1 Determinante i sustavi linearnih jednadžbi

1.1. Determinante i linearni sustavi drugog reda

Pri računanju s vektorima vrlo često moramo rješavati sustave linearnih jednadžbi. Pogledajmo jedan tipični primjer.

Primjer 1.

Vektor $\vec{c} = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ rastavimo u komponente po vektorima $\vec{a} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath}$, $\vec{b} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

Moramo odrediti skalare α i β takve da bude

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}.$$

Prikažemo li vektore po komponentama $\vec{\imath}$ i $\vec{\jmath}$, dobivamo

$$\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} = \alpha(3\vec{\imath} - \vec{\jmath}) + \beta(2\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = (3\alpha + 2\beta)\vec{\imath} + (-\alpha + \beta)\vec{\jmath}.$$

Vidimo da α i β moraju zadovoljavati sustav jednadžbi

$$\begin{cases} 3\alpha + 2\beta = 1, \\ -\alpha + \beta = 3. \end{cases}$$

Ovaj sustav možemo riješiti bilo kojom od poznatih metoda. Uporabit ćemo metodu *suprotnih koeficijenata*. Pomnožimo drugu jednadžbu s -2. Dobit ćemo ekvivalentan sustav:

$$\begin{cases} 3\alpha + 2\beta = 1, \\ 2\alpha - 2\beta = -6. \end{cases}$$

Zbrajanjem jednadžbi dobivamo $5\alpha = -5$ pa je $\alpha = -1$. Sada slijedi (uvrštavanjem u jednu od početnih jednadžbi) $\beta = 2$. Dakle, $\vec{c} = -\vec{a} + 2\vec{b}$.

Postupak rješavanja sustava dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama možemo provesti *za opći slučaj* i time izvesti formulu za njegovo rješenje.

Napišimo sustav linearnih jednadžbi s po volji odabranim koeficijentima:

$$\begin{cases} ax + by = e, \\ cx + dy = f. \end{cases}$$

Pomnožimo prvu jednadžbu brojem d, drugu brojem $-b$. Dobit ćemo ekvivalentni sustav

$$\begin{cases} dax + dby = de, \\ -bcx - bdy = -bf. \end{cases}$$

Zbrojimo dobivene jednadžbe: $\quad (ad - bc)x = de - bf$.

Ako je $ad - bc \neq 0$, odavde slijedi $\quad x = \dfrac{de - bf}{ad - bc}$.

Slično bismo uz isti uvjet za drugu nepoznanicu dobili

$$(ad - bc)y = af - ce \implies y = \frac{af - ce}{ad - bc}.$$

Primjećujemo da su i brojnik i nazivnik u ovim rješenjima izrazi sličnog tipa, koji ovise o koeficijentima sustava. Napišimo koeficijente sustava u obliku jedne tablice, koju nazivamo **matrica sustava**:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Svakoj takvoj tablici pridružujemo broj koji nazivamo **determinanta matrice**, a definira se izrazom $ad - bc$. Samu determinantu označavamo simbolom $\det(A)$ ili tablicom uokvirenom dvjema okomitim crtama.

Determinanta matrice drugog reda

Determinanta matrice drugog reda je realni broj definiran formulom:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc\,.$$

Tu prepoznajemo izraz u nazivniku rješenja sustava linearnih jednadžbi. Brojnik se može napisati na sličan način. Dakle, ako je $\det(A) \neq 0$, onda rješenje sustava glasi

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

Nazivnik je jednak determinanti matrice sustava. Determinanta u brojniku dobiva se tako da se koeficijenti uz nepoznanicu u početnom sustavu zamijene s koeficijentima desne strane sustava.

Primjer 2.

Riješimo sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4, \\ -3x + y = -2. \end{cases}$$

Njegovo je rješenje

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4 \cdot 1 - (-3) \cdot (-2)}{2 \cdot 1 - (-3) \cdot (-3)} = \frac{2}{7},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2 \cdot (-2) - 4 \cdot (-3)}{2 \cdot 1 - (-3) \cdot (-3)} = -\frac{8}{7}.$$

Zadaci 1.1.

