1. Brojevi

Broj je temeljni pojam matematike. Tijekom dosadašnjeg školovanja upoznali smo temeljna svojstva skupa prirodnih brojeva $\mathbf{N}$, cijelih brojeva $\mathbf{Z}$, racionalnih $\mathbf{Q}$, realnih $\mathbf{R}$ i kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$. Svakako najjednostavniji među njima je skup prirodnih brojeva. Na početku ovog poglavlja istaknut ćemo neka dodatna svojstva ovog skupa. Pokazat ćemo zatim kako se krenuvši od skupa $\mathbf{N}$ dobivaju složeniji skupovi brojeva. Detaljnije ćemo obraditi svojstva realnih brojeva, jer se na njima zasniva *matematička analiza*, disciplina koju ćemo proučavati u nastavku, kao i svojstva kompleksnih brojeva, zbog njihove važnosti u primjenama.

1.1. Brojevni sustavi

Prirodne brojeve danas zapisujemo na ovaj način: $1, 2, 3, \ldots$. Zapis broja ne smijemo poistovjetiti sa samim brojem, jer se isti broj može zapisivati na različite načine.

Poznato nam je da su Rimljani u tu svrhu rabili slova svoje latinične abecede. Slova I, V, X, L, C, D, M označavala su redom brojeve 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000. Njihovim kombiniranjem možemo zapisati višeznamenkaste brojeve: MCMXCVI predstavlja broj 1996, dok se 1886 piše MDCCCLXXXVI. Očito je ovakav način zapisivanja pogodan samo za zapis broja, a nikako i za računanje s takvim brojevima (kako pomnožiti XCVI s DCCXLI?). Sličan sustav zapisivanja brojeva koristio se u doba uporabe glagoljice. Praktički je svako slovo glagoljice imalo i svoju numeričku vrijednost.

Pozicijski zapis brojeva

Način na koji mi danas zapisujemo brojeve ima dvije bitne karakteristike. To je **pozicijski zapis**, tj. vrijednost znamenke nije određena samo njezinim iznosom, već i mjestom u zapisu broja na kojemu se ona nalazi. Druga je bitna karakteristika da pritom koristimo *deset* različitih znamenaka: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Što karakterizira pozicijski zapis? Svako mjesto u zapisu broja ima svoju *težinu*, koja se povećava deset puta za svaki pomak znamenke ulijevo: u broju 237 znamenka 7 je znamenka **jedinica** koja vrijedi 7, znamenka 3 je znamenka **desetica** koja vrijedi 30 (trideset) jedinica, a 2 je znamenka **stotica** koja vrijedi 200 (dvije stotine) jedinica.

Za nekog tko slabije prebrojava kažemo da "broji na prste". Međutim, činjenica da čovjek ima *deset* prstiju upravo je i odredila način našeg brojanja: veće brojeve iskazujemo s pomoću potencija broja deset. Tako, primjerice, broj tri stotine dvadeset šest prikazujemo pomoću potencija broja 10 ovako:

$$3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 6 = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 6$$

i taj broj zapisujemo kratko kao 326, pazeći na *položaj* svake znamenke u ovom zapisu. Broj 35 206 možemo napisati ovako:

$$35\,206 = 3 \cdot 10\,000 + 5 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 6 = 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 6.$$

Općenito, višeznamenkasti broj N zapisujemo kao $N = a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$. Vrijednost tog broja je

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Njegove znamenke $a_n, \ldots, a_1, a_0$ cijeli su brojevi iz skupa $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Za broj kažemo da je zapisan u **dekadskom sustavu** ili **sustavu s bazom 10**.

* * *

Za bazu brojevnog sustava možemo uzeti bilo koji drugi prirodni broj veći od 1.

Zapis broja u sustavu s bazom b

Neka je $b > 1$ prirodan broj. Prirodni broj N zapisan u pozicijskom sustavu s bazom b ima vrijednost:

$$N = a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_{0\,(b)} = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot b + a_0.$$

Znamenke $a_0, a_1, \ldots, a_n$ cijeli su brojevi iz skupa $\{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$. Indeks označava u kojoj je bazi zapisan broj.

Tako na primjer $152_{(8)}$ predstavlja broj zapisan u sustavu s bazom 8. Koji je to broj u dekadskom sustavu? Računajmo ovako:

$$152_{(8)} = 1 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 + 2 = 64 + 40 + 2 = 106_{(10)}$$

Po dogovoru, brojeve u dekadskom sustavu pisat ćemo bez oznake baze: $106_{(10)} = 106$. Evo još nekoliko primjera:

$$\begin{aligned}
3216_{(12)} &= 3 \cdot 12^3 + 2 \cdot 12^2 + 1 \cdot 12 + 6 &&= 5490,\\
10010011_{(2)} &= 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2 + 1 &&= 147,\\
234_{(5)} &= 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 4 &&= 69.
\end{aligned}$$

