5 Eksponencijalne i logaritamske jednadžbe

Potres u San Francisku 1906. godine.

Dosad smo u srednjoj školi upoznali više funkcija. Nekima od njih, a takve su, primjerice, polinomi prvog i drugog stupnja, vrijednosti možemo izračunavati primjenom četiriju osnovnih algebarskih operacija te operacija potenciranja i korjenovanja. Takve se funkcije zovu **algebarske**.

U ovom poglavlju srest ćemo se s dvjema novim funkcijama, eksponencijalnom i logaritamskom, koje prelaze te okvire jer se njihove vrijednosti ne mogu izračunavati na opisani način. Takve su funkcije **transcedentne**.

U uvodu ćemo ponoviti ono što smo dosad učili o potencijama.

5.1. Eksponencijalna funkcija

Potencije i njihova svojstva

U prvom smo razredu upoznali potencije čiji su eksponenti cijeli ili racionalni brojevi.

Ako je $a > 0$ realan, a n prirodan broj, onda je

$$a^2 = a \cdot a, \quad a^3 = a \cdot a \cdot a = a^2 \cdot a \quad \dots \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ puta}} = a^{n-1} \cdot a.$$

Broj a je **baza**, a broj n **eksponent** potencije a^n.

Iz definicije neposredno slijede ova osnovna svojstva potencija:

(E$_1$) $\quad a^x \cdot a^y = a^{x+y}$,

(E$_2$) $\quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$,

(E$_3$) $\quad (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$.

Potom smo uveli potencije čiji je eksponent negativan cijeli broj

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$

pri čemu je $a > 0$ i $n \in \mathbf{N}$.

Nadalje, uz primjenu svojstva **(E$_1$)** vrijedi:

$$a^0 = a^{n-n} = a^n \cdot a^{-n} = a^n \cdot \frac{1}{a^n} = 1.$$

Ovo ćemo važno svojstvo potencija također posebno istaknuti:

(E$_4$) $\quad a^0 = 1$.

Potenciranje pozitivnog broja a recipročnim brojem prirodnog broja n povezali smo s korijenom broja a:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Zatim smo uveli pojam potencije čija je baza a pozitivan broj, a eksponent bilo koji racionalan broj. Ako je $x = \dfrac{m}{n}$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, tada stavljamo:

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Računanje s ovakvim potencijama posjeduje sva svojstva $\mathbf{E}_1$–$\mathbf{E}_4$.

Tako smo definirali potenciju a^x za sve pozitivne brojeve a te racionalne brojeve x.

Zadatak 1. Obrazloži sljedeće dvije jednakosti:

1) $4^{-0.75} + 8^{-\frac{1}{6}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$; **2)** $\sqrt{12} \cdot \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[6]{12} = 12$.

Zadatak 2. Izračunaj vrijednost brojevnog izraza $\left[\left(a^{-\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{4}}\right)^3 : \left(a^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}\right]^{-3}$ ako je $a = \frac{1}{2}$, $b = 16$.

Eksponencijalna funkcija

Ako je a zadana baza, $a > 0$ i $a \neq 1$, a x bilo koji racionalan broj, onda vrijednost potencije a^x ovisi o x. Možemo govoriti o funkciji koja racionalnom broju x pridružuje vrijednost potencije a^x,

$$x \mapsto a^x.$$

Definicija te funkcije može se proširiti i na realne brojeve te je za svaki realni broj x definirana funkcija

$$f(x) = a^x,$$

koju zovemo **eksponencijalna funkcija**.

Primjer 1. Funkcija $f(x) = 2^x$ primjer je eksponencijalne funkcije. Za realni broj x vrijednost funkcije jednaka je 2^x.

Tako je

$$f(3) = 2^3 = 8, \qquad f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}, \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

U svakom od triju primjera umjesto x uvrštavali smo samo probrane brojeve. Jer općenito, bez pomoći kalkulatora ili tablica nije moguće izračunavati vrijednosti potencije 3^x.

Koliko je, primjerice, $f\left(\frac{3}{5}\right)$? Odnosno, koliko je $3^{\frac{3}{5}}$?

$$3^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{3^3} = \sqrt[5]{27}.$$

Vrijednosti funkcije $f(x) = 3^x$ (i ne samo nje) u pravilu se određuju računalom. Kako, o tome će još biti riječi. No primijetite kako je na slici računalom dobiveno $3^{\frac{3}{5}} \approx 1.933182045$.

Eksponencijalna funkcija

Neka je $a > 0$ i $a \neq 1$ realan broj. Funkcija $f(x) = a^x$ definirana za svaki realni broj x zove se **eksponencijalna funkcija**.

Zašto se zahtijeva da baza potencije bude pozitivan broj? Ako bismo dopustili da je baza negativan broj, tada potencije kao što su, primjerice, $(-2)^{-\frac{1}{4}}$, $(-3)^{\frac{3}{8}}$ i slične ne bi bile realni brojevi.

