1 Polinomi i algebarske jednadžbe

Fraktali su jedna od lijepih primjena kompleksnih brojeva

1.1. Algebra polinoma

U prošlom smo poglavlju izučavali kvadratnu funkciju ili *polinom drugog stupnja*:

$$P(x) = ax^2 + bx + c.$$

Odakle potječe ime *polinom*? Gornja je funkcija sastavljena od triju pribrojnika koje nazivamo **monomima**. To su članovi ax^2, zatim bx i c. Za prvi kažemo da je **drugog stupnja**, monom bx prvog je stupnja, dok je monom c stupnja 0. Njihovim zbrajanjem dobivamo *polinom drugog stupnja*.

Na isti način možemo zamisliti monome bilo kojeg stupnja. Tako je, na primjer, monom stupnja k oblika $a_k x^k$. Zbrajanjem ovakvih monoma, za razne vrijednosti potencije k, dobivamo **polinom**.

Definicija polinoma

Polinom stupnja n je funkcija $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definirana s

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad (1)$$

gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ realni brojevi, $a_n \neq 0$. Brojeve $a_0, \ldots, a_n$ nazivamo **koeficijentima** polinoma. Koeficijent a_n nazivamo **vodećim koeficijentom**, koeficijent a_0 **slobodnim koeficijentom**.

Za ovaj polinom kažemo da je **polinom s realnim koeficijentima**. Ako su koeficijenti cijeli brojevi, onda govorimo o polinomu s cjelobrojnim koeficijentima. Zapis (1) nazivamo **kanonski oblik** polinoma.

Stupanj polinoma je najveća potencija nepoznanice x u kanonskom obliku polinoma. Tako je, na primjer, polinom

$$P(x) = 2x^4 - 13x + 6$$

stupnja 4, a polinom

$$Q(x) = 10 + 3^8x^2 - 2^5x^3$$

stupnja 3. Pišemo: $\operatorname{st} P = 4$, $\operatorname{st} Q = 3$. Konstante smatramo polinomima stupnja 0; konstantna funkcija $P(x) = 2$ polinom je stupnja 0.

Jednakost polinoma

Dva su polinoma P i Q **jednaka** ako za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi $P(x) = Q(x)$. Pišemo $P = Q$.

Tako su, na primjer, polinomi $P(x) = x^2 + 2x + 1$ i $Q(x) = (x+1)^2$ jednaki jer za svaki realni x vrijedi:

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2.$$

Prikažemo li polinom Q u standardnom obliku, on će imati isti zapis kao i polinom P. Ova tvrdnja vrijedi za bilo koja dva jednaka polinoma.

Kriterij jednakosti polinoma

Polinomi P i Q jednaki su ako i samo ako su istog stupnja i ako im se koeficijenti u kanonskom prikazu podudaraju.

Jedan je smjer u ovoj tvrdnji očit: ako polinomi imaju isti stupanj i iste koeficijente, onda im se vrijednosti u svakoj točki x podudaraju. Obratna tvrdnja — ako je $P(x) = Q(x)$ za svaki x, onda su stupanj i koeficijenti ovih polinoma jednaki — nije očita.

Pokažimo tu tvrdnju za polinome stupnja manjeg ili jednakog 2. Neka su $P(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ i $Q(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ dva polinoma zapisana u kanonskom obliku, pri čemu je moguće da je neki od koeficijenata (pa čak i vodeći) jednak nuli. Neka vrijedi $P(x) = Q(x)$

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

za svaki realni broj x. Uzmimo tri različite vrijednosti nepoznanice x, na primjer, $x = 0$, $x = 1$ i $x = -1$, i uvrstimo ih u tu jednadžbu:

$$\begin{aligned}
x = 0 \quad &\Longrightarrow & c_1 &= c_2,\\
x = 1 \quad &\Longrightarrow & a_1 + b_1 + c_1 &= a_2 + b_2 + c_2,\\
x = -1 \quad &\Longrightarrow & a_1 - b_1 + c_1 &= a_2 - b_2 + c_2.
\end{aligned}$$

Iz prve jednakosti dobivamo $c_1 = c_2$. Druge dvije sada glase:

$$\begin{aligned}
a_1 + b_1 &= a_2 + b_2,\\
a_1 - b_1 &= a_2 - b_2.
\end{aligned}$$

Zbrajanjem ovih jednakosti slijedi $2a_1 = 2a_2$, odnosno $a_1 = a_2$, pa je onda i $b_1 = b_2$. Dakle, koeficijenti se polinoma podudaraju, što smo i htjeli dokazati.