* * *

U Disneylandu, gdje svako biće ima po četiri prsta na obje ruke, 5203 bio bi zapis broja $5 \cdot 8^3 + 2 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8 + 3$. Ovdje je broj shvaćen kao broj zapisan u bazi 8, jer je to prirodna baza za bića koja imaju ukupno 8 prstiju. U našem, dekadskom sustavu, taj broj iznosi 2691. *Izbor baze određuje zapis prirodnog broja.* I samo brojanje u Disneylandu sigurno bi izgledalo drukčije: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12,... Što znače brojevi 10 i 11 u ovom slijedu? Nakon 7 (jedinica) slijedi 10 što se može čitati kao jedna desetica i bez jedinica (dvije "pune ruke"!). Desetica u Disneylandu ne odgovara našoj desetici, već označava naš broj 8.

Broj različitih znamenaka, imena brojeva i postupak brojanja ovise o izabranoj bazi. U sustavu s bazom b postoji točno b različitih znamenaka. Njihova imena i zapis ovise o tome koliki je broj b.

Tako se na primjer, niz prirodnih brojeva zapisan ovako:

$$1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 33, 100, 101, \ldots$$

javlja pri brojanju u sustavu s bazom četiri. Kako se čita broj 100? Najpravilnije bi bilo izgovarati: jedan-nula-nula. Međutim, radi naše navike i ove brojeve čitamo kao brojeve u dekadskom sustavu zapisane na isti način: jedan, dva, tri, deset, jedanaest, dvanaest.... Pri tome moramo imati na umu da je njihova vrijednost drukčija od vrijednosti brojeva u dekadskom sustavu koji imaju isti zapis i čitaju se na isti način.

• U **dekadskom** sustavu koristimo standardna imena i zapis znamenaka: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

• U **oktalnom** sustavu (s bazom osam) postoji osam različitih znamenki. Za njihov zapis koristimo prvih osam znamenaka dekadskog sustava: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Brojeve čitamo na isti način kao u dekadskom sustavu.

• U **binarnom** sustavu (s bazom dva) postoje samo dvije različite znamenke: 0 i 1. Ovdje je, zbog malog broja različitih znamenki, prikladnije brojeve čitati znamenku po znamenku. Tako na primjer, broj $13 = 1101_{(2)}$ čitamo jedan-jedan-nula-jedan, što je bolje od tisuću sto i jedan.

• U **heksadekadskom** sustavu (s bazom šesnaest) postoji šesnaest različitih znamenaka. U njihovu zapisu koristimo svih deset znamenaka dekadskog sustava i prvih šest slova latinične abecede: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F. Dekadske vrijednosti nekih heksadekadskih brojeva su:

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_{(16)} &= 10, \quad \mathrm{B}_{(16)} = 11, \quad \mathrm{C}_{(16)} = 12,\\
\mathrm{D}_{(16)} &= 13, \quad \mathrm{E}_{(16)} = 14, \quad \mathrm{F}_{(16)} = 15,\\
2\mathrm{C}_{(16)} &= 2 \cdot 16 + 12 = 44,\\
\mathrm{E}38_{(16)} &= 14 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16 + 8 = 3640.
\end{aligned}$$

Brojeve čitamo znamenku po znamenku.

* * *

Veza binarne, oktalne i heksadekadske baze

Razvojem računalstva naročito su značajne postale binarna i heksadekadska baza. Razlog tome je što računalo čitav svoj rad zasniva na tome što se svaki njegov elementarni sklop (*bit*) može nalaziti u jednom od dva stanja: 0 — neaktivnom i 1 — aktivnom. Kombiniranjem bitova možemo zapisati sve prirodne brojeve *u binarnom* *sustavu*. Svaki je broj u računalu pohranjen u binarnom sustavu. Svako slovo ima svoj brojčani ekvivalent i ponovno je prikazano brojem u binarnom sustavu. Svaka poruka napisana na tipkovnici pretvara se u niz nula i jedinica i pamti u binarnom sustavu.

Zapis je u binarnom sustavu jednostavan, no zahtijeva velik broj znamenaka. Stoga se binarni brojevi uglavnom prevode u heksadekadski sustav. Taj je prijelaz vrlo jednostavan. Naime, jedna znamenka heksadekadskog sustava odgovara točno četirima znamenkama binarnog sustava. To se događa zbog toga što je broj 16 potencija broja 2, $16 = 2^4$. Prikažimo odnos brojeva u ova dva sustava. Brojevi s lijeve strane jednakosti zapisani su u heksadekadskom, a s desne strane u binarnom sustavu.

$$\begin{array}{llll}
0 = 0 & 4 = 100 & 8 = 1000 & \mathrm{C} = 1100 \\
1 = 1 & 5 = 101 & 9 = 1001 & \mathrm{D} = 1101 \\
2 = 10 & 6 = 110 & \mathrm{A} = 1010 & \mathrm{E} = 1110 \\
3 = 11 & 7 = 111 & \mathrm{B} = 1011 & \mathrm{F} = 1111
\end{array}$$