Ako bi pak baza bila jednaka nuli, tada bi vrijedilo $0^x = 0$ za svaki realni broj x osim za $x = 0$, kada ta potencija i nije definirana.

Jednako tako je $1^x = 1$ za svaki realni broj x. Dakle, funkcija $f(x) = 1^x = 1$ je konstanta pa je zbog toga uvedeno i ograničenje $a \neq 1$.

Zadatak 3. Ako je dana eksponencijalna funkcija $f(x) = 4^x$, koliko je: $f(2)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(-\frac{3}{2}\right)$, $f(0)$, $f(0.25)$?

Neka je baza eksponencijalne funkcije $a > 1$.

Tada za svaki pozitivan racionalni eksponent $x > 0$ vrijedi $a^x = \frac{m}{n} > 1$. Naime, $a^x = \sqrt[n]{a^m}$, a kako je $a^m > 1$, onda je i $\sqrt[n]{a^m} > 1$.

Uzmimo da je $x_1 < x_2$. Uz primjenu svojstva $\mathbf{E}_1$ imamo:

$$a^{x_2} = a^{(x_2 - x_1) + x_1} = a^{x_2 - x_1} \cdot a^{x_1} > a^{x_1},$$

jer je $x_2 - x_1 > 0$ i $a^{x_2 - x_1} > 1$.

Time smo dokazali i sljedeće *svojstvo monotonosti eksponencijalne funkcije*:

($\mathbf{E}_5$) Ako je $a > 1$, onda za racionalne brojeve $x_1 < x_2$ vrijedi $a^{x_1} < a^{x_2}$.

Zadaci 5.1.

1. Obrazloži svojstva potencija **(E** $_1$**)–(E** $_3$**)** za slučaj kada su x i y prirodni brojevi.

2. Zapiši u obliku potencije:

1) $10 \cdot 100^2 \cdot 1000^3$; **2)** $(9^3 \cdot 3 \cdot 27^2)^3$;
3) $(16 \cdot 4^3 \cdot 8^2)^5$; **4)** $3^7 + 6 \cdot 3^6$;
5) $9 \cdot 27^3 + 2 \cdot 3^{11}$; **6)** $2^6 \cdot 5^4 + 6 \cdot 10^4$.

3. Napiši u obliku potencija s osnovicom a:

1) $(a^{n+1})^2 \cdot (a^{2n+1})^2 \cdot (a^{3n+1})^2$;
2) $(a^{3n-1})^2 \cdot (a^{3n-1})^3 \cdot (a^{3n-1})^4$;
3) $(a^3)^{2n+1} \cdot (a^4)^{2n+1} \cdot (a^5)^{2n+1}$;
4) $(a^{n+2})^3 \cdot (a^{n+1})^3 \cdot (a^n)^3$;
5) $a^{n+1} \cdot (a^{n+1})^2 \cdot (a^{n+1})^3$.

4. Izračunaj:

1) $4^{3n+2} : 8^{2n+1}$; **2)** $36^{n+3} : 6^{2n+5}$;
3) $9^{3n+2} : 27^{2n+2}$; **4)** $\dfrac{3^{2n-4} \cdot 7^{n-1}}{63^{n-1}}$;
5) $\dfrac{28^{n+2}}{2^{2n+4} \cdot 7^{n-1}}$; **6)** $\dfrac{36^{2n+1}}{16^n \cdot 3^{4n}}$.

5. Izračunaj:

1) $\left(\dfrac{8a^{-3}}{b^{-2}}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{b}{8a^{-2}}\right)^3$;
2) $\left(\dfrac{25}{a^{-2}b}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{5a^3}{b^2}\right)^{-2}$;
3) $(4x^2y^{-3})^3 : \left(\dfrac{1}{16x^3y^{-1}}\right)^{-2}$;
4) $\left(\dfrac{0.25x^3y^{-2}}{27z^{-2}}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{9x^{-2}}{4y^2z^3}\right)^{-3}$;
5) $\left(\dfrac{9a^{-2}}{16b^3c^{-1}}\right)^{-3} : \left(\dfrac{8a^3c^{-2}}{27b^{-5}}\right)^2$.

6. Skrati razlomke:

1) $\dfrac{2^{m-1} \cdot 3^n - 2^m \cdot 3^{n-1}}{2^{m-2} \cdot 3^{n-2}}$;
2) $\dfrac{5^n \cdot 2^{n-1} - 5^{n-1} \cdot 2^n}{10^{n+1}}$;
3) $\dfrac{2^{n-1} \cdot 3^{n+1} - 2^{n+1} \cdot 3^{n-1}}{2^n \cdot 3^{n-1} + 2^{n-1} \cdot 3^n}$;
4) $\dfrac{2^{2n} \cdot 3^{3n} - 2^{3n} \cdot 3^{2n}}{12^n - 18^n}$.

