1.
Funkcije

U dosadašnjem smo školovanju usvojili pojam **funkcije** (preslikavanja, pridruživanja) i upoznali mnoge primjere funkcija poput linearnih, kvadratnih, polinoma, racionalnih, trigonometrijskih, eksponencijalnih, logaritamskih i dr. Funkcije, uz brojeve, predstavljaju temeljni pojam matematike. U nastavku ćemo se baviti proučavanjem raznih svojstava funkcija i njihovim primjenama.

1.1. Zadavanje funkcije. Područje definicije

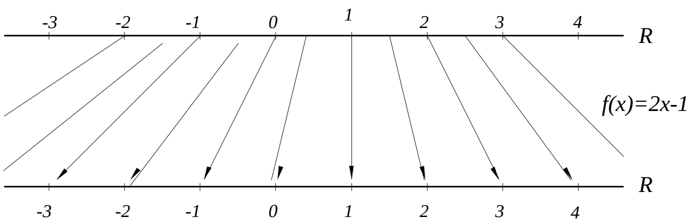
Pojam funkcije

Funkcija je određena svojim **područjem definicije** (**domenom**) $\mathscr{D}$, **područjem vrijednosti** (**kodomenom**) $\mathscr{R}$ i **zakonom pridruživanja**. Mi ćemo promatrati samo funkcije kojima su domena i kodomena podskupovi skupa realnih brojeva. Za takve funkcije kažemo da su realne funkcije realnog argumenta (varijable).

Primjer 1. Funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definirana formulom

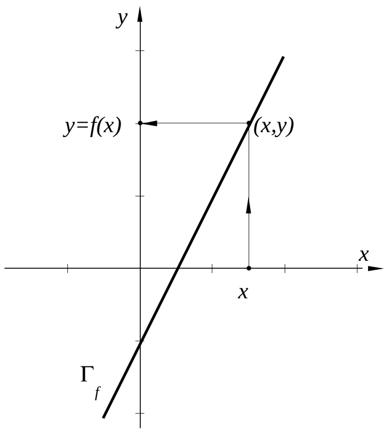
$$f(x) = 2x - 1$$

ima za domenu i kodomenu skup $\mathbf{R}$, a zakon pridruživanja je $x \mapsto 2x - 1$. ◁



Sl. 1.1. Funkcija $f(x) = 2x - 1$

Kad god je to moguće, funkcije ćemo prikazivati crtajući njihov graf Γ_f u Kartezijevom sustavu.



Sl. 1.2. Graf funkcije $f(x) = 2x - 1$ *je pravac* $y = 2x - 1$. *Svakoj vrijednosti* x *iz područja definicije (koje se nalazi na osi apscisa) odgovara točno jedna vrijednost* $y = f(x)$ *iz područja vrijednosti (koje je podskup osi ordinata). Točke s koordinatama* (x, y) *određuju graf funkcije*

* * *

Općenito je graf funkcije skup Γ_f koji čine točke $(x, f(x))$ kad x "prolazi" domenom $\mathscr{D}$. Pišemo još:

$$\Gamma_f = \{(x, y) : y = f(x),\ x \in \mathscr{D}\}.$$

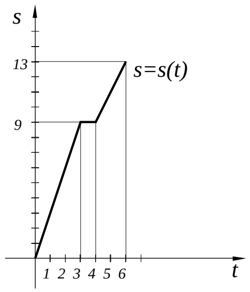
* * *

Funkciju možemo zadati i različitim formulama na različitim intervalima.

Primjer 2. Funkcija

$$s(t) = \begin{cases} 3t, & 0 \leqslant t \leqslant 3, \\ 9, & 3 < t \leqslant 4, \\ 2t + 1, & 4 < t \leqslant 6, \end{cases}$$

opisuje prijeđeni put u kilometrima čovjeka koji je prva tri sata hodao brzinom od 3 km/h, zatim se odmarao sat vremena, a nakon toga dva sata hodao brzinom od 2 km/h. Graf ove funkcije dan je na slici 1.3. ◁



Sl. 1.3. Graf funkcije s. *Na intervalu* $[0, 3]$ *jednadžba pravca je* $s(t) = 3t$. *U točki* $t = 3$ *vrijedi* $s(3) = 9$ *i funkcija je konstantna na intervalu* $[3, 4]$. *Dalje će koeficijent smjera pravca biti 2. a jednadžbu određujemo uz uvjet da pravac prolazi točkom* $(4, 9)$

Analitičko zadavanje funkcija. Područje definicije

Za funkciju zadanu zakonom pridruživanja (koji popularno nazivamo 'formulom'), kažemo da je zadana **analitički**. Na primjer:

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1,$$
$$g(x) = \ln(x - 1),$$
$$h(x) = \sqrt{2 - \sin x}.$$

Ovim je izrazima propisano pravilo na temelju kojega možemo, znajući iznos varijable x, odrediti vrijednost promatrane funkcije.