Sad se, koristeći ovu tablicu, višeznamenkasti broj napisan u heksadekadskom sustavu lako može prevesti u binarni broj i obratno. Svakoj znamenki heksadekadskog sustava odgovaraju četiri znamenke binarnog sustava, i obratno. Pritom nule na početku broja ispuštamo:

$$\begin{aligned}
\mathrm{6C9}_{(16)} &= 110\,1100\,1001_{(2)}, \\
\mathrm{2EB3}_{(16)} &= 10\,1110\,1011\,0011_{(2)}, \\
110\,0010\,1110\,1011_{(2)} &= \mathrm{62EB}_{(16)}, \\
11\,1111\,1111_{(2)} &= \mathrm{3FF}_{(16)}.
\end{aligned}$$

Zapise oblika $\mathrm{2AA1\,32FF}$ vidjet ćemo pretražujući programe napisane u internom jeziku računala. Time je predstavljen osmeroznamenkasti broj u heksadekadskom sustavu, koji odgovara tridesetdvoznamenkastom binarnom broju, što je danas standardni zapis podatka u memoriji 32-bitnog osobnog računala.

* * *

Slična veza postoji i između binarnog i oktalnog sustava. Jedna znamenka oktalnog sustava odgovara točno trima znamenkama binarnog sustava, jer je $2^3 = 8$. Prikažimo odnos brojeva u ova dva sustava. S lijeve strane su brojevi zapisani u oktalnom, a s desne strane u binarnom sustavu.

$$\begin{array}{ll}
0 = 0 & 4 = 100 \\
1 = 1 & 5 = 101 \\
2 = 10 & 6 = 110 \\
3 = 11 & 7 = 111
\end{array}$$

Tako vrijedi

$$\begin{aligned}
16_{(8)} &= 1\,110_{(2)}, \\
5407_{(8)} &= 101\,100\,000\,111_{(2)}, \\
10\,010\,111\,001_{(2)} &= 2271_{(8)}, \\
11\,111\,111\,111_{(2)} &= 3777_{(8)}.
\end{aligned}$$

Primjer 1. Broj 2CA2 zapisan u heksadekadskom sustavu prebacimo u oktalni sustav.

▷ Pretvorbu ćemo načiniti pomoću binarnog sustava: broj ćemo najprije prebaciti u binarni sustav, a zatim iz njega u oktalni. Jednoj znamenki heksadekadskog sustava odgovaraju četiri znamenke binarnog sustava, a zatim trima znamenkama binarnog odgovara jedna znamenka oktalnog sustava:

$$2CA2_{(16)} = 10\,1100\,1010\,0010_{(2)} = 10\,110\,010\,100\,010_{(2)} = 26242_{(8)}. \quad \triangleleft$$

Prijelaz iz dekadskog sustava

Prijelaz iz dekadskog sustava u sustav s bazom b nije tako jednostavan. Razlog tome je što broj 10 nije potencija nijednog prirodnog broja b. Stoga, broj zapisan u dekadskom sustavu ne možemo prevesti u neki drugi sustav [1] na jednostavan način poput gornjih veza binarne i heksadekadske baze, već moramo koristiti druge načine.

Primjer 2. Pretvorimo u sustav s bazom 8 broj 238.

▷ Potencije broja 8 su: $8^1 = 8$, $8^2 = 64$, $8^3 = 512$. Kako je time premašen zadani broj, najveća potencija koja ulazi u prikaz broja bit će $8^2 = 64$. Vrijedi:

$$238 = 3 \cdot 64 + 46 = 3 \cdot 64 + 5 \cdot 8 + 6 = 356_{(8)}. \quad \triangleleft$$

Ovakav je način računanja općenito nepraktičan i dug. Zapišimo dobiveni rezultat kao

$$238 = 3 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 + 6 = (3 \cdot 8 + 5) \cdot 8 + 6.$$

U ovom se rastavu prepoznaju znamenke 3, 5 i 6 u zapisu broja u oktalnom sustavu. Posljednja znamenka 6 zapravo je ostatak pri dijeljenju broja 238 s 8:

$$238 = 29 \cdot 8 + 6.$$

Druga znamenka zdesna dobiva se kao ostatak pri dijeljenju broja 29 s 8: $29 = 3 \cdot 8 + 5$. Kvocijent daje treću znamenku.

* * *

Napišimo općeniti algoritam. U svakom koraku dijelimo brojem b s ostatkom. Postupak nastavljamo onoliko dugo dok količnik ne postane manji od b:

$$\begin{aligned}
N &= q_1 \cdot b + a_0, & 0 &\leqslant a_0 < b,\\
q_1 &= q_2 \cdot b + a_1, & 0 &\leqslant a_1 < b,\\
q_2 &= q_3 \cdot b + a_2, & 0 &\leqslant a_2 < b,\\
&\ \vdots\\
q_{n-1} &= q_n \cdot b + a_{n-1}, & 0 &\leqslant a_{n-1} < b,\\
q_n &= 0 \cdot b + a_n, & 0 &\leqslant a_n < b.
\end{aligned}$$

[1] Osim u sustave s bazom 100 ili 1000 i slične, koji se u praksi ne koriste.