Sličan bi se dokaz mogao napraviti za polinome stupnja $\leqslant n$. Učinite to za polinome stupnja $\leqslant 3$!

Primijetimo da je u ovom dokazu bilo dovoljno zahtijevati da se vrijednosti polinoma drugog stupnja podudaraju u trima točkama. Općenito, polinomi stupnja n bit će jednaki ako im se podudaraju vrijednosti u $n+1$ različitoj točki. Ovu ćemo tvrdnju dokazati kasnije.

Primjer 1.

Napišimo polinome $P(x)=(x+1)^3+(2x-1)^2$, $Q(x)=(x^2+3)^2-(x^2+1)^2$ u kanonskom obliku.

$$\begin{aligned} P(x)&=(x+1)^3+(2x-1)^2\\ &=x^3+3x^2+3x+1+4x^2-4x+1\\ &=x^3+7x^2-x+2,\\ Q(x)&=(x^2+3)^2-(x^2+1)^2\\ &=[(x^2+3)-(x^2+1)][(x^2+3)+(x^2+1)]\\ &=2(2x^2+4)=4x^2+8. \end{aligned}$$

Primjer 2.

Neka je $P(x+3)=2x^2+3x+1$. Odredimo kanonski oblik ovog polinoma.

Stavimo: $u=x+3$. Onda je $x=u-3$, pa se početni uvjet može napisati ovako:

$$P(u)=2(u-3)^2+3(u-3)+1,$$

odakle slijedi:

$$P(u)=2u^2-12u+18+3u-9+1=2u^2-9u+10.$$

Ime varijable možemo napisati po volji. Ovaj je prikaz kanonski prikaz polinoma P; njegovi su koeficijenti 2, -9 i 10.

Primjer 3.

Polinom $P(x)=x^3+3x^2-2x+4$ prikažimo u obliku $Q(x+2)$, gdje je Q polinom koji treba odrediti.

Ovdje je postupak obratan onome u prošlom zadatku. Stavimo $x=u-2$, pa je $x+2=u$. Sada dobivamo

$$\begin{aligned} P(x)&=P(u-2)=(u-2)^3+3(u-2)^2-2(u-2)+4\\ &=u^3-6u^2+12u-8+3u^2-12u+12-2u+4+4\\ &=u^3-3u^2-2u+12\\ &=(x+2)^3-3(x+2)^2-2(x+2)+12. \end{aligned}$$

Dobili smo traženi prikaz. Još govorimo da smo polinom P prikazali **po potencijama od** $x+2$. Kanonski je oblik polinoma Q:

$$Q(u)=u^3-3u^2-2u+12.$$

Algebra polinoma

Funkcije f i g definirane na istom podskupu realnih brojeva možemo zbrajati, oduzimati, množiti i dijeliti. Tako je, na primjer, zbroj dviju funkcija f i g funkcija $f+g$ čije se vrijednosti računaju ovako:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

Uzmemo li da je $f(x) = x+1$ i $g(x) = \sqrt{x}$, onda će biti:

$$(f+g)(x) = x + 1 + \sqrt{x}.$$

Na prirodan način definiramo i druge operacije na skupu funkcija:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \qquad (f-g)(x) = x + 1 - \sqrt{x},$$

$$(f\cdot g)(x) = f(x)g(x) \qquad (f\cdot g)(x) = (x+1)\sqrt{x} = x\sqrt{x} + \sqrt{x},$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}},$$

s time da je u posljednjem primjeru funkcija definirana samo za one realne brojeve x za koje je $g(x) \neq 0$.

— ◆ —

I polinomi su funkcije, definirani na čitavom $\mathbf{R}$ i s vrijednostima u skupu $\mathbf{R}$. Na istovjetan način definirane su i algebarske operacije na skupu svih polinoma. Važno je primijetiti da će zbroj, razlika i umnožak polinoma biti opet polinom.

Primjer 4.