S tim u vezi moramo postaviti pitanje: što je domena ovako zadane funkcije? Po dogovoru, za domenu uzimamo skup svih realnih brojeva za koje je formula definirana. Tako izračunatu domenu nazivamo **prirodnom domenom** funkcije f i označavamo s $\mathscr{D}$ ili, ponekad radi jasnoće, s $\mathscr{D}_f$.

Tako na primjer, funkcija f ima za domenu $\mathscr{D}_f = \mathbf{R}$. Funkcija g definirana je za one x za koje je $x - 1 > 0$, dakle $\mathscr{D}_g = \langle 1, \infty \rangle$. Funkcija h definirana je za svaki realni broj x, izraz pod korijenom uvijek je pozitivan. Stoga je $\mathscr{D}_h = \mathbf{R}$.

Primjer 3. Odredimo područje definicije funkcija:

A. $f(x) = \log \dfrac{x-1}{x+1}$; **B.** $g(x) = \sqrt{1 - |x - 1|}$.

A. Argument logaritamske funkcije mora biti pozitivan. Nejednakost $\dfrac{x-1}{x+1} > 0$ ekvivalentna je s $(x - 1)(x + 1) > 0$, odakle slijedi $\mathscr{D}_f = \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle$.

B. Mora biti $1 - |x - 1| \geqslant 0$, odnosno $|x - 1| \leqslant 1$ te je $\mathscr{D}_g = [0, 2]$. ◃

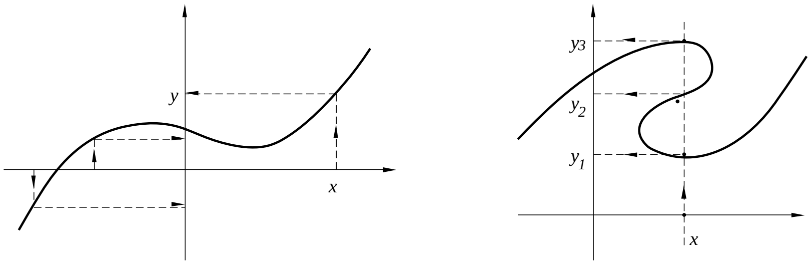
* * *

Graf funkcija koje ćemo mi promatrati [1] opisan je krivuljom (ili dijelovima različitih krivulja) u ravnini. Prirodno je postaviti obratno pitanje:

- Kad neka krivulja predstavlja graf neke funkcije?
- Kako se određuju njezina domena i kodomena, a kako zakon pridruživanja?

[1] Postoje neelementarne funkcije čiji graf može biti bitno složeniji

Osnovni putokaz pri odgovoru na ova pitanja predstavlja sama definicija funkcije, koja kaže da svakom elementu x domene $\mathscr{D}$ mora biti pridružen točno jedan element y iz kodomene $\mathscr{R}$. To znači sljedeće: vertikalni pravac (paralelan s osi ordinata) smije sjeći krivulju najviše u jednoj točki. Apscisa presjeka tog pravca s osi apscisa predstavlja vrijednost varijable x, a odgovarajuću vrijednost od y dobivamo iz presjeka pravca sa zadanom krivuljom.

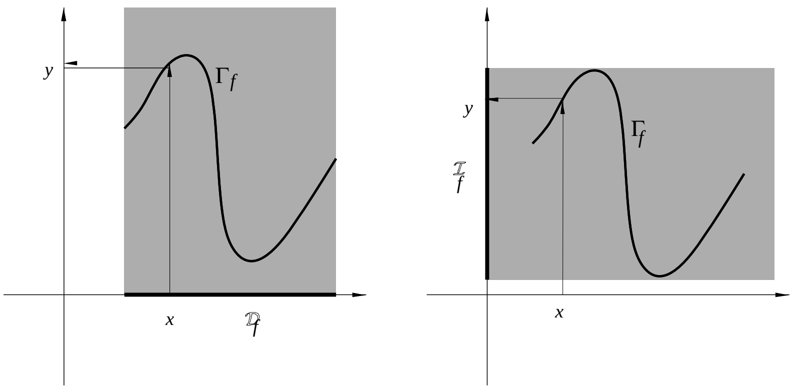


Sl. 1.4. Krivulja lijevo određuje y kao funkciju varijable x. Krivulja desno ne predstavlja graf funkcije. Jednoj vrijednosti varijable x odgovara više vrijednosti varijable y

