15 = 25$.

Za operaciju oduzimanja ne vrijede svojstva komutativnosti ni asocijativnosti. Ali, svojstvo distributivnosti množenja prema oduzimanju vrijedi:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c.$$

Dijeljenje prirodnih brojeva

Broj koji dijelimo zove se **djeljenik** ili dividend. Broj kojim dijelimo zove se **djelitelj** ili divizor. Rezultat dijeljenja zove se **količnik**, omjer ili kvocijent.

$$\underset{\text{djeljenik}}{18} : \underset{\text{djelitelj}}{2} = \underset{\text{količnik}}{9}$$

Rezultat dijeljenja možemo provjeriti tako da pomnožimo količnik i djelitelj. Rezultat mora biti jednak djeljeniku.

Očito je da dijeljenje nije uvijek izvedivo u skupu $\mathbb{N}$. Ne vrijede ni svojstva komutativnosti ni asocijativnosti.

Ako u računskom zadatku dolazi više operacija dijeljenja za redom, one se računaju slijeva nadesno, redom kako su naznačene.

Više o ovome
ele-udzbenik.hr

PRIMJER 3.

Izračunajmo: $64 : 4 : 2$.

▶ $64 : 4 : 2 = 16 : 2 = 8$ **ispravno**

$64 : 4 : 2 = 64 : 2 = 32$ **neispravno**

Slijed računskih operacija

Pri izvođenju više različitih računskih operacija vrijede sljedeća pravila:

1. Ako su u brojevnom izrazu zadane zagrade, prvo se izračunava unutarnja ("najdublja") zagrada, a zatim iznutra prema van ostale.
2. Ako u brojevnom izrazu nema zagrada, prvo se računaju operacije višeg prioriteta: množenje i dijeljenje, tek onda zbrajanje i oduzimanje.
3. Ako nema zagrada, a operacije su istog prioriteta, izvode se slijeva nadesno, osim kad primjena svojstava komutativnosti i asocijativnosti olakšava računanje.

ZADATCI 1.2.

1. Izračunaj primjenjujući svojstva zbrajanja:

a $12 + 35 + 18 + 75$

b $37 + 12 + 43 + 28$

c $135 + 225 + 47 + 163$

d $1234 + 278 + 6 + 2$.

2. Pronađi pogreške, ako postoje, u danim računima. One račune koji su pogrešni riješi ispravno u bilježnici.

a
$$\begin{array}{r} 123 \\ +\ 12 \\ \hline 243 \end{array}$$

b
$$\begin{array}{r} 505 \\ +\ 505 \\ \hline 5555 \end{array}$$

c
$$\begin{array}{r} 4156 \\ -\ 413 \\ \hline 26 \end{array}$$

3. Izračunaj:

a $27 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 3$ **b** $25 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2$

c $142 \cdot 7 \cdot 50$ **d** $3 \cdot 100 \cdot 4 \cdot 100$.

4. Izračunaj primjenjujući svojstva množenja:

a $11 \cdot 2 \cdot 5$ **b** $37 \cdot 15 \cdot 2$ **c** $4 \cdot 327 \cdot 25$

d $25 \cdot 11 \cdot 4 \cdot 3$ **e** $8 \cdot 7 \cdot 75 \cdot 10$ **f** $125 \cdot 13 \cdot 4 \cdot 26$.

5. Koristeći se svojstvima zbrajanja i množenja, izračunaj na najbrži mogući način:

a $173 \cdot 10 + 28 \cdot 10$ **b** $72 \cdot 15 + 72 \cdot 19$ **c** $451 \cdot 23 + 451 \cdot 57$

d $99 \cdot 27 + 121 \cdot 27$ **e** $3 \cdot 17 + 14 \cdot 17 + 15 \cdot 17$ **f** $34 \cdot 21 + 20 \cdot 21 + 21 \cdot 86$.

6. Ante je radio 3 dana po 8 sati na dan, Jurica 4 dana po 7 sati dnevno, dok je Miro radio 5 dana po 10 sati dnevno. Ako je cijena jednog radnog sata 14 kuna, koliko su ukupno kuna zaradili?

a 1428 kn **b** 1400 kn **c** 2820 kn **d** 1548 kn.