Na koncu postupka je $N = a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_{0(b)}$. Naime, uvrštavanjem svih izračunatih vrijednosti dobivamo sljedeći prikaz broja N:

$$\begin{aligned} N &= q_1 b + a_0 \\ &= (q_2 b + a_1)b + a_0 = q_2 b^2 + a_1 b + a_0 \\ &= (q_3 b + a_2)b^2 + a_1 b + a_0 = q_3 b^3 + a_2 b^2 + a_1 b + a_0 \\ &\;\;\vdots \\ &= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 \\ &= a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_{0(b)}. \end{aligned}$$

* * *

Čitav postupak zapisujemo u obliku tablice kojoj su u prvom retku zapisani količnik pri dijeljenju s b, a u drugom ostatci:

N	q_1	q_2	$\cdots$	q_{n-1}	q_n
a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-1}	a_n

Ostatak pri dijeljenju zapisujemo direktno ispod broja, a količnik desno od njega. Znamenke broja čitamo zdesna na lijevo (u obratnom poretku).

Primjer 3. Prevedimo u oktalni i heksadekadski sustav broj 243681.

▷ Zadani broj dijelimo s brojem 8. Zbog lakšeg računa, pišemo kompletan postupak dijeljenja.

8	243681	30460	3807	475	59	7
	36	64	60	75	**3**	**7**
	48	60	47	**3**		
	1	**4**	**7**			
	1	4	7	3	3	7

Dakle, $243681 = 733741_{(8)}$.

Za prijelaz u heksadekadsku bazu, dijelimo s brojem 16. Ostatke, ukoliko su veći od 9, pišemo onako kako se zapisuju heksadekadske znamenke:

16	243681	15230	951	59	3
	83	83	151	**11**	**3**
	36	30	**7**		
	48	**14**			
	1				
	1	E	7	B	3

Dakle, $243681 = \text{3B7E1}_{(16)}$. ◁

Provjerimo algoritam na još jednom primjeru.

Primjer 4. Odredimo binarni prikaz broja 75. Jer je dijeljenje s 2 jednostavno, u drugom retku pišemo samo ostatke.

Po gornjoj shemi imamo (dijelimo s 2):

75	37	18	9	4	2	1
1	1	0	1	0	0	1

Dobili smo $75 = 1001011_{(2)}$. ◁

Prijelaz u dekadski sustav

Prijelaz iz sustava s bazom b u dekadski sustav jednostavniji je. Ako je $N = a_n a_{n-1} \cdots a_{0(b)}$, onda moramo izračunati broj

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0.$$

Ovaj se broj može računati na uobičajeni način, potenciranjem i zbrajanjem. Ipak, objasnit ćemo algoritam za njegovo računanje u kojem ćemo koristiti samo množenje i zbrajanje, a ne i operaciju potenciranja. Pogledajmo najprije primjer.

Primjer 5. Prikažimo u dekadskoj bazi broj $3156_{(8)}$.

▷ Računajmo ovako

$$N = 3156_{(8)} = 3 \cdot 8^4 + 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 6 = 6 + 8 \cdot (5 + 8 \cdot (1 + 3 \cdot 8)).$$

Računajmo od nutarnjih zagrada prema vani

$$N = 6 + 8 \cdot (5 + 8 \cdot (25)) = 6 + 8 \cdot (205) = 1646.$$

Cijeli postupak ispišimo u obliku tablice

	3	1	5	6
8	3	25	205	1646

Svaki se broj u drugom redu dobije tako da se prethodni pomnoži s $b = 8$ i doda mu se broj iz prvog retka iznad njega. Ispišimo cijeli postupak, korak po korak.

	3	1	5	6
8				

[U prvom retku napisane su znamenke broja, a u drugom vrijednost baze b.]

	3	1	5	6
8	3			

[Prepišimo vrijednost prve znamenke.]

	3	1	5	6
8	3	25		

[Pomnožimo vrijednost baze $b = 8$ s elementom drugog retka i dodamo sljedeći broj iz prvog retka: $8 \cdot 3 + 1 = 25$.]

	3	1	5	6
8	3	25	205	

[Nastavimo na isti način: $8 \cdot 25 + 5 = 205$.]