1. Izračunaj determinante:

1) $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$; **2)** $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$; **3)** $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{vmatrix}$; **5)** $\begin{vmatrix} a+2 & a \\ a & a-2 \end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix} x+y & x-y \\ x-y & x+y \end{vmatrix}$; **7)** $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$;

8) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

2. Izračunaj determinante ($i^2 = -1$):

1) $\begin{vmatrix} 1+i & i \\ i & 1-i \end{vmatrix}$; **2)** $\begin{vmatrix} x-yi & 2x \\ y & x+yi \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} a+bi & a-b \\ a+b & a+bi \end{vmatrix}$; **4)** $\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix}$.

3. Ako su a, b, c realni brojevi, dokaži da su tad i rješenja jednadžbe $\begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = 0$ realna.

4. Dokaži da vrijednost razlomka $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ne ovisi o x onda i samo onda ako je $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$.

5. Ako su x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 realni brojevi, dokaži identitet

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2) - (x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2$$
$$= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}^2.$$

6. Dokaži da površina trokuta s vrhovima u točkama $O(0,0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ iznosi

$$P = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

7. Dokaži da površina trokuta s vrhovima u točkama $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ iznosi

$$P = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}.$$

8. Dokaži da površina konveksnog četverokuta s vrhovima u točkama $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$ iznosi

$$P = \pm\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right).$$

9. Riješi sljedeće sustave linearnih jednadžbi:

1) $\begin{cases} 3x - y = 5, \\ x + 4y = -7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 5y = 4, \\ -2x + 3y = -2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x + 9y = 11, \\ 2x - y = -11. \end{cases}$

10. Riješi sljedeće sustave linearnih jednadžbi:

1) $\begin{cases} 1 - 4x = y, \\ 2 - y = x+y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 3 = \frac{3}{4}y, \\ 2\frac{1}{2}x + 1 = 1\frac{1}{3}y. \end{cases}$

11. Za koju vrijednost parametra a sustav

1) $\begin{cases} 2x - ay = 3, \\ 6x - 9y = 9; \end{cases}$ ima beskonačno mnogo rješenja;

2) $\begin{cases} 4x + 3y = 12, \\ 2x + ay = 7; \end{cases}$ nema rješenja;

3) $\begin{cases} ax - y = 2, \\ 2x - y = 2; \end{cases}$ ima jedinstveno rješenje?

12. Riješi sustav jednadžbi u ovisnosti o parametru a:

1) $\begin{cases} ax + y = 2, \\ x + y = 2a; \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} ax + y = 1, \\ x + ay = a^2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} ax - y = 2, \\ 2x + y = a. \end{cases}$

1.2. Determinante trećeg reda. Cramerovo pravilo

Matrica trećeg reda jest kvadratna tablica A dimenzija 3×3. Označimo njezine elemente ovako:

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}.$$

Determinanta ove matrice označava se kao i determinanta matrice drugog reda.

Determinanta matrice trećeg reda

Determinanta matrice trećeg reda je realni broj definiran formulom:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} := a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Radi lakšeg govora determinantom ćemo nazivati i samu tablicu, pa ćemo tako govoriti o stupcu ili retku determinante.

Formulu (1) nazivamo **Laplaceov razvoj** determinante (po elementima prvog retka).

Sad računamo determinante reda 2:

$$\begin{aligned}\det(A)&=a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)\\ &=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1\\ &=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1. \qquad (2)\end{aligned}$$

Dobiveni izraz nećemo pamtiti, nego ćemo pri računanju determinanti ponavljati čitav postupak.