7. U zgradi postoje tri jednosobna stana površine $45\,m^2$, pet dvosobnih stanova od $54\,m^2$, te dva trosobna stana površine $76\,m^2$. Ako je mjesečna cijena grijanja $1\,m^2$ stana 8 kuna, koliki je mjesečni račun za grijanje cijele zgrade?

a 7656 kn **b** 4456 kn **c** 1222 kn **d** 6680 kn.

8. Prosječna mjesečna potrošnja vode po osobi je 4000 litara. Ako u zgradi živi 10 dvočlanih obitelji, 12 tročlanih, 7 četveročlanih i jedna šesteročlana obitelj, kolika je prosječna mjesečna potrošnja vode u toj zgradi?

a 144 000 l **b** 140 000 l **c** 180 000 l **d** 360000 l.

9. Za popunjavanje zaliha medicinksih potrepština u poliklinici nabavljeno je 200 kutija sterilnih kompresa po cijeni 12 kn/kutiji, 4 kutije širokih zavoja po cijeni 284 kn/kutiji, 8 kutija uskih zavoja po cijeni 312 kn/kutiji, 18 litara medicinskog alkohola po cijeni 72 kn/l. Koliko je ukupno iznosio račun za ovu nabavu?

10. Izračunaj na najbrži način:

a $123 \cdot 10 - 75 \cdot 10$ **b** $291 \cdot 15 - 105 \cdot 15$

c $457 \cdot 11 - 327 \cdot 11$ **d** $221 \cdot 29 - 29 \cdot 101$

e $257 \cdot 27 - 133 \cdot 27 + 27 \cdot 42$ **f** $394 \cdot 123 + 451 \cdot 123 - 700 \cdot 123$.

11. Otkrij pogrešku u računu (tamo gdje postoji), a onda izračunaj točno.

a $123 \cdot 19 + 23 \cdot 19 = (123 - 23) \cdot 19 = 100 \cdot 19 = 1900$

b $13 \cdot 505 + 505 = 505 \cdot (13 + 0) = 505 \cdot 13 = 6565$

c $823 \cdot 25 - 823 \cdot 5 - 823 = 823 \cdot (25 - 5) = 823 \cdot 20 = 164\,460$

12. Izračunaj:

a $5 + 3 \cdot 5$ **b** $3 \cdot 7 - 5 \cdot 2$ **c** $(3 + 7) \cdot 5 - 2$

d $5 + 3 \cdot (5 - 3)$ **e** $(7 - 2) \cdot (7 - 3)$ **f** $17 - 2 \cdot 7 + 3$

g $10 + 9 \cdot 2 + 7$ **h** $(10 + 9) \cdot (2 + 7)$ **i** $10 + 9 \cdot (2 + 7)$.

13. Izračunaj:

a $(4 + 5) \cdot 8 + 12 \cdot (15 + 11)$ **b** $4 + 5 \cdot 8 + 12 \cdot 15 + 11$

c $4 + (5 \cdot 8 + 12) \cdot 15 + 11$ **d** $4 + 5 \cdot (8 + 12 \cdot 15) + 11$

e $(9 + 17) \cdot 21 + 35 \cdot (63 + 79)$ **f** $9 + 17 \cdot 21 + 35 \cdot 63 + 79$

g $9 + (17 \cdot 21 + 35) \cdot 63 + 79$ **h** $9 + 17 \cdot (21 + 35 \cdot 63) + 79$.

14. Izračunaj:

a $(189 : 3 - 27) : 6$ **b** $(225 : 9 + 15) : 10$

c $(324 : (36 : 2)) : (3 \cdot 3)$ **d** $1000 - (10\,000 : 100) \cdot 9$

e $(392 : 7 - 12) : 4 + 6$ **f** $298 - (1440 : 12 - 10) : 11$

g $1024 : 256 + 128 \cdot 2 : 32$ **h** $1 + 999 : 3 - 2 \cdot 49 : 7$.

1.3. Skup cijelih brojeva

Već smo uočili da oduzimanje prirodnih brojeva nije uvijek izvedivo. Zato skup $\mathbb{N}$ moramo proširiti dodajući nulu i negativne cijele brojeve.

U prirodi susrećemo negativne brojeve. Temperatura je u hladnim zimskim danima ispod nule. Razine nekih jezera su ispod srednje razine mora (nule). Račun u banci može biti "u minusu" ako štediša potroši više novca nego što je imao na računu.

Skup cijelih brojeva označavamo pojačanim slovom $\mathbb{Z}$ (njem. *Zahl* – broj) i simbolima predstavljamo ovako:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$