	3	1	5	6
8	3	25	205	1646

[$8 \cdot 205 + 6 = 1646$. Dobili smo konačnu tablicu, $N = 1646$.] ◁

* * *

Općenito, algoritam možemo napisati ovako:

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_1	a_0
b	$c_n = a_n$	$c_{n-1} = c_n b + a_{n-1}$	$\cdots$	$c_1 = c_2 b + a_1$	$c_0 = c_1 b + a_0$

Broj c_0 predstavlja traženi rezultat. U to se lako možemo uvjeriti ispisujući taj broj:

$$\begin{aligned} c_0 &= c_1 b + a_0 \\ &= (bc_2 + a_1)b + a_0 = c_2 b^2 + a_1 b + a_0 \\ &\vdots \\ &= c_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 \\ &= (c_n b + a_{n-1}) b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 = a_n b^n + \ldots + a_1 b + a_0 = N \end{aligned}$$

Ovaj se način računanja naziva **Hornerov**[1] **algoritam**.

Zadatak 6. Pretvorimo u dekadski sustav broj $\mathrm{A10E9}_{(16)}$.

▷ Račun je napisan u tablici. Prisjetimo se da je $\mathrm{A}_{(16)} = 10$, $\mathrm{E}_{(16)} = 14$.

	A	1	0	E	9
16	10	161	2576	41230	659689

Dakle, $\mathrm{A10E9}_{(16)} = 659689$. ◁

Tablice zbrajanja i množenja

Operacije zbrajanja i množenja možemo izvoditi i u sustavima s drugim bazama. Pravila su identična onima u dekadskom sustavu, jer su i drugi sustavi pozicijski brojevni sustavi. Jedino što moramo svladati je nova tablica množenja i zbrajanja, koja može biti čak i jednostavnija od naše standardne 10×10 tablice.

Da bismo napisali tablicu množenja i zbrajanja u nekom drugom sustavu, moramo odrediti zbroj i umnožak svih jednoznamenkastih brojeva 0, 1, 2. . . , $b - 1$ u tom sustavu. Na primjer, za sustav s bazom 4 tablice glase:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

Pomoću ovakve tablice možemo direktno zbrajati i množiti brojeve u sustavu s bazom 4. Tablice zbrajanja i množenja jednostavnije su od dekadskih, ali račun nije, jer na njega nismo navikli. Trebamo obratiti naročitu pozornost na prijenose znamenki koje u ovom računu zapisujemo umanjenim znamenkama.

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 2\,0\,3\,1 \\ +\quad 1\,2\,1 \\ \hline 2\,2\,1\,2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} {}^{1}\;\;{}^{2} \\ \;2\,0\,3\,1 \cdot 3 \\ \hline 1\,2\,2\,1\,1 \end{array}$$

[1] William George Horner (1786.–1837.), engleski matematičar

* * *

Učinimo to isto u oktalnom sustavu. Potrebno je izračunati zbroj i umnožak svih brojeva od 0 do 7 i rezultat zapisati u ‘tablici množenja’ za sustav s bazom 8. Na primjer, vrijedi $5_8 + 6_8 = 5 + 6 = 11 = 13_8$, $5_8 \cdot 6_8 = 5 \cdot 6 = 30 = 36_8$. Dobivamo sljedeće tablice.

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

·	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Pokušajmo zbrojiti i pomnožiti dva broja:

$$\begin{array}{cccccc} & {\scriptstyle 1} & & {\scriptstyle 1} & \\ & 2 & 5 & 3 & 6 \\ + & 2 & 4 & 1 & 5 \\ \hline & 5 & 1 & 5 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} {\scriptstyle 1\,2\,1\,3} \\ \;\; 2\,5\,3\,6 \cdot 4 \\ \hline 1\,2\,5\,7\,0 \end{array}$$

Ovakav račun pokazuje da je naš način razmišljanja vezan za dekadsku bazu i da je bez ponovna učenja novih tablica praktički nemoguće računati u drugim sustavima. To dakako nećemo raditi. Umjesto toga, jednostavnije je brojeve prevesti u dekadski sustav, načiniti operacije u toj bazi i vratiti rezultat u početnu bazu.

* * *

Drukčija je situacija u binarnom sustavu. Tamo su tablice zbrajanja i množenja iznimno jednostavne:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

·	0	1
0	0	0
1	0	1

i možemo ih brzo usvojiti. Stoga binarnim brojevima računamo u binarnom sustavu. Treba samo obratiti pozornost na prijenos pri zbrajanju više brojeva, koji u ovim primjerima nećemo pisati.

$$\begin{array}{rr} & 1\,0\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,0\,1 \\ + & 1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,1 \\ \hline & 1\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \;\;1\,0\,1\,1 \cdot 1\,1\,0\,1 \\ \hline \;\;1\,0\,1\,1 \\ \;\;\;\;1\,0\,1\,1 \\ \;\;\;\;\;\;\;\;1\,0\,1\,1 \\ \hline 1\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1 \end{array}$$

Zadaci 1.1.

1. Prevedi u dekadski sustav sljedeće brojeve: $221_{(5)}$, $110\,011_{(2)}$, $567_{(8)}$, $21\,000_{(3)}$, $5\,550_{(6)}$.