7. Provedi naznačene računske operacije i rezultat izrazi u znanstvenom zapisu:

1) $9.1 \cdot 10^{-5} + 5.2 \cdot 10^{-5}$;
2) $6.9 \cdot 10^8 + 7.8 \cdot 10^9$;
3) $3.5 \cdot 10^{-4} \cdot 7.6 \cdot 10^{-4}$;
4) $5.5 \cdot 10^{-4} \cdot 9.2 \cdot 10^{-5}$;
5) $7.4 \cdot 10^8 : 1.2 \cdot 10^{11}$;
6) $6.6 \cdot 10^{-10} : 4.4 \cdot 10^{-15}$.

8. Izračunaj:

1) $(-125)^{-3} \cdot (-25)^{-4}$;
2) $(-4)^{-4} \cdot (-8)^{-3}$;
3) $(-9)^{-3} : \left(-\dfrac{1}{27}\right)^{-3}$;
4) $(-0.1)^{-4} : (-100)^{-3}$;
5) $-10^{-3} \cdot (-0.1^{-2})^3 \cdot (-0.01^{-3})^{-2}$;
6) $-\dfrac{1}{100^{-2}} \cdot \dfrac{1}{0.01^3} \cdot \dfrac{10^{-2}}{0.001^2}$.

9. Polumjer točke koju ostavi pritisak olovke na papiru iznosi 0.00000005 metara. Koliki je promjer točke? Izrazi rezultat u znanstvenom zapisu.

10. Za koliko će vremena svemirski broj koji putuje brzinom od $1.5 \cdot 10^5$ km/s prijeći put od $4.5 \cdot 10^{12}$ km?

11. Brzina svjetlosti je $3 \cdot 10^8$ metara u sekundi. Ako je udaljenost Sunca od Zemlje 93 milijuna milja (1 milja = 1.6 km), za koliko će vremena svjetlost sa Sunca stići do Zemlje?

12. Ako je masa atoma vodika $1.7 \cdot 10^{-24}$ grama, koliko je atoma vodika u masi od jednog kilograma?

13. Izračunaj:

1) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$; **2)** $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$;
3) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{3}$; **4)** $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{9}$;
5) $\sqrt[3]{9} : \sqrt{3}$; **6)** $\sqrt[4]{8} : \sqrt[3]{4}$;
7) $\sqrt{5 \cdot \sqrt{5}}$; **8)** $\sqrt{4 \cdot \sqrt[3]{4}}$.

14. Izračunaj:

1) $\sqrt{\sqrt[5]{x^3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^3}}$; **2)** $\sqrt[3]{\sqrt{x^9}}\cdot\sqrt{\sqrt{x^6}}$;
3) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^8}} : \sqrt[9]{\sqrt{x^3}}$; **4)** $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}} : \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^4}}$.

15. Pojednostavni:

1) $\left(\sqrt[3]{x^2\cdot\sqrt{x}} : \sqrt{x\cdot\sqrt{x}}\right)\cdot\sqrt[3]{x^2}$;
2) $\left(\sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x^2}} : \sqrt{x\cdot\sqrt{x}}\right)\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[4]{x}}$;
3) $\left(\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[n]{x^5}}\right)^3 : \left(\sqrt[n]{x^2\cdot\sqrt{x}}\right)^2$;
4) $\left(\sqrt[n]{x\cdot\sqrt[3]{x}}\right)^3 : \left(\sqrt{x\cdot\sqrt[n]{x^4}}\right)^2$;

16. Napiši u obliku potencije:

1) $\sqrt[3]{4}$; **2)** $\sqrt[4]{27}$; **3)** $\dfrac{2}{\sqrt[5]{8}}$;
4) $\dfrac{1}{\sqrt{125}}$; **5)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{8^3}}$; **6)** $\sqrt[4]{\dfrac{1}{2^5}}$;
7) $\sqrt[3]{(a-2)^2}$; **8)** $\sqrt[4]{a^2-b^2}$.

17. Zapiši pomoću korijena sljedeće potencije:

1) $2^{-\frac{1}{2}}$; **2)** $3^{-1.5}$;
3) $5^{\frac{2}{3}}$; **4)** $(a^{\frac{1}{2}}-1)^{\frac{1}{2}}$;
5) $(a^2-1)^{\frac{2}{3}}$; **6)** $a^{\frac{1}{4}}\cdot b^{-\frac{3}{4}}$.

18. Izračunaj:

1) $81^{\frac{1}{2}}$; **2)** $81^{-\frac{1}{4}}$;
3) $0.0625^{\frac{1}{4}}$; **4)** $32^{\frac{1}{5}}+(-8)^{\frac{1}{3}}$;
5) $\sqrt[10]{32^2}$; **6)** $\sqrt[3]{(-2)^3}$.