Što je i kako se računa kodomena $\mathscr{R}$ funkcije f? Pri određivanju kodomene ne moramo biti toliko precizni kao kad određujemo domenu funkcije. U većini slučajeva, točno poznavanje kodomene nije nam niti potrebno. Zato najčešće uzimamo $\mathscr{R} = \mathbf{R}$ i pišemo jednostavno $f : \mathscr{D} \to \mathbf{R}$.

S pojmom kodomene povezan je još jedan skup: **slika funkcije**. Njega možemo shvatiti kao najmanju od svih mogućih kodomena funkcije f. Slika funkcije sastoji se od svih $y \in \mathbf{R}$ za koje postoji $x \in \mathscr{D}$ takav da je $f(x) = y$. To je dakle skup na koji funkcija f preslikava svoju domenu. Označavamo ga s $\mathscr{I}$, ili preciznije, s $\mathscr{I}_f$. Određivanje skupa $\mathscr{I}_f$ nije uvijek jednostavno. To je jedan od zadataka *diferencijalnog računa*.

Slike nekih nama dobro poznatih funkcija odredit ćemo u nastavku.



Sl. 1.5. Područje definicije određujemo računajući sve brojeve x na osi apscisa za koje postoji odgovarajući y. Taj je skup $\mathscr{D}_f$ jednak projekciji grafa na os apscisa (lijevo). Skup vrijednosti (slika funkcije) $\mathscr{I}_f$ je projekcija grafa na os ordinata (desno)

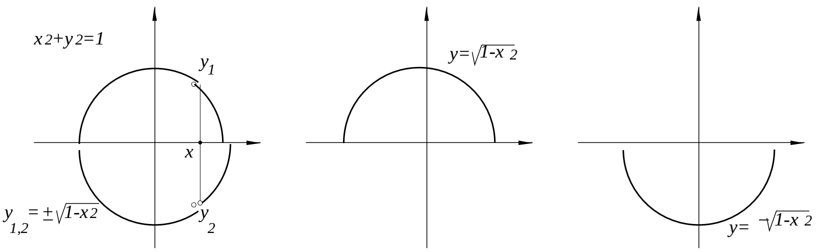
* * *

Implicitno zadavanje funkcije

Skup svih točaka (x, y) koje zadovoljavaju jednadžbu

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

predstavlja kružnicu u ravnini $\mathbf{R}^2$ (slika 1.4). Kako ova krivulja ne zadovoljava uvjet jedinstvenosti presjeka, ona ne određuje funkcijsku vezu između varijabli x i y. Međutim, složit ćemo se da veza ovih varijabli ipak postoji.



Sl. 1.6. Načini određivanja funkcijske veze iz relacijske zavisnosti

Računajući y iz (1) dobit ćemo dvije vrijednosti, dane izrazom

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Promotrimo krivulju opisanu gornjom polovinom kružnice. Ona zadovoljava kriterij jedinstvenosti: jednoj vrijednosti varijable x odgovara točno jedna vrijednost za y. Ona je određena formulom

$$y = f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Donja polovina kružnice određuje funkcijsku zavisnost

$$y = f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Kažemo da je formulom $x^2 + y^2 = 1$ dana **implicitna veza** varijabli x i y, ili da je y zadana **implicitnom formulom**. Tu implicitnu formulu možemo prikazati u obliku nultočke funkcije dviju varijabli:

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Rješavanjem ove jednadžbe po varijabli y, mi određujemo **eksplicitnu formulu** (funkcijsku vezu varijabli x i y). Jednoj implicitno zadanoj funkciji može odgovarati nekoliko (pa čak i beskonačno mnogo) eksplicitnih formula.

Primjer 4. Odredimo eksplicitne formule funkcija zadanih jednadžbom **A.** $3x + 2y = 1$; **B.** $e^y - e^{-y} = 2x$; **C.** $e^y + e^{-y} = 2x$.