2. Zapiši u dekadskom sustavu brojeve

1. $1011_{(2)}$, **2.** $100101_{(2)}$, **3.** $1100101_{(2)}$, **4.** $110001011_{(2)}$,
5. $11_{(8)}$, **6.** $24_{(8)}$, **7.** $126_{(8)}$, **8.** $3201_{(8)}$,
9. $8_{(16)}$, **10.** $20_{(16)}$, **11.** $3A_{(16)}$, **12.** $2EB1_{(16)}$.

3. Zapiši dekadske brojeve 6, 13, 25, 125 u sustavima s bazom 2, 8 i 16.

4. Zapiši dekadske brojeve 6, 13, 25, 125 u sustavima s bazom 5, 9 i 12.

5. Zapiši dane dekadske brojeve u sustavima s bazama 2, 5 i 12:
11, 33, 100, 222, 1001.

6. Brojeve 1101, 11000110, $1100110010111001 1$ zadane u binarnoj bazi prebaci u oktalni i heksadekadski sustav.

7. Brojeve 58, $1A2$, FFFF zadane u heksadekadskom sustavu prebaci u oktalni sustav.

8. Brojeve 223, 517, 12053 zadane u oktalnom sustavu prebaci u heksadekadski sustav.

9. Zapiši brojeve $212_{(3)}$, $30_{(4)}$, $245_{(6)}$, $177_{(8)}$, $28_{(12)}$ u sustavu s bazom 2.

10. Zapiši brojeve $101\,110_{(2)}$, $2102_{(3)}$, $3220_{(4)}$, $11\,011_{(5)}$ u sustavu s bazom 8.

* * *

11. Nastavi svaki od sljedećih nizova uzastopnih prirodnih brojeva:
1. 10, 11, 12, 20, 21,... **2.** 101, 110, 111, 1000, 1001,...
3. 1, 2, 3, 10, 11, 12,... **4.** 23, 24, 25, 30, 31, 32,...

12. Nastavi svaki od sljedećih nizova prirodnih brojeva:
1. 10011, 10010, 10001, 10000,... **2.** 10, 100, 110, 1000, 1010,...
3. 10, 20, 100, 110, 120,... **4.** 11, 13, 20, 22, 24,...

13. U kojem sustavu vrijede jednakosti
1. $101_{(x)} + 1001_{(x)} = 1110_{(x)}$; **2.** $1211_{(x)} - 1120_{(x)} = 21_{(x)}$?

14. Vrijede li u bilo kojem brojevnom sustavu jednakosti
1. $10101 + 1101 = 11202$; **2.** $1211 - 1011 = 200$?

15. Zbroj triju uzastopnih brojeva u sustavu s bazom 5 iznosi 121. Koji su to brojevi?

16. Zbroj triju uzastopnih parnih brojeva u binarnom sustavu iznosi $11\,110$. Koji su to brojevi?

17. Umnožak triju uzastopnih brojeva u sustavu s bazom 5 iznosi 440. Koji su to brojevi?

18. Umnožak triju uzastopnih brojeva u sustavu s bazom 9 iznosi 1320. Koji su to brojevi?

19. Umnožak dvaju uzastopnih neparnih prirodnih brojeva u binarnom sustavu iznosi $100\,011$. Koji su to brojevi?

20. **1)** Ako je $\frac{1}{3}$ od 41 jednako 12, koliko je $\frac{1}{4}$ od 103?
2) Ako je $\frac{3}{4}$ od 20 jednako 16, koliko je $\frac{1}{5}$ od 10?

21. Odredi prirodne brojeve x i y iz jednakosti **1)** $23_{(x)} = 41_{(y)}$; **2)** $144_{(x)} = 100_{(y)}$.

22. Odredi brojeve a, b i c iz jednakosti
1. $ab_{(5)} = ba_{(7)}$; **2.** $abc_{(5)} = cba_{(8)}$; **3.** $aba_{(4)} = bab_{(6)}$.

23. **1)** U kojem je sustavu brojeva $101 \cdot 11 = 1111$?
2) U kojem je sustavu brojeva $1\,001 \cdot 111 = 111\,111$? Poopći zaključak!

24. Umnožak $11 \cdot 12 \cdot 13$ jednak je 3102. U kojem je brojevnom sustavu provedeno ovo množenje?

25. U kojem je brojevnom sustavu broj 144 potpuni kvadrat nekog prirodnog broja?

26. U kojem je brojevnom sustavu $125^2 = 16\,324$?

27. Broj 620 kvadrat je broja 24. U kojem je sustavu brojeva proveden račun?

28. Broj $20\,311$ kub je broja 21. U kojem je sustavu brojeva proveden račun?

29. U kojem je brojevnom sustavu broj 1331 potpuni kub nekog prirodnog broja?

* * *

30. Izračunaj, računajući u binarnoj bazi:
1. $1101_{(2)} + 10101_{(2)}$. **2.** $10101_{(2)} + 10111_{(2)}$.
3. $110111_{(2)} + 10101101_{(2)}$. **4.** $1100101_{(2)} + 11001011_{(2)}$;
Brojeve prevedi u dekadski sustav i provjeri rezultat.