19. Izračunaj:

1) $0.25^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0.5}$;

2) $0.04^{-1.5}\cdot\left(\dfrac{1}{125}\right)^{\frac{2}{3}}$;

3) $16^{0.5}+\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0.75}$;

4) $(0.81)^{-0.5}+\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

5) $\left(\dfrac{16}{25}\right)^{-\frac{3}{2}}-(0.064)^{-\frac{2}{3}}$;

6) $27^{-\frac{2}{3}}-\left(5\dfrac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$.

20. Izračunaj vrijednost brojevnog izraza

$$\left[(a^{-\frac{1}{3}}b)^{-1.5} : (a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{4}}\right]^{-\frac{1}{3}},$$

za $a=16,\ b=\dfrac{8}{27}$.

21. Izračunaj vrijednost brojevnog izraza

$$\left[(a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{-2})^{0.75} : (a^{-\frac{1}{2}}\cdot b^{3})^{-\frac{1}{2}}\right]^{-3},$$

za $a=\dfrac{16}{81},\ b=0.01$.

22. Izračunaj vrijednost brojevnog izraza

$$\left[(a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{-2})^{-\frac{1}{2}} : (ab^{-3})^{\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{3}{4}}$$

ako je $a=0.64,\ b=\dfrac{4}{25}$.

23. Izračunaj:

1) $\dfrac{24^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{9}}{\sqrt{0.25}}$; **2)** $\dfrac{18^{\frac{3}{2}}\cdot 2^{0.5}}{6\cdot\sqrt{72}}$;

3) $\dfrac{48^{-\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[4]{27}}{\sqrt[3]{0.125}}$; **4)** $\dfrac{45^{1.5}\cdot 0.6^{-3}}{\sqrt{125}}$;

5) $\dfrac{54^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{4}}{81^{-0.75}}$; **6)** $\dfrac{72^{-\frac{1}{3}}}{0.25^{-\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[3]{81}}$.

24. U kojem su međusobnom odnosu realni brojevi m i n, ako je

1) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^m > \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$; **2)** $2^m > 2^n$;
3) $0.2^m < 0.2^n$; **4)** $4^m = 4^n$;
5) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^m < \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$; **6)** $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^m > \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$;
7) $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^m < \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^n$; **8)** $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^m > \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^n$?

5.2. Graf i svojstva eksponencijalne funkcije

Način na koji zapisujemo brojeve daje naslutiti kako će baza $a = 10$ imati posebnu ulogu u računanju potencija. Naime, dekadski zapis brojeva upravo se zasniva na računanju s potencijom broja 10.

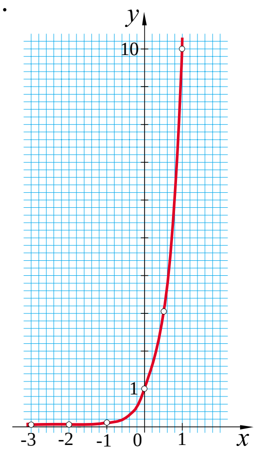
Promotrimo zato potencije oblika 10^x.

Graf funkcije $x \mapsto 10^x$

Skicirajmo graf funkcije $f(x) = 10^x$. U tu ćemo svrhu izračunati njezine vrijednosti za nekoliko odabranih vrijednosti x.

x	10^x
-3	$10^{-3} = 0.001$
-2	$10^{-2} = 0.01$
-1	$10^{-1} = 0.1$
0	$10^0 = 1$
0.5	$10^{0.5} = \sqrt{10} = 3.16$
1	$10^1 = 10$
1.5	$10^{1.5} = \sqrt{1000} = 31.6$
2	$10^2 = 100$

Primijetimo da su vrijednosti funkcije u točkama 0.5 i 1.5 određene približno, jer su $\sqrt{10}$ i $\sqrt{1\,000}$ iracionalni brojevi.



Graf potencije 10^x.

Vidimo da ova eksponencijalna funkcija raste vrlo brzo za pozitivne brojeve x. Crtano u mjerilu $1 : 1$, za $x = 10\,\text{cm}$ koordinata y iznosi $10^{10}\,\text{cm} = 10^5\,\text{km}$. Za negativne argumente x funkcija pada prema nuli, također vrlo brzo. Njezin se graf priljubljuje uz negativni dio x osi. Kažemo da je negativni dio x osi **asimptota** grafa eksponencijalne funkcije.

Graf funkcije 10^x u različitim mjerilima

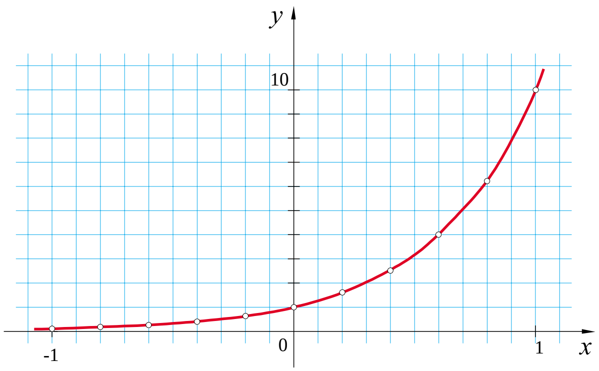
Grafove funkcija koje rastu vrlo brzo možemo lakše predočiti tako da uporabimo različita mjerila na koordinatnim osima. Nacrtajmo sad graf eksponencijalne funkcije na intervalu $[-1, 1]$ izabravši jedinice na koordinatnim osima tako da jednoj jedinici na x osi odgovara deset jedinica na y osi.