Primjer 1. Izračunajmo determinantu:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3\\ 3 & 1 & 5\\ -1 & 2 & -3\end{vmatrix} &= 2\begin{vmatrix} 1 & 5\\ 2 & -3\end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 3 & 5\\ -1 & -3\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}\\ &= 2\cdot[1\cdot(-3)-2\cdot 5]+[3\cdot(-3)-5\cdot(-1)]\\ &\quad+3\cdot[3\cdot 2-1\cdot(-1)]\\ &= 2\cdot(-13)+(-4)+3\cdot 7=-9.\end{aligned}$$

Zadatak 1. Računajući determinantu na desnoj strani uvjerite se u jednakost:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}.$$

Zadatak 2. Računajući determinantu uvjerite se u sljedeće njezino svojstvo: determinanta kojoj su (bilo koja) dva retka ili (bilo koja) dva stupca istovjetna, jednaka je nuli:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_3 \\ b_1 & b_1 & b_3 \\ c_1 & c_1 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Računanje determinante

Determinantu trećeg reda definirali smo razvojem po elementima prvog retka. Lako se možemo uvjeriti da se identična vrijednost dobiva i razvojem determinante po bilo kojem retku ili stupcu. Tako, na primjer, ako determinantu razvijemo po elementima prvog stupca, vrijedit će

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Daljnjim računanjem determinanti drugog reda dobit ćemo identičan izraz (2). Determinante drugog reda koje ulaze u ovakav rastav nazivamo **minore**. Minora se dobiva tako da se u početnoj determinanti prekriže svi elementi jednog retka i jednog stupca.

Ako determinantu razvijamo po elementima drugog retka ili drugog stupca, onda vrijedi

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} := -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Pazite na drukčiji raspored predznaka ispred elemenata retka po kojem rastavljamo determinantu! Svakom elementu determinante pripada predznak kojim on sudjeluje u rastavu determinante po nekom retku ili stupcu. Ti se predznaci pravilno izmjenjuju:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}.$$

Tako rastavom po elementima drugog retka ili drugog stupca prvi i treći pribrojnik dolaze s predznakom minus.

Primjer 2.

Izračunajmo determinante:

1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$; **2)** $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

1) Determinantu računamo rastavom po elementima drugog retka, zato što su dva elementa jednaka nuli:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -2(3\cdot(-3) - 1\cdot 1) = 20.$$

2) Determinantu računamo rastavom po elementima trećeg stupca:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Sarrusovo pravilo

Determinante trećeg reda možemo računati na još jedan način, uporabljujući sljedeće jednostavno pravilo: prva dva stupca determinante nadopišu se iza trećeg i zatim se računaju umnošci po tri elementa postavljena dijagonalno jedan do drugog. Umnošci silaznih dijagonala uzimaju se s predznakom $+$, a uzlaznih s predznakom $-$:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} + & + & + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} - & - & - \end{matrix} \end{array} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - (c_1b_2a_3 + c_2b_3a_1 + c_3b_1a_2).$$

Primjer 3.

Izračunajmo vrijednost determinante $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \\ 5 & -2 \end{matrix} = 3\cdot 2\cdot 2 + (-4)\cdot 3\cdot 5 + 2\cdot(-1)\cdot(-2)$$
$$- [5\cdot 2\cdot 2 + (-2)\cdot 3\cdot 3 + 2\cdot(-1)\cdot(-4)]$$
$$= 12 - 60 + 4 - [20 - 18 + 8] = -54.$$

Cramerovo pravilo

Važnost determinanti trećeg reda jest u tome što za njih vrijedi formula potpuno analogna formuli za rješenje sustava dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama.

Objasnimo postupak rješavanja na općem sustavu triju jednadžbi s trima nepoznanicama:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases}$$

Označimo s D determinantu matrice ovog sustava:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

a s D_x, D_y, D_z determinantu matrice koja se dobije tako da se koeficijenti uz nepoznanicu zamijene koeficijentima desne strane sustava (tzv. stupcem slobodnih članova):

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Uz pretpostavku da je determinanta sustava D različita od nule, postoji samo jedno rješenje sustava:

$$x = \frac{D_x}{D}, \qquad y = \frac{D_y}{D}, \qquad z = \frac{D_z}{D}.$$

Opravdanje ove formule može se dobiti bilo dubljim ulaženjem u svojstva determinanti, što se uči na studiju, bilo mukotrpnim rješavanjem početnog sustava i usporedbom s gotovom formulom (srećom, taj postupak treba napraviti samo jednom). Kad rješavamo sustave na ovaj način, kažemo da primjenjujemo **Cramerovo pravilo**.