31. Izračunaj, računajući u binarnom sustavu:
1. $1111_{(2)} - 1001_{(2)}$; **2.** $11001_{(2)} - 1101_{(2)}$;
3. $110011_{(2)} - 10110_{(2)}$; **4.** $110010111_{(2)} - 1101011_{(2)}$;
Brojeve prevedi u dekadski sustav i provjeri rezultat.

32. Izračunaj, računajući u binarnom sustavu:
1. $110_{(2)} \cdot 11_{(2)}$; **2.** $1101_{(2)} \cdot 101_{(2)}$;
3. $11011_{(2)} \cdot 1001_{(2)}$; **4.** $110111_{(2)} \cdot 101101_{(2)}$.
Brojeve prevedi u dekadski sustav i provjeri rezultat.

33. Napiši tablicu zbrajanja i množenja u sustavu s bazom 3. Uporabom tih tablica izračunaj $1201_{(3)} + 2012_{(3)}$; $1120221_{(3)} \cdot 2_{(3)}$; $20012_{(3)} \cdot 12_{(3)}$.

34. Sastavi tablice zbrajanja i množenja za sustave s bazama 4, 5 i 6.

35. Prevedi sljedeće brojeve zapisane u binarnom sustavu u dekadski sustav:
1. $11.1_{(2)}$; **2.** $101.101_{(2)}$; **3.** $111.111_{(2)}$; **4.** $1000.0001_{(2)}$.

36. Napiši u binarnom sustavu sustavu sljedeće racionalne brojeve:
1. $\frac{1}{2}$; **2.** $\frac{1}{8}$; **3.** $\frac{3}{2}$; **4.** $\frac{1}{2^n}$;
5. 0.25; **6.** 2.5; **7.** 12.125; **8.** 2.0625.

37. Izračunaj, računajući u binarnom sustavu:
1. $11.11_{(2)} + 100.1_{(2)}$; **2.** $1.101_{(2)} + 11.01_{(2)}$;
3. $110.011_{(2)} - 10.11_{(2)}$; **4.** $11011.111_{(2)} - 10.1011_{(2)}$;
5. $11.1_{(2)} \cdot 1.01_{(2)}$; **6.** $1.101_{(2)} \cdot 1.01_{(2)}$.
Brojeve prevedi u dekadski sustav i provjeri rezultat.

1.2. Matematička indukcija

Dva su osnovna načina logičnog zaključivanja: deduktivni i induktivni.

U deduktivnom pristupu se, krenuvši od općih spoznaja, izvode istinite činjenice u nekom konkretnom slučaju. Na primjer, zaključivanje tipa — svi su ljudi smrtni; Petar je čovjek, znači, Petar je smrtan — primjer je deduktivnog zaključivanja.

Ovakav je način zaključivanja korektan: krenuvši od istinitih pretpostavki (premisa), uvijek dolazimo do istinitog zaključka (konkluzije). Njegov je nedostatak što zaključujući ovako ne možemo doći do novih, dotad nepoznatih općenitih spoznaja.

U induktivnom pristupu polazimo od činjenica koje vrijede u nekom konkretnom primjeru i na temelju toga želimo zaključiti o istinama koje vrijede u općenitijoj situaciji. Na primjer: Ivan, Petar i svi ostali učenici u razredu niži su od 2 metra. Znači, svi muškarci niži su od 2 metra.

Ovaj je zaključak očigledno neistinit. Pritom nije važno što je dobivena konkluzija neistinita, nepravilan je *način razmišljanja*. Sljedeće je razmišljanje jednako tako

Leonhard Euler (Basel, 15. travnja 1707. – Peterburg, 18. rujna 1783.), veliki je švicarski matematičar, fizičar i astronom. Utjecao je na razvoj cjelokupne matematike. Matematiku je učio od Johanna Bernoullija. 1726., po osnutku Peterburške akademije znanosti, odlazi živjeti u Rusiju gdje ostaje do kraja života. Uz Cauchyja je matematičar s najviše objavljenih znanstvenih radova. Znameniti su i njegovi udžbenici Introductio in analysin infinitorum, Institutiones calculi differentialis, Institutiones calculi integralis *i* Arithmetica universalis. *Usprkos poodmakloj sljepoći, Euler je većinu radova napisao pri kraju života. Prvi je promatrao funkcije kompleksne varijable i povezao trigonometrijske s eksponencijalnim funkcijama. Uveo je analitičke metode u teoriju brojeva o kojoj je objavio 140 radova. Jedan je od tvoraca suvremene diferencijalne geometrije. Poznata je njegova formula $V - B + S = 2$, o odnosu broja vrhova, bridova i stranica u poliedru. Drži se začetnikom i teorije grafova.*

logički nepravilno, bez obzira na to što upućuje na istinitu konkluziju: Ivan, Petar i svi ostali učenici u razredu niži su od 20 metara. Znači, svi muškarci niži su od 20 metara.