Pritom ćemo pomoću računala računati vrijednosti eksponencijalne funkcije u racionalnim točkama. Broj 10^x računa se na džepnom računalu na sljedeći način:

- unese se vrijednost broja x,
- pritisne se tipka $\boxed{10^x}$.

Dobivene ćemo vrijednosti zapisati s dvjema znamenkama.

x	10^x
-1	0.1
-0.8	0.16
-0.6	0.25
-0.4	0.40
-0.2	0.63
0	1
0.2	1.6
0.4	2.5
0.6	4.0
0.8	6.3
1	10



Graf funkcije 10^x, *crtan u mjerilu 10:1.*

Nacrtani graf predstavlja funkciju koja je definirana u svakom realnom broju x, dakle i u iracionalnim brojevima. Da vidimo je li takav postupak ispravan, načinimo sljedeće razmatranje.

Izaberimo neki iracionalni broj, recimo $\sqrt{2}$. Njega možemo zapisati samo s određenom točnošću, jer je njegov decimalni zapis beskonačan. Ako računamo na dvije decimale, tada ćemo zapisati:

$$1.41 < \sqrt{2} < 1.42\,.$$

Želimo da svojstva eksponencijalne funkcije ostanu sačuvana. Zato po $\mathbf{E}_4$ mora vrijediti:

$$10^{1.41} < 10^{\sqrt{2}} < 10^{1.42},$$

odnosno:

$$25.70 < 10^{\sqrt{2}} < 26.30\,.$$

Ocjena je neprecizna jer funkcija $x \mapsto 10^x$ raste jako brzo, a uzeli smo grubu aproksimaciju broja $\sqrt{2}$. Popravimo je! Iz ocjene

$$1.41421 < \sqrt{2} < 1.41422$$

slijedi:

$$25.95434 < 10^{\sqrt{2}} < 25.95493.$$

Vidimo da smo dobili broj $10^{\sqrt{2}}$ s pet točnih znamenaka, $10^{\sqrt{2}} = 25.954\cdots$.

Kad se broj $10^{\sqrt{2}}$ računa na računalu koje zapisuje brojeve s 10 znamenaka, tada računalo koristi aproksimaciju

$$1.41421356237 < \sqrt{2} < 1.41421356238$$

(prebrojite broj znamenaka!), a na zaslonu se pokaže vrijednost

$$\boxed{2}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{10^x}\ \boxed{=} \qquad 25.95455352,$$

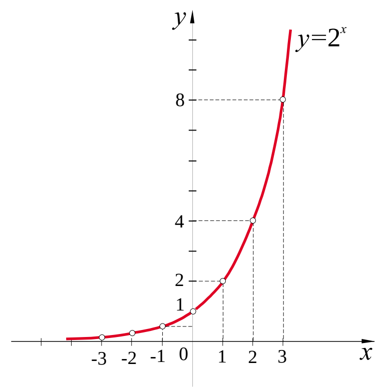
s deset točnih znamenaka. Naravno, i ovo je samo približna vrijednost broja $10^{\sqrt{2}}$ jer je to iracionalan broj. Pri zapisivanju iracionalnih brojeva izračunatih na računalu rezultate ćemo zaokruživati na 2–5 točnih znamenaka.

Na ovakav način, koristeći racionalne eksponente, vrijednost potencije 10^x možemo s dovoljnom točnošću izračunati za svaki iracionalni broj x. Za to je dovoljno uzeti bliske decimalne brojeve x_1 i x_2 takve da vrijedi $x_1 < x < x_2$. Onda će biti: $10^{x_1} < 10^x < 10^{x_2}$.

Graf eksponencijalne funkcije $x \mapsto a^x$

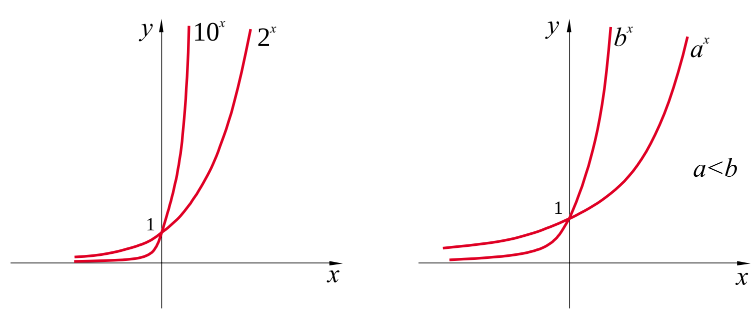
Baš kao za $a = 10$, možemo nacrtati graf funkcije a^x za druge vrijednosti baze a. Nacrtajmo graf funkcije $f(x) = 2^x$.

x	2^x
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



Graf funkcije 2^x.