Neka je $P(x) = x^3 - 3x + 1$, $Q(x) = 2x^2 + 2x - 4$. Onda vrijedi:

$$\begin{aligned}(P+Q)(x) &= P(x) + Q(x) = (x^3 - 3x + 1) + (2x^2 + 2x - 4)\\ &= x^3 + 2x^2 - x - 3,\\ (P-Q)(x) &= P(x) - Q(x) = (x^3 - 3x + 1) - (2x^2 + 2x - 4)\\ &= x^3 - 2x^2 - 5x + 5.\end{aligned}$$

Polinomi se zbrajaju (oduzimaju) tako da se zbroje (oduzmu) istovjetni monomi.

Polinome množimo koristeći svojstvo distributivnosti za množenje realnih brojeva. Prvi polinom množimo monomima koji čine drugi polinom i zbrajamo pribrojnike:

$$\begin{aligned}(P\cdot Q)(x) &= P(x)Q(x) = (x^3 - 3x + 1)(2x^2 + 2x - 4)\\ &= (2x^5 - 6x^3 + 2x^2) + (2x^4 - 6x^2 + 2x) - (4x^3 - 12x + 4)\\ &= 2x^5 + 2x^4 - 10x^3 - 4x^2 + 14x - 4.\end{aligned}$$

Primjer 5.

Odredimo nepoznate koeficijente A i B u prikazu

$$\frac{2x+7}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}.$$

Pomnožimo jednakost zajedničkim nazivnikom:

$$2x+7 = A(x+3) + B(x+2) = (A+B)x + 3A + 2B.$$

Polinom s lijeve strane jednak je polinomu s desne strane, pa im se moraju podudarati koeficijenti:

$$2 = A + B, \qquad 7 = 3A + 2B.$$

Rješenja su ovog sustava $A = 3$, $B = -1$, pa je traženi prikaz:

$$\frac{2x+7}{(x+2)(x+3)} = \frac{3}{x+2} + \frac{-1}{x+3}.$$

Zadaci 1.1.

1. Odredi koeficijent uz x^5 u kanonskom zapisu polinoma

1) $P(x)=(x^2-x+1)^2$;

2) $P(x)=(x^3-2x^2+x-1)^2$;

3) $P(x)=(x^4-x^3+3x^2-x+11)^2$.

2. Polinom P zapiši u kanonskom obliku te mu odredi stupanj i koeficijente:

1) $P(x)=(x^2-x-2)^2$;

2) $P(x)=(2x-1)^3-(x+1)^3$;

3) $P(x)=(x^3-x^2+x-1)^2$;

4) $P(x)=(x+1)^2-(x+1)^3+(x+1)^4$.

3. Koliki je vodeći, a koliki slobodni koeficijent u kanonskom prikazu polinoma $P(x)=(2x+3)^6$?

4. Za zadani polinom $P(x)=x^3$ izračunaj $P(x-1)+P(x)+P(x+1)$.

5. Ako je polinom $P(x)=4x^2+ax+24$ kvadrat polinoma prvog stupnja, koliki je koeficijent a?

6. Dokaži da je polinom $P(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$ kvadrat nekog polinoma.

7. Polinom $P(x)=x^4-6x^3+11x^2-6x+1$ potpuni je kvadrat nekog polinoma. Odredi taj polinom.

8. Polinom $P(x)=x^4-2x^3+ax^2-4x+b$ kvadrat je polinoma drugog stupnja. Odredi koeficijente a i b, kao i taj polinom.

9. Odredi polinom $P(x)$ ako je

1) $P(2x-1)=x^2-x$;

2) $P(x-1)=2x^2+3x+5$;

3) $P(x+1)=x^3-x$;

4) $P(x+2)=4x^4-x^2+1$.

10. Polinom $P(x)=x^3-x+1$ prikaži u obliku $Q(x-1)$.

11. Polinom $P(x)=3x^4-4x^3+10x-16$ zapiši u obliku $Q(x-1)$.

12. Dan je polinom $P(x)=x^4+4x^3+4x^2-1$. Odredi polinom $Q(x)$ iz jednakosti $P(x)=Q(x+1)$.

13. Odredi zbroj i razliku polinoma F i G ako je

1) $F(x)=2x^3-x^2+3x-1$,
$G(x)=x^3+x^2-2x-1$;

2) $F(x)=x^4-2x^2-x+3$,
$G(x)=x^3+2x^2-x-3$;

3) $F(x)=(x^2-x+1)^2$, $G(x)=(x^2+x-1)^2$;

4) $F(x)=(x-1)^4$, $G(x)=(x+1)^4$.