Primjer 4.

Cramerovim pravilom riješimo sustav

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ 2x - y - z = 1, \\ x + 3y + 4z = 6. \end{cases}$$

Determinanta sustava je

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&-1&-1\\1&3&4\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-1&-1\\3&4\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}2&-1\\1&4\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}2&-1\\1&3\end{vmatrix}$$
$$=1\cdot(-1)-2\cdot 9+3\cdot 7=2.$$

Determinanta je različita od nule, pa postoji jedinstveno rješenje sustava. Izračunajmo preostale tri determinante D_x, D_y i D_z. U determinanti D_x prvi stupac determinante D zamijenjen je stupcem slobodnih članova. Slično je i za D_y i D_z:

$$D_x=\begin{vmatrix}5&2&3\\1&-1&-1\\6&3&4\end{vmatrix}=2,\qquad D_y=\begin{vmatrix}1&5&3\\2&1&-1\\1&6&4\end{vmatrix}=-2,\qquad D_z=\begin{vmatrix}1&2&5\\2&-1&1\\1&3&6\end{vmatrix}=4.$$

Rješenje je $x=\dfrac{D_x}{D}=1$, $y=\dfrac{D_y}{D}=-1$, $z=\dfrac{D_z}{D}=2$.

Cramerovo pravilo

Ako je determinanta D sustava od triju linearnih jednadžbi s trima nepoznanicama

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2,\\a_3x+b_3y+c_3z=d_3,\end{cases}$$

različita od nule, onda on ima jedinstveno rješenje:

$$x=\frac{D_x}{D},\qquad y=\frac{D_y}{D},\qquad z=\frac{D_z}{D}.$$

Ovdje su D_x, D_y, D_z determinante matrica koje se dobiju tako da se koeficijenti uz odgovarajuću nepoznanicu zamijene s koeficijentima desne strane sustava.

Zadaci 1.2.

1. Izračunaj determinante Sarrusovim pravilom, a zatim razvojem po prvom retku:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; **2)** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; **4)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; **6)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 7 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; **8)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}$.

2. Izračunaj determinante razvojem po najpogodnijem retku ili stupcu:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. **2)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; **4)** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$; **6)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Izračunaj determinante:

1) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix}$; **2)** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$; **3)** $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} a & a & b \\ a & b & a \\ b & a & a \end{vmatrix}$; **5)** $\begin{vmatrix} a-b & a-b & 1 \\ a-b & 1 & a+b \\ 1 & a+b & a+b \end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$.

4. Izračunaj determinante:

1) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \cos\alpha & 1 & \sin\alpha \\ 1 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} 1 & \sin\alpha & 1 \\ \sin\beta & 1 & \cos\beta \\ 1 & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$.

5. Riješi Cramerovim pravilom:

1) $\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ x + y + 2z = 9, \\ x - 3y + 3z = 4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + 2y + 2z = 1, \\ 2x + y + 2z = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x + 3y - z = -4, \\ x + y - 4z = -5, \\ 3x + y + z = 4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x + 3y - z = -2, \\ 3x + y - 4z = -2, \\ 4x + 3y + 4z = 5; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x - y + 3z = -7, \\ 2x + 2y - 4z = 22; \\ -3x + 3y + 2z = -1. \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x - 3y + 4z = -17, \\ 4x + 3y - z = 14, \\ 2x + y + 3z = -8; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x - 3y + 3z = 9, \\ 3x - 5y + 2z = -4, \\ 4x - 7y + z = 5; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x - 3y + 4z = -1, \\ 3x - 12y + 9z = -9. \end{cases}$

1.3. Sustavi linearnih jednadžbi

Nebrojene su primjene sustava linearnih jednadžbi. Zato moramo dobro naučiti način njihovog rješavanja. U prošlim smo točkama naučili kako se ti sustavi mogu rješavati primjenom determinanti. Sad ćemo upoznati još jedan način primjenjiv i u slučajevima koji se ne mogu riješiti determinantama ili je takav postupak nepraktičan. To se odnosi, primjerice, na situaciju kad broj jednadžbi i broj nepoznanica nisu identični.