▷ **A.** Ovdje je $F(x, y) = 3x + 2y - 1$. Jednadžba $F(x, y) = 0$ implicitna je jednadžba pravca. Time je određena funkcijska veza između varijabli x i y:

$$y = f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

B. Da bismo odredili funkcijsku vezu, moramo jednadžbu riješiti po nepoznanici y. Množenjem s e^y dobivamo ekvivalentnu jednadžbu

$$e^{2y} - 1 = 2xe^y \implies \left(e^y\right)^2 - 2x \cdot e^y - 1 = 0,$$

odakle slijedi

$$e^y_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

Samo za izbor predznaka $+$ desna strana bit će pozitivna. Dakle, $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$, i odavde je:

$$y = f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

C. Postupajući na identičan način, dobivamo sljedeća rješenja kvadratne jednadžbe:

$$e^y_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2-1}.$$

Sad je desna strana pozitivna za $x \geqslant 1$ i za oba izbora predznaka jer je $\sqrt{x^2-1} < \sqrt{x^2} = x$. Prema tome, u ovom slučaju implicitnom jednadžbom definirane su dvije funkcijske veze:

$$y = f_{1,2}(x) = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}), \qquad x \geqslant 1. \quad \triangleleft$$

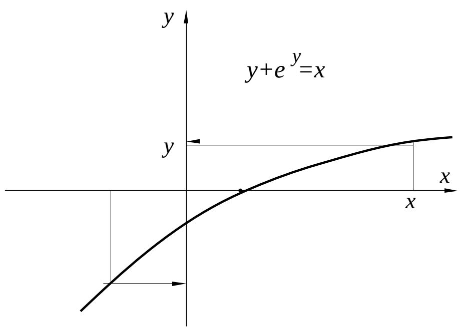
* * *

Implicitna jednadžba svakako je složenija od eksplicitne. Jednadžbu oblika $y = f(x)$ uvijek možemo napisati kao $F(x,y) = 0$; dovoljno je staviti $F(x,y) = y - f(x)$. Obrat nije toliko jednostavan. Odgovor na problem: *kad se neka implicitno zadana funkcija može prevesti na eksplicitni oblik* vrlo je složen i uči se tek u okviru visokoškolske matematike. Ilustrirajmo to na jednom primjeru.

Formula $F(x,y) = 0$ predstavlja jednadžbu koju nije uvijek jednostavno riješiti po jednoj nepoznanici, a ponekad to nije niti moguće učiniti. Tako je na primjer formulom

$$y + e^y - x = 0$$

određena funkcijska veza varijabli x i y. Njezin je graf prikazan slikom 1.7.



Sl. 1.7. Formulom $y+e^y = x$ određena je implicitna veza varijabli x i y koju ne možemo pretvoriti u eksplicitnu, koristeći elementarne funkcije

Želimo li odrediti funkcijsku vezu $y = f(x)$, moramo ovu jednadžbu razriješiti po nepoznanici y. Međutim, to nije moguće učiniti *koristeći elementarne funkcije*. To ne znači da takva veza ne postoji; iz grafa vidimo da on predstavlja graf neke funkcije $y = f(x)$. Međutim, ta se funkcija ne može izraziti pomoću nama poznatih elementarnih funkcija i korištenjem osnovnih algebarskih operacija.

S druge strane, formulom $x = g(y) = y + e^y$ određena je eksplicitna funkcijska zavisnost varijable x o varijabli y (iz ovog oblika nacrtan je graf funkcije). Koji put implicitno zadanu funkciju prevodimo i na ovakav oblik.

Postoje dakako implicitno zadane funkcije koje ne možemo razriješiti niti po jednoj nepoznanici. Neznatno mijenjajući gornji primjer, dobit ćemo

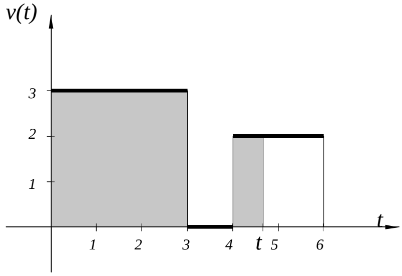
$$y + e^y = x + \sin x.$$

Ova se jednadžba ne da razriješiti pomoću elementarnih funkcija niti po nepoznanici x niti po nepoznanici y.