14. Odredi umnožak polinoma F i G ako je:

1) $F(x)=x^2-x-1$, $G(x)=x^2+x+1$;

2) $F(x)=x^3-x^2+x-1$,
$G(x)=x^3+x^2-x+1$;

3) $F(x)=x^2-1$, $G(x)=x^4+x^2+1$;

4) $F(x)=x+1$, $G(x)=x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$.

15. Odredi zbroj, razliku i umnožak polinoma P i Q ako je:

1) $P(x)=x+1$, $Q(x)=x^2-3x+2$;

2) $P(x)=2x^3+3x-1$, $Q(x)=2x^3-2x+2$;

3) $P(x)=x^4-x^2+1$, $Q(x)=x^2-1$.

16. Odredi nepoznate koeficijente u sljedećim jednakostima:

1) $\dfrac{-x-2}{x^2-2x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-2}$;

2) $\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}$;

3) $\dfrac{3x-1}{x^3-x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+1}$;

4) $\dfrac{3x+2}{x^2+3x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+3}$;

5) $\dfrac{2x+2}{8x^3-1}=\dfrac{Ax+B}{4x^2+2x+1}+\dfrac{C}{2x-1}$;

6) $\dfrac{1}{x^3-x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+1}$;

7) $\dfrac{-x+4}{x^3-3x^2+2x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x-2}$.

8) $\dfrac{x^2+x+1}{x^3+x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$.

17. Ako je $n=\operatorname{st}P$, $m=\operatorname{st}Q$ i $n\geqslant m$, dokaži da je $\operatorname{st}(P+Q)\leqslant n$, $\operatorname{st}(P-Q)\leqslant n$. Pokažite na primjeru da stupanj zbroja ili razlike može biti manji od n.

18. Ako je $n=\operatorname{st}P$, $m=\operatorname{st}Q$, dokaži da je $\operatorname{st}(PQ)=n+m$.

19. Kompozicija polinoma $P \circ Q$ definira se formulom $(P \circ Q)(x) = P(Q(x))$.
1) Odredi $P \circ Q$ ako je $P(x) = x^2 + 2x - 1$, $Q(x) = x^2 - 1$.
2) U istom primjeru izračunaj $Q \circ P$.
3) Pokaži da je za po volji uzete polinome P i Q njihova kompozicija $P \circ Q$ opet polinom.
4) Ako je $n = \operatorname{st} P$, $m = \operatorname{st} Q$, koliki je $\operatorname{st}(P \circ Q)$?

20. Kojeg je stupnja polinom

$$P(x) = (x+1)(x^2+1)(x^3+1)\dots(x^{33}+1)?$$

Koliki je zbroj koeficijenata polinoma P?

21. Koliki je zbroj svih koeficijenata polinoma P ako je

1) $P(x) = (3x^2 - x - 1)^5 \cdot (2x^3 - 1)^3$;
2) $P(x) = (x^2 + 5x + 1)^{13} \cdot (x^2 - 1)^{17}$?

1.2. Djeljivost polinoma

Dijeljenje polinoma

Dijeljenjem dvaju polinoma nećemo uvijek dobiti polinom. Ako su $P(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$ i $Q(x) = b_mx^m + \ldots + b_1x + b_0$ dva zadana polinoma, tada je njihov kvocijent **racionalna funkcija**

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0}{b_mx^m + \ldots + b_1x + b_0}.$$

Ona je definirana u svim realnim brojevima x za koje je $Q(x) \neq 0$.

Racionalna funkcija

Racionalna funkcija je kvocijent dvaju polinoma.