Opći oblik linearnog sustava m jednadžbi s n nepoznanica je

$$\left\{\begin{array}{rcrcccrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}\right. \tag{1}$$

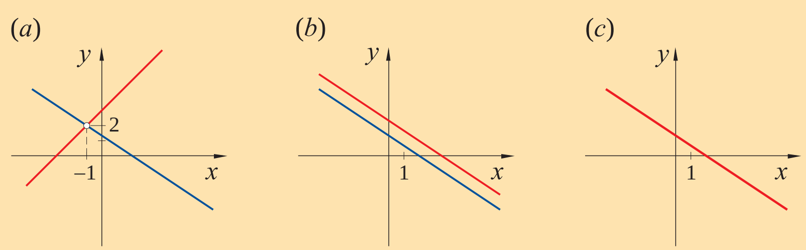
Rješenje ovog sustava je svaka n-torka $(x_1, \ldots, x_n)$ koja uvrštena u (1) identički zadovoljava sve jednadžbe.

Sustav može imati jedinstveno rješenje, može biti bez ijednog rješenja, ali može imati i beskonačno mnogo rješenja. Ilustrirajmo to na primjerima sustava tipa 2×2. (Tu je uobičajeno imena nepoznanica označavati s x i y.)

Primjer 1.

Riješimo sustave

(**a**) $\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 3y & = & 4, \\ -x & + & y & = & 3; \end{array}\right.$ (**b**) $\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 3y & = & 4, \\ 4x & + & 6y & = & 7; \end{array}\right.$ (**c**) $\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 3y & = & 4, \\ 4x & + & 6y & = & 8. \end{array}\right.$



Linearni sustav može imati jedno rješenje, niti jedno rješenje ili beskonačno mnogo rješenja.

▶ Sustav (a) ima jedinstveno rješenje $(x, y) = (-1, 2)$. Sustav (b) nema rješenja. (Uvjeri se zbog čega!) Sustav (c) ima beskonačno mnogo rješenja. Jednu nepoznanicu, recimo y, možemo odrediti po volji, dok se druga zatim računa iz veze $x = 2 - \frac{3}{2}y$.

Matrica sustava

Svakom sustavu pridružene su dvije matrice. Tablicu koeficijenata uz nepoznanice nazivamo **matrica sustava**:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Pridružimo li joj i koeficijente s desne strane jednadžbi, dobit ćemo **proširenu matricu sustava**:

$$A_p = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right].$$

Stupac s koeficijentima desne strane sustava odvajamo crticama od ostatka matrice.

Ova tablica predstavlja jednostavniji zapis cijelog sustava. Svaki redak tablice predstavlja jednu jednadžbu sustava. U svakom stupcu tablice nalaze se koeficijenti uz istu nepoznanicu. Tako pri rješavanju sustava ne moramo zapisivati nepotrebne podatke, pa je postupak rješavanja pregledniji i brži.

Opišimo **Gauss-Jordanovu**[1] **metodu** za rješavanje ovog sustava. Ona se sastoji u tome da se sustav (1) *elementarnim transformacijama* svede na njemu ekvivalentan sustav iz kojeg ćemo moći odrediti njegova rješenja. Dva sustava nazivamo **ekvivalentnim** ukoliko imaju isti skup rješenja.

Pri svođenju sustava na ekvivalentan dozvoljeno je koristiti sljedeće **elementarne transformacije**:

- zamjena poretka dviju jednadžbi u sustavu,
- množenje jedne jednadžbe brojem različitim od nule,
- dodavanje nekoj jednadžbi neke druge jednadžbe pomnožene brojem različitim od nule.

Ako je $(x_1, \dots, x_n)$ rješenje sustava (1), tada je očito ta n-torka rješenje i sustava dobivenog bilo kojom od ovih transformacija (i obratno!).

Pratimo Gauss-Jordanovu metodu na jednom primjeru i istovremeno promotrimo kako se rješavanje sustava zapisuje u matričnom obliku.