Iako može dovesti do pogrešnih rezultata, metoda induktivnog zaključivanja moćno je i ponekad jedino sredstvo u otkrivanju istinitih činjenica.

Primjer 1. Ovaj primjer neispravnog induktivnog zaključivanja dao je Euler. Promotrimo vrijednost izraza $P(n) = n^2 + n + 41$ za nekoliko prvih vrijednosti prirodnog broja n. Dobivamo brojeve 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97,... — svi su oni prosti brojevi. Može li se zaključiti da će $P(n)$ biti prost za svaki prirodni broj n?

Odgovor je: ne! Za $n = 41$ broj očito nije prost, jer je svaki pribrojnik djeljiv s 41. Nije niti za $n = 40$, jer je $P(40) = 41^2$. Ali jest za sve prirodne brojeve manje od 40. ◁

Primjer 2. Svaki je paran broj veći od 2, a manji od 100 jednak zbroju dvaju prostih brojeva. Tako na primjer vrijedi: $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 3 + 7 = 5 + 5$; $12 = 5 + 7$, $16 = 3 + 13 = 5 + 11, \ldots$, $94 = 3 + 91$, $96 = 3 + 93$, $98 = 5 + 93$ (prikaz nije uvijek jednoznačan). Tvrdnja se može provjeriti i za sljedeće parne brojeve.

Na temelju toga možemo iskazati tvrdnju: svaki paran broj veći od 2 jednak je zbroju dvaju prostih brojeva. Ova je tvrdnja poznata pod imenom **Goldbachova**[2] **hipoteza**, po matematičaru koji ju je prvi formulirao još 1742. god. Do danas je provjerena za velik skup početnih prirodnih brojeva i pokazala se istinitom. Međutim, sama tvrdnja još uvijek nije dokazana. ◁

* * *

Princip matematičke indukcije

Da bi princip induktivnog zaključivanja uvijek dao ispravne rezultate, moramo osigurati neke dodatne uvjete. Na taj ćemo način dobiti način zaključivanja poznat pod imenom **matematička indukcija**.

[2] Christian Goldbach (1690.–1764.), njemački matematičar

Princip matematičke indukcije

Ako neka tvrdnja vrijedi za broj 1 i ako iz pretpostavke da vrijedi za prirodni broj n slijedi da ona vrijedi i za sljedeći broj $n+1$, tad ona vrijedi za svaki prirodni broj n.

Primjer 3. Odredimo formulu za zbroj prvih n neparnih brojeva. Za početne zbrojeve vrijedi:

$$\begin{aligned} 1 &= 1, \\ 1+3 &= 4 = 2^2, \\ 1+3+5 &= 9 = 3^2, \\ 1+3+5+7 &= 16 = 4^2. \end{aligned}$$

Navedeni primjeri navode nas na pomisao da vrijedi

$$1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2. \tag{1}$$

Time smo uporabili *induktivni* način mišljenja. Formula (1) istinita je za prve četiri vrijednosti broja n. Da bismo se uvjerili u njezinu istinitost *za svaki* prirodni broj n, primijenit ćemo princip matematičke indukcije.

Tvrdnja vrijedi za broj $n=1$. Pretpostavimo da je formula (1) istinita za prirodni broj n i dodajmo zbroju s lijeve strane sljedeći član. Iskoristimo pritom pretpostavku indukcije:

$$\underbrace{1+3+5+\ldots+(2n-1)}_{=n^2} + (2n+1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2.$$

Vidimo da tvrdnja vrijedi i za broj $n+1$. Zato ona vrijedi za svaki prirodni broj. ◁

* * *

Radi jednostavnijeg dokazivanja, pojedine korake u zaključivanju matematičkom indukcijom nazivamo posebnim imenima. Tvrdnju o kojoj je riječ možemo označiti s $T(n)$. Dakle, neka je $T(n)$ tvrdnja koja ovisi samo o prirodnom broju n.

Dokaz matematičkom indukcijom

Dokaz matematičkom indukcijom sprovodi se u tri koraka:

i) **Baza indukcije.** Trebamo provjeriti da tvrdnja vrijedi za broj 1, tj. da je $T(1)$ istinita tvrdnja.

ii) **Pretpostavka indukcije.** Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n, tj. pretpostavimo da je $T(n)$ istinita tvrdnja.

iii) **Korak indukcije.** Dokažimo da uz tu pretpostavku tvrdnja vrijedi i za broj $n+1$, tj. iz $T(n)$ slijedi tvrdnja $T(n+1)$.

Tad je tvrdnja $T(n)$ istinita za svaki prirodni broj n.