Vidimo da i ova funkcija ima graf sličan grafu funkcije $x \mapsto 10^x$, samo što ona za pozitivne realne brojeve $x > 0$ raste sporije, jer je $2^x < 10^x$ za $x > 0$. Za negativne brojeve x vrijedi suprotna nejednakost: $2^x > 10^x$.



Usporedba grafova eksponencijalnih funkcija za razne vrijednosti baza $a > 1$, $b > 1$.

Zadatak 1. Nacrtaj graf funkcije $f(x) = 3^x$. Usporedi ga s grafovima funkcija $(x) = 10^x$ i $f(x) = 2^x$. Što možeš zaključiti?

Uz bazu 10, koja je važna zbog toga što računamo u dekadskom sustavu, te bazu 2, jer računala računaju u binarnom sustavu (sustavu s bazom 2), važna je i eksponencijalna funkcija čija je baza broj e. To je iracionalan broj s približnom vrijednošću

$$e = 2.718281828\ldots$$

Funkcija $f(x) = e^x$ ugrađena je u svako džepno računalo koje sadrži i ostale standardne funkcije. Njezina je tipka označena s $\boxed{e^x}$. Vrijednost broja e možemo dobiti pomoću $\boxed{1}\ \boxed{e^x}$.

Zadatak 2. Provjerite:
$e^{1.5} \approx 4.4817$, $e^3 \approx 20$, $e^{-0.25} \approx 0.7788$, $e^{-1} \approx 0.3679$.

Kutak plus

BROJ e

Jednadžbe kao što su linearna $ax + b = 0$, kvadratna $ax^2 + bx + c = 0$ ili jednadžba 3. stupnja (kubna), gdje su koeficijenti racionalni brojevi zovu se **algebarske jednadžbe**.

Realni brojevi koji su rješenja takvih jednadžbi zovu se **algebarski brojevi**.

No postoje realni brojevi koji nisu rješenja niti koje algebarske jednadžbe. To su **transcedentni brojevi**. Broj π je transcedentan broj. On nije rješenje nijedne algebarske jednadžbe. Dužinu čija je duljina transcedentan broj nije moguće konstruirati. Tako ne možemo konstruirati niti dužinu duljine π i to je razlog zbog kojeg nije rješiv zadatak *kvadrature kruga* spomenut u 1. razredu.

Uz broj π još se ističe jedan transcedentan broj, broj e.

Taj broj čija je približna vrijednost 2.7182818284590 kao baza eksponencijalne funkcije pojavljuje se u vrlo raznolikim prirodnim zakonima kao što su razne vrste prirodnog prirasta. Nezaobilazne su takve funkcije i u optici, akustici, elektronici, dinamici itd.

Promatramo li niz brojeva koji dobijemo uvrštavanjem za n redom prirodnih brojeva u izraz $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, tada što dalje u tom nizu odmičemo, sve smo bliži broju e.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to 2.7182818284590\ldots$$

Oznaku e uveo je švicarski matematičar Leonhard Euler 1727. godine, vjerojatno inspiriran rječju *eksponent*. On je 1737. dokazao da je e iracionalan, a da je transcedentan dokazao je 1873. Charles Hermite.

Graf eksponencijalne funkcije s bazom $0 < a < 1$

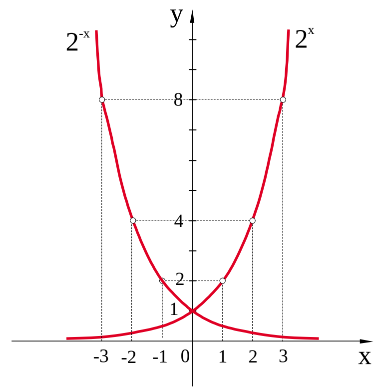
Sada ćemo promotriti eksponencijalnu funkciju s bazom $0 < a < 1$. Vidjet ćemo da se njezin graf može izvesti iz grafa eksponencijalne funkcije s bazom većom od 1, koju znamo nacrtati.

Započnimo jednim primjerom. Uzmimo bazu $a = \frac{1}{2}$. Primijetimo da vrijedi:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}.$$

Nacrtajmo na istom koordinatnom sustavu grafove funkcija $f(x) = 2^x$ i $g(x) = 2^{-x}$.