[1] Wilhelm Jordan (1842.–1899.), njemački profesor geodezije. U trećem izdanju svoje knjige *priručnik iz geodezije* 1888. g. opisao je metodu rješavanja linearnih sustava koja sadrži sistematsku eliminaciju nepoznanica.

Primjer 2.

Gauss-Jordanovom metodom riješimo sustav

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 5,\\ 2x - y - z &= 1,\\ x + 3y + 4z &= 6. \end{aligned}$$

Proširena matrica sustava je

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5\\ 2 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right].$$

Transformirajmo sada sustav primjenjujući dopuštene transformacije. U prvom koraku želimo poništiti koeficijente uz nepoznanicu x u drugoj i trećoj jednadžbi. To ćemo učiniti tako da prvu jednadžbu pomnožimo s -2 i dodamo drugoj. Time ćemo dobiti ekvivalentni sustav:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 5,\\ -5y - 7z &= -9,\\ x + 3y + 4z &= 6. \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5\\ 0 & -5 & -7 & -9\\ 1 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right]$$

Sada ćemo prvu jednadžbu pomnožiti s -1 i dodati trećoj:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 5,\\ -5y - 7z &= -9,\\ y + z &= 1. \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5\\ 0 & -5 & -7 & -9\\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

(Obje ove operacije mogli smo učiniti odjednom.) Sada promatramo posljednje dvije jednadžbe. Treća ima jednostavnije koeficijente, pa ćemo zamijeniti poredak ovih jednadžbi. To je operacija koju smijemo načiniti:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 5,\\ y + z &= 1,\\ -5y - 7z &= -9. \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -5 & -7 & -9 \end{array}\right]$$

U sljedećem koraku želimo poništiti sve koeficijente uz nepoznanicu y osim onog u drugoj jednadžbi. Da bismo to postigli, trebamo drugu jednadžbu pomnožiti s -2 i dodati prvoj, a zatim pomnožiti s 5 i dodati trećoj:

$$\begin{aligned} x + z &= 3,\\ y + z &= 1,\\ -2z &= -4. \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right]$$

Jednadžbu smijemo pomnožiti brojem različitim od nule. Učinit ćemo to s trećom jednadžbom:

$$\begin{aligned} x + z &= 3,\\ y + z &= 1,\\ z &= 2. \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Na kraju poništavamo koeficijente uz nepoznanicu z u prvim dvjema jednadžbama. Treću jednadžbu pomnožimo s -1 i dodajmo prvoj, a zatim i drugoj:

$$\begin{array}{rcl} x & = & 1, \\ y & = & -1, \\ z & = & 2. \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Time smo riješili sustav. Postoji samo jedno rješenje: $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$.

Sada ponovimo postupak, ali tako da izdvojimo samo proširene matrice sustava. Korake povezujemo znakom $\sim$, koji označava da susjedne matrice pripadaju međusobno ekvivalentnim sustavima:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -7 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & -9 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Jasno je da je ovaj zapis praktičniji, pa ćemo u daljnjem postupak rješavanja sustava zapisivati samo na ovaj način.

Opisanim transformacijama s jednadžbama sustava odgovaraju sljedeće dozvoljene elementarne transformacije na retcima matrice:

- zamjena dvaju redaka matrice,
- množenje retka brojem različitim od nule,
- dodavanje nekom retku nekog drugog retka pomnoženog brojem različitim od nule.

Primjer 3.

Riješimo sustav

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & - & z & = & -4, \\ -x & + & 2y & + & 3z & = & 5, \\ 2x & + & y & + & z & = & 6. \end{array}$$