* * *

Grafički zadane funkcije

Promotrimo ponovo pješaka iz primjera 2. Nacrtajmo dijagram njegove brzine v, u ovisnosti o vremenu t. Prijeđeni put možemo naći računajući *površinu* ispod grafa funkcije v. Tako je put s zadan grafički, kao površina ispod neke krivulje.



Sl. 1.8.

a) Za $t \leqslant 3$ je $s(t) = 3t$.
U točki 3 je $s(3) = 9$.
b) Za $3 \leqslant t \leqslant 4$ je $s(t) = 9$.
c) Za $4 \leqslant t \leqslant 6$ je
$s(t) = 2(t-4) + 9 = 2t - 1$

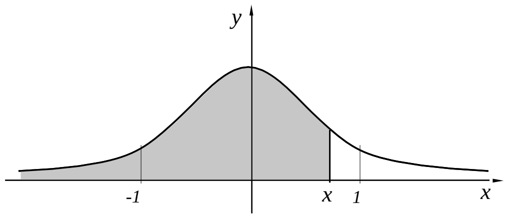
* * *

Elementarne funkcije nisu dostatne u opisivanju svih pojava. Stoga se u primjenama javlja potreba za uvođenjem novih funkcija. Neke od njih, posebno važne jer se javljaju pri rješavanju važnih problema, dobile su svoje oznake i imena.

Dat ćemo primjer takve funkcije. U statistici i teoriji vjerojatnosti naročito je važna **Gaussova krivulja**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Njezin je graf nacrtan na slici 1.6.



Sl. 1.9. Gaussova krivulja

Pokazuje se da je površina ispod grafa ove funkcije jednaka 1. (Dokaz nije elementaran.) Površina ispod grafa ove krivulje, do nekog realnog broja x, predstavlja funkciju varijable x koju označavamo slovom $\Phi(x)$. Ta je funkcija od velike važnosti u teoriji vjerojatnosti i statistici. Nju ne možemo iskazati pomoću elementarnih funkcija.

Zbog njezine važnosti, vrijednosti su te funkcije tabelirane. Za zadanu vrijednost varijable x, iz tablica možemo odrediti vrijednost $\Phi(x)$. Postoje specijalizirana džepna računala (namijenjena onima koji se bave statistikom) u kojima je ta funkcija isprogramirana, tako da se unošenjem vrijednosti od x i pritiskom na odgovarajuću tipku dobiva vrijednost $\Phi(x)$. Na taj način ovakva funkcija postaje ravnopravna drugim dosad uvedenim funkcijama, poput trigonometrijske ili eksponencijalne, čije vrijednosti za po volji odabran argument x također možemo odrediti samo pomoću tablica ili džepnog računala[1].

Trebamo naglasiti da ne postoji matematički razlog podjele na elementarne i neelementarne funkcije. One funkcije koje smo nazvali elementarnima i proučavali u dosadašnjem školovanju

[1] U visokoškolskoj matematici učimo kako se složene funkcije mogu aproksimirati polinomima i na taj način približno odrediti njihove vrijednosti

nazivaju se tako jer se pojavljuju pri rješavanju elementarnih problema, povijesno proisteklih iz elementarne algebre i geometrije. U nastavku školovanja, rješavajući sve složenije probleme, mi ćemo upoznavati i druge funkcije.

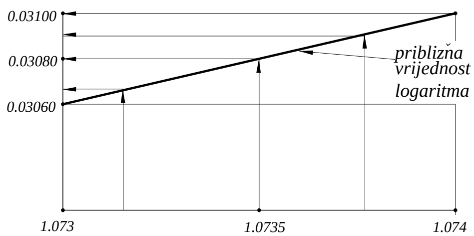
Tablično zadavanje funkcija

Uz pomoć četiriju osnovnih operacija možemo odrediti vrijednosti samo polinoma i racionalnih funkcija. Razvoj primjena matematike, naročito u mehanici i fizici tijekom sedamnaestog i osamnaestog stoljeća, zahtijevao je računanje sa složenijim funkcijama, poput trigonometrijskih, logaritamskih i eksponencijalnih. Da bi se omogućio takav račun, bilo je nužno načiniti tablice funkcijskih vrijednosti, posebno trigonometrijskih i logaritamske funkcije. Ovdje navodimo izvatke iz takvih tablica.