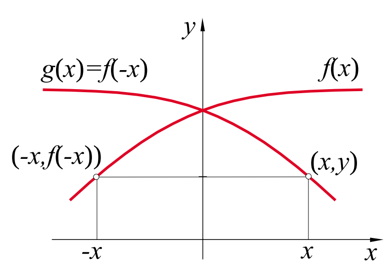
x	2^x	2^{-x}
-3	$\frac{1}{8}$	8
-2	$\frac{1}{4}$	4
-1	$\frac{1}{2}$	2
0	1	1
1	2	$\frac{1}{2}$
2	4	$\frac{1}{4}$
3	8	$\frac{1}{8}$



Grafovi funkcija $f(x) = 2^x$ i $g(x) = 2^{-x}$ simetrični su s obzirom na y os.

Primjećujemo da funkcije f i g poprimaju iste vrijednosti za brojeve suprotnih predznaka, jer vrijedi: $f(-x) = 2^{-x} = g(x)$. Zato su grafovi ovih funkcija simetrični s obzirom na y os.

Objasnimo u kakvoj su vezi funkcije čiji su grafovi simetrični s obzirom na y os.



Zrcaljenjem oko y osi dobiva se graf funkcije $g(x) = f(-x)$.

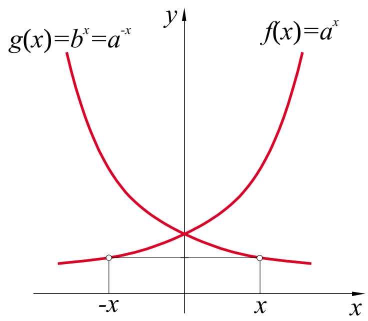
Zrcalimo graf po volji odabrane funkcije f oko y osi. Time dobivamo graf neke funkcije; označimo je s g. Ako točka (x, y) leži na njezinom grafu, tada je $y = g(x)$, ali isto je tako $y = f(-x)$, jer je graf dobiven zrcaljenjem (vidi sliku).

Zrcaljenje grafa oko y osi

Zrcaljenjem grafa funkcije f oko y osi dobiva se graf funkcije $g(x) = f(-x)$.

Zrcalimo li graf eksponencijalne funkcije $f(x) = a^x$ oko y osi, dobit ćemo graf eksponencijalne funkcije $g(x) = a^{-x}$:

$$g(x) = f(-x) = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x .$$



Graf funkcije $g(x) = b^x$, $0 < b < 1$ simetričan je grafu funkcije $f(x) = a^x$, $a = \frac{1}{b}$ s obzirom na y os. Funkcija $g(x) = b^x$ padajuća je funkcija. Pozitivan dio x osi njezina je asimptota.

Zadatak 3. Na jednoj slici nacrtaj grafove funkcija $f(x) = 3^x$ i $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Što primjećuješ?

Točno-netočno pitalice

1. Ako je $f(x) = 4^x$, onda je $f(-0.5) = -2$. T N

2. Funkcija $f(x) = x^8$ je eksponencijalna funkcija. T N

3. Za eksponencijalnu funkciju $f(x) = 5^{-x}$ je $f(-1) < f(-2)$. T N

4. Za eksponencijalnu funkciju $f(x) = 3^{x-1}$ je $f(0.1) < f(0.01)$. T N

5. Graf funkcije $f(x) = a^x$ siječe os y točki $(0, 1)$. T N

6. Funkcija $f(x) = (\sqrt{2})^x$ nije definirana za negativne realne brojeve. T N

7. Ako je $f(x) = 10^x$, onda je $f(-10) = 0.1$. T N

Navedimo sada svojstva eksponencijalne funkcije:

Svojstva eksponencijalne funkcije

Eksponencijalna funkcija $x \mapsto a^x$ ima sljedeća svojstva:

1. Funkcija je definirana za svaki realan broj x.

2. Sve su vrijednosti funkcije pozitivni brojevi i svaki je pozitivan realni broj vrijednost funkcije za neki realni broj x.

3.

(E$_1$) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$,

(E$_2$) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$,

(E$_3$) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$.

(E$_4$) $a^0 = 1$.

(E$_5$) 1) Ako je $a > 1$, onda za $x_1 < x_2$ vrijedi $a^{x_1} < a^{x_2}$; funkcija je rastuća.
2) Ako je $0 < a < 1$, onda za $x_1 < x_2$ vrijedi $a^{x_1} > a^{x_2}$; funkcija je padajuća.

4. Grafovi eksponencijalnih funkcija čije su baze recipročni brojevi simetrični su s obzirom na os y.

Za svaki $a > 0,\ a \neq 1$ je $a^0 = 1$, a to znači da graf svake eksponencijalne funkcije prelazi os y u točki $(0, 1)$.

Injektivnost eksponencijalne funkcije

Iz svojstva $\mathbf{E}_5$ slijedi sljedeći važan zaključak:

Injektivnost eksponencijalne funkcije

(E$_6$) Ako je $a^{x_1} = a^{x_2}$, onda vrijedi $x_1 = x_2$.