Napišimo proširenu matricu sustava A_p i svedimo matricu A na jednostavniji oblik. Cilj nam je u svakom retku matrice A dobiti najviše jedan element različit od nule.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{l} \text{dodajemo prvi r. drugom r.} \\ \text{dodajemo prvi r. } \times(-2) \text{ trećem r.} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 14 \end{array}\right] q \sim \left[\begin{array}{l} \text{množimo} \\ \text{drugi r. s } \frac{1}{5} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & -5 & 3 & 14 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix}\text{dodajemo drugi r. } \times(-3) \text{ prvom r.}\\ \text{dodajemo drugi r. } \times 5 \text{ trećem r.}\end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -\frac{11}{5} & -\frac{23}{5}\\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix}\text{množimo}\\ \text{treći r. s } \frac{1}{5}\end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -\frac{11}{5} & -\frac{23}{5}\\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix}\text{dodajemo treći r. } \times\frac{11}{5} \text{ prvom r.}\\ \text{dodajemo treći r. } \times -\frac{2}{5} \text{ drugom r.}\end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Ovime je postupak transformacija završen i treba još očitati rješenje. Dobiveni sustav ekvivalentan je početnome, a uz matrične koeficijente leže odgovarajuće nepoznanice. Tako ovaj matrični zapis daje jednadžbe:

$$x = 2,$$
$$y = -1,$$
$$z = 3,$$

koje daju traženo rješenje.

Vektorski zapis

Rješenje sustava linearnih jednadžbi možemo pisati u kompaktnijem zapisu, uporabom vektora. **Vektorom** ovdje zovemo matricu sa samo jednim stupcem. Tako je, na primjer, rješenje prijašnjeg primjera u vektorskom zapisu:

$$\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\\ -1\\ 3\end{bmatrix}.$$

Naziv *vektor* nije u suprotnosti s već prije uvedenim pojmom vektora u ravnini. Naime, vektor možemo zapisati na dva različita načina:

$$3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} = \begin{bmatrix} 3\\ -2\end{bmatrix}.$$

Dakle, *elementi vektora jednaki su koordinatama u njegovom prikazu u kanonskoj bazi*. Posebno za vektore kanonske baze vrijedi:

$$\vec{\imath} = \begin{bmatrix} 1\\ 0\end{bmatrix}, \qquad \vec{\jmath} = \begin{bmatrix} 0\\ 1\end{bmatrix}.$$

Vektor se množi skalarom tako da se svaki njegov element pomnoži tim skalarom:

$$\lambda \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1\\ \lambda x_2\end{bmatrix}.$$

Dva se vektora zbrajaju tako da im se zbroje odgovarajući elementi:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{bmatrix}.$$

Više o vektorima i matricama bit će riječi u posljednjem poglavlju udžbenika.

Primjer 4.

Riješimo sljedeće sustave:

$$1)\ \left\{\begin{array}{rrrcl} -x & +3y & +3z & = & 4, \\ -2x & +6y & +6z & = & 1, \\ 4x & +5y & & = & 2. \end{array}\right. ; \qquad 2)\ \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +2y & +3z & = & 3, \\ -2x & & +z & = & -2, \\ x & +2y & -z & = & 3, \\ -x & +2y & +12z & = & 1. \end{array}\right. .$$

1) Transformirajmo proširenu matricu sustava:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \\ 4 & 5 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Iz drugog retka čitamo da sustav nema rješenja. Tom retku odgovara jednadžba kojoj je lijeva strana jednaka nuli, a desna je -7. Prema tome, *ako u postupku rješavanja dobijemo redak proširene matrice u kojem je samo element desne strane različit od nule, onda sustav nema rješenja*.

2) U ovom ćemo primjeru primijeniti neznatno promijenjeni postupak rješavanja. Matricu sustava transformiramo tako da poništavamo samo elemente u retcima ispod ključnog retka. Time ćemo uz minimalni broj operacija ustanoviti ima li sustav uopće rješenje:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 12 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 15 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Sad nastavljamo postupak transformacije prosirene matrice sustava. Taj se korak naziva *obratni hod*. Posljednji redak matrice (ispunjen nulama) ne moramo prepisivati. Krećemo od trećeg retka matrice i promatramo koeficijente uz nepoznanicu z. U prvom koraku poništavamo te koeficijente u prvim dvama retcima matrice. Nakon toga postupak ponavljamo s koeficijentima uz nepoznanicu y:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Rješenje sustava glasi $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$.

Ovakav način rješavanja linearnog sustava naziva se **Gaussova metoda**. Ukupan broj operacija koje trebamo načiniti da bismo riješili sustav nešto je manji nego kod Gauss-Jordanove metode.