Postoje situacije u kojima će kvocijent dvaju polinoma biti ponovno polinom. Na primjer, ako je $P(x) = x^2 - 4$, a $Q(x) = x + 2$, onda znamo da vrijedi:

$$P(x) = x^2 - 4 = (x-2)(x+2) = (x-2)Q(x),$$

pa je

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2-4}{x+2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = x - 2, \qquad \text{čim je } x \neq 2.$$

Vidimo da racionalna funkcija $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ u svim točkama u kojima je definirana ima vrijednost $x - 2$. Zato ćemo u ovakvim situacijama pisati kratko $f(x) = x - 2$.

Isto tako imali bismo:

$$\frac{x^3-1}{x-1} = x^2 + x + 1.$$

Kažemo da je polinom $P(x) = x^3 - 1$ djeljiv polinomom $Q(x) = x - 1$.

Djeljivost polinoma

Polinom P djeljiv je polinomom Q ako postoji polinom P_1 takav da vrijedi $P = P_1 \cdot Q$, tj. ako za svaki x vrijedi $P(x) = P_1(x)Q(x)$.

Kako možemo provjeriti jesu li dva polinoma djeljiva?

Dijeljenje polinoma možemo provoditi na način analogan dijeljenju brojeva. Pogledajmo primjer.

Primjer 1.

Neka je

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 4, \qquad Q(x) = x - 2$$

Polinom P dijelimo polinomom Q ovako:

$$\begin{array}{l}
(x^3 \; - 3x^2 \; + 4x \; - 4) : (x \; - 2) = x^2 - x + 2 \\
\underline{x^3 \; - 2x^2 \qquad\qquad\qquad} \\
\qquad - x^2 \; + 4x \; - 4 \\
\qquad \underline{- x^2 \; + 2x \qquad} \\
\qquad\qquad\quad 2x \; - 4 \\
\qquad\qquad\quad \underline{2x \; - 4} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Dakle,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = x^2 - x + 2.$$

Istim se postupkom može obaviti **djelomično dijeljenje**, kad ostatak pri dijeljenju dvaju polinoma nije jednak nuli. Ako je f racionalna funkcija, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, pri čemu je stupanj polinoma u brojniku veći ili jednak stupnju polinoma u nazivniku, onda brojnik možemo podijeliti nazivnikom. Kvocijent i ostatak dijeljenja bit će polinomi. Pogledajmo najprije jedan primjer:

$$\begin{array}{l}
(x^3 \; + 2x^2 \; - 2x \; + 4) : (x \; - 1) = x^2 + 3x + 1 \\
\underline{x^3 \; - x^2 \qquad\qquad\qquad} \\
\qquad 3x^2 \; - 2x \; + 4 \\
\qquad \underline{3x^2 \; - 3x \qquad} \\
\qquad\qquad\quad x \; + 4 \\
\qquad\qquad\quad \underline{x \; - 1} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 5
\end{array}$$

Broj 5 je ostatak dijeljenja (to je polinom stupnja 0). Čitav rezultat možemo napisati na dva načina:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3 + 2x^2 - 2x + 4}{x - 1} = x^2 + 3x + 1 + \frac{5}{x - 1}$$

ili, nakon množenja ove jednakosti s $Q(x) = x - 1$:

$$x^3 + 2x^2 - 2x + 4 = (x^2 + 3x + 1)(x - 1) + 5.$$

Općenito, o dijeljenju dvaju polinoma možemo reći sljedeće:

Kvocijent dvaju polinoma

Kvocijent dvaju polinoma P i Q može se napisati u obliku

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

ili na ovaj način:

$$P(x) = P_1(x)Q(x) + R(x).$$

Ako je $\operatorname{st} P = n \geqslant m = \operatorname{st} Q$, onda je P_1 polinom stupnja $n - m$. Polinom R je **ostatak dijeljenja** i to je polinom stupnja manjeg od m.

Primjer 2.

Podijelimo $P(x) = x^4 + 3x - 2$ polinomom $Q(x) = x^2 - 2x + 3$.

$$\begin{array}{llllll}
(x^4 & & & +\,3x & -\,2) : (x^2 - 2x + 3) = x^2 + 2x + 1 \\
x^4 & -\,2x^3 & +\,3x^2 & & \\
\hline
& 2x^3 & -\,3x^2 & +\,3x & -\,2 \\
& 2x^3 & -\,4x^2 & +\,6x & \\
\hline
& & x^2 & -\,3x & -\,2 \\
& & x^2 & -\,2x & +\,3 \\
\hline
& & & -\,x & -\,5
\end{array}$$

Rezultat dijeljenja pišemo na ovaj način:

$$\frac{x^4 + 3x - 2}{x^2 - 2x + 3} = x^2 + 2x + 1 + \frac{-x - 5}{x^2 - 2x + 3},$$

ili ovako:

$$\underbrace{x^4 + 3x - 2}_{P(x)} = (\underbrace{x^2 + 2x + 1}_{P_1(x)})(\underbrace{x^2 - 2x + 3}_{Q(x)}) + (\underbrace{-x - 5}_{R(x)}).$$

Zadaci 1.2.