Zaista, kad bi bilo $x_1 \neq x_2$, pa je, recimo, $x_1 < x_2$, onda se po svojstvu $\mathbf{E}_4$ ili $\mathbf{E}'_4$ vrijednosti a^{x_1} i a^{x_2} također razlikuju. Vrijedi, dakle:

$$x_1 \neq x_2 \implies a^{x_1} \neq a^{x_2}.$$

Ova je tvrdnja ekvivalentna tvrdnji $\mathbf{E}_5$. (Razmislite zašto!)

Na primjer, iz $2^x = 8$, tj. $2^x = 2^3$ nužno slijedi $x = 3$.

Zadaci 5.2.

1. Koristeći se džepnim računalom odredi:

1) $10^{0.512}$; **2)** $10^{0.8}$; **3)** $10^{0.112}$;
4) $10^{1.55}$; **5)** $10^{2.3174}$; **6)** $10^{3.915}$;
7) $10^{-0.25}$; **8)** $10^{-1.152}$; **9)** $10^{-0.4157}$;
10) $10^{-2.245}$.

2. Izračunajte računalom vrijednosti funkcije $y = 10^x$ za 0.51, 0.52, ... 0.60. Je li razlika funkcijskih vrijednosti konstantna?

3. Uvjerite se u točnost formule $10^{x_1} \cdot 10^{x_2} = 10^{x_1+x_2}$ računajući lijevu i desnu stranu za neke brojeve x_1 i x_2.

4. Za funkciju $f(x) = 10^x$ vrijedi: $f(0) = 1$ i $f(1) = 10$. Za koji će x biti $f(x) = 2$? Potražite taj x na računalu računajući vrijednosti funkcije 10^x za različite brojeve x. Odredite x s točnosti od triju decimala. (Uputa: usporedite $f(0.3)$ i $f(0.4)$. Zatim izračunajte $f(0.31)$ itd.)

5. Dane su eksponencijalne funkcije:

$$f_1(x) = 2^x, \quad f_2(x) = 3^x, \quad f_3(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x,$$

$$f_4(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^x, \quad f_5(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x.$$

Poredaj po veličini brojeve:

1) $f_1(-1)$, $f_2(-1)$, $f_3(-1)$, $f_4(-1)$, $f_5(-1)$;
2) $f_1(3)$, $f_2(3)$, $f_3(3)$, $f_4(3)$, $f_5(3)$.

6. Za koje realne brojeve x vrijedi:

1) $2^x < 4$; **2)** $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 4$;
3) $2^x \leqslant \frac{1}{2}$; **4)** $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leqslant \frac{1}{2}$;
5) $4^x > \frac{1}{8}$; **6)** $\left(\frac{1}{4}\right)^x > 2$;
7) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 > 3^{-x}$?

7. Dana je eksponencijalna funkcija: $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

Poredaj po veličini brojeve: $f(-\sqrt{5})$, $f(11)$, $f(0.5)$, $f(-1)$, $f(0)$.

8. Dana je eksponencijalna funkcija: $f(x) = 5^x$. Poredaj po veličini brojeve: $f(\sqrt{2})$, $f(-3)$, $f(0.01)$, $f(-0.5)$, $f(0)$.

9. Koliko će godina doživjeti neki čovjek? Možda je neobično, ali je istinito: očekivanje raste s godinama. Za žene je ono dano formulom

$$f(n) = 78.5 \cdot (1.001)^n,$$

a za muškarce

$$f(n) = 72.2 \cdot (1.002)^n,$$

gdje je n trenutačni broj godina neke osobe.

1) Koliki životni vijek može očekivati žena kojoj je sada 25 godina?

2) Koliki životni vijek može očekivati muškarac kojem je 60 godina?

10. U Kopačkom ritu u proljeće broj komaraca naglo raste i njihov je broj po jednom hektaru jednak $n(t) = 2.5 \cdot 10^{0.1t+2}$, gdje je t broj dana nakon posljednjeg mraza.

Koliko će komaraca biti u ritu nakon 15; 20; 25 dana?

11. Nacrtajte graf funkcije $f(x) = 2^x$ i usporedite ga s grafovima funkcija:

1) $f_1(x) = 2^x + 1$; **2)** $f_2(x) = 2^x - 1$;
3) $f_3(x) = 2^{x-1}$; **4)** $f_4(x) = 2^{x+1}$.

12. Nacrtajte graf funkcije $f(x) = 2^x$ i usporedite ga s grafovima funkcija:

1) $f_1(x) = 2^{-x}$; **2)** $f_2(x) = 2^{-x} - 1$;
3) $f_3(x) = 2^{-x-1}$; **4)** $f_4(x) = 2^{-x+1}$.

13. Nacrtaj grafove funkcija:

1) $f(x) = 2^{|x|}$; **2)** $f(x) = 2^{|x+1|}$;
3) $f(x) = 2^{-|x|}$; **4)** $f(x) = 2^{|1-x|}$.