1. Podijeli polinom P polinomom Q ako je:

1) $P(x)=2x^3-x^2+3x-1$, $Q(x)=x+3$;

2) $P(x)=4x^3+3x^2-x+2$, $Q(x)=x+2$;

3) $P(x)=x^4-x^3+2x-1$, $Q(x)=x^2-x+1$;

4) $P(x)=x^4-x^2+1$, $Q(x)=x-1$;

5) $P(x)=x^5+x^4-2x+4$, $Q(x)=x^3-2x+2$;

6) $P(x)=x^4+3x^3-x^2+2x-1$,
$Q(x)=x^2+2x-2$;

7) $P(x)=x^4-x-2$, $Q(x)=x+2$.

8) $P(x)=x^3+2x^2-x+2$, $Q(x)=2x-1$.

2. Odredi $a\in\mathbf{R}$ tako da polinom $P(x)=x^4-2x^3+ax-4$ bude djeljiv s $Q(x)=x-3$.

3. Odredi a i b uz uvjet da je polinom $P(x)=x^4-3x^3+3x^2+ax+b$ djeljiv polinomom $Q(x)=x^2-3x+4$.

4. Odredi koeficijente a i b polinoma $P(x)=2x^5-x^2+ax+b$ tako da taj polinom bude djeljiv polinomom $Q(x)=x^2-x+1$.

5. Odredi koeficijente a i b polinoma $P(x)=2x^5-x^3+ax+b$ tako da polinom bude djeljiv polinomom $Q(x)=x^2-x+1$.

6. Odredi ostatak pri dijeljenju polinoma $P(x)=x^n+x^{n-1}+\ldots+x+1$ polinomom $Q(x)=x-1$.

7. Koliki je ostatak pri dijeljenju polinoma $P(x)=x^n+x^{n-1}+\ldots+x+1$ polinomom $Q(x)=x+1$?

8. Koliki je ostatak pri dijeljenju polinoma $P(x)=101x^{100}-100x^{99}+99x^{98}-\ldots-2x+1$ polinomom $Q(x)=x^2-1$?

9. Koliki je ostatak pri dijeljenju polinoma $P(x)=101x^{100}+100x^{99}+99x^{98}+\ldots+2x+1$ polinomom $Q(x)=x^2-1$?

10. Dokaži da je polinom $P(x)=(x-2)^{100}+(x-1)^{50}-1$ djeljiv polinomom $Q(x)=x^2-3x+2$.

11. Koliki je ostatak pri dijeljenju polinoma $P(x)=x^{100}+2x^{99}-3x^3+2x+5$ polinomom $Q(x)=x^2+x-2$?

12. Odredi a, $b\in\mathbf{R}$ tako da polinom $P(x)=x^3+2x^2-ax+b$ pri dijeljenju s $Q_1(x)=x-2$ daje ostatak 2, a pri dijeljenju s $Q_2(x)=x+1$ ostatak 3.

13. Polinom P pri dijeljenju s $x-1$ daje ostatak 2, a pri dijeljenju s $x-2$ ostatak 1. Koliki je ostatak pri dijeljenju polinoma P polinomom $(x-1)(x-2)$?

14. Ako polinomi f i g pri dijeljenju polinomom h imaju ostatke $x-1$, odnosno x^2+x+1, koliki je ostatak pri dijeljenju polinoma $f+g$ i $f\cdot g$ polinomom h?

15. Odredi koeficijente a, b i c polinoma $P(x)=2x^4+ax^2+bx+c$ ako je P djeljiv polinomom $x+2$, a ostatak pri dijeljenju polinoma P polinomom x^2-1 je $x-2$.