LOGARITAM BROJEVA

No.	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
100	00 000	00 043	00 087	00 130	00 173	00 217	00 260	00 303	00 346	00 389
101	00 432	00 475	00 518	00 561	00 604	00 647	00 689	00 732	00 775	00 817
102	00 860	00 903	00 945	00 988	01 030	01 072	01 115	01 157	01 199	01 242
103	01 284	01 326	01 368	01 410	01 452	01 494	01 536	01 578	01 620	01 662
104	01 703	01 745	01 787	01 828	01 870	01 912	01 953	01 995	02 036	02 078
105	02 119	02 160	02 202	02 243	02 284	02 325	02 366	02 407	02 449	02 490
106	02 531	02 572	02 612	02 653	02 694	02 735	02 776	02 816	02 857	02 898
107	02 938	02 979	03 019	03 060	03 100	03 141	03 181	03 222	03 262	03 302
108	03 342	03 383	03 423	03 463	03 503	03 543	03 583	03 623	03 663	03 703
109	03 743	03 782	03 822	03 862	03 902	03 941	03 981	04 021	04 060	04 100
110	04 139	04 179	04 218	04 258	04 297	04 336	04 376	04 415	04 454	04 493
111	04 532	04 571	04 610	04 650	04 689	04 727	04 766	04 805	04 844	04 883
112	04 922	04 961	04 999	05 038	05 077	05 115	05 154	05 192	05 231	05 269

Iz tablice čitamo na primjer da je $\log(1.082) = 0.03423$, $\log(1.083) = 0.03463$ (usporedi s vrijednostima na džepnom računalu). Za brojeve između 1.083 i 1.084 vrijednosti logaritamske funkcije određuju se **interpolacijom** (slika 1.10).



Sl. 1.10. Da bismo odredili vrijednost logaritamske funkcije za brojeve koji nisu dani u tablicama (znači, za brojeve koji su dani s više od četiri značajne znamenke), koristimo interpolaciju. Graf logaritamske funkcije zamjenjujemo pravcem koji spaja poznate vrijednosti. Vrijednost u unutarnjoj točki određujemo onako kako se vidi na slici. Puno više o interpolaciji i aproksimaciji funkcija uči se u visokoškolskoj matematici

* * *

Za račun trigonometrijskih funkcija korištene su najčešće tablice logaritama njihovih vrijednosti. Od broja danog u tablici treba oduzeti 10. Provjerite to na računalu, računavši na primjer $\log(\sin 30^\circ)$ i $\log(\operatorname{tg} 58^\circ 54')$.

LOGARITMI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

	30°				31°				
′	log sin	log tg	log ctg	log cos	log sin	log tg	log ctg	log cos	
0	9.69897	9.76144	10.23856	9.93753	9.71184	9.77877	10.22123	9.93307	**60**
1	9.69919	9.76173	10.23827	9.93746	9.71205	9.77906	10.22094	9.93299	59
2	9.69941	9.76202	10.23798	9.93738	9.71226	9.77935	10.22065	9.93291	58
3	9.69963	9.76231	10.23769	9.93731	9.71247	9.77963	10.22037	9.93284	57
4	9.69984	9.76261	10.23739	9.93724	9.71268	9.77992	10.22008	9.93276	56
5	9.70006	9.76290	10.23710	9.93717	9.71289	9.78020	10.21980	9.93269	55
6	9.70028	9.76319	10.23681	9.93709	9.71310	9.78049	10.21951	9.93261	54
7	9.70050	9.76348	10.23652	9.93702	9.71331	9.78077	10.21923	9.93253	53
8	9.70072	9.76377	10.23623	9.93695	9.71352	9.78106	10.21894	9.93246	52
9	9.70093	9.76406	10.23594	9.93687	9.71373	9.78135	10.21865	9.93238	51
10	9.70115	9.76435	10.23565	9.93680	9.71393	9.78163	10.21837	9.93230	**50**
11	9.70137	9.76464	10.23536	9.93673	9.71414	9.78192	10.21808	9.93223	49
12	9.70159	9.76493	10.23507	9.93665	9.71435	9.78220	10.21780	9.93215	48
13	9.70180	9.76522	10.23478	9.93658	9.71456	9.78249	10.21751	9.93207	47
14	9.70202	9.76551	10.23449	9.93650	9.71477	9.78277	10.21723	9.93200	46
15	9.70224	9.76580	10.23420	9.93643	9.71498	9.78306	10.21694	9.93192	45
⋮									
56	9.71100	9.77763	10.22237	9.93337	9.72340	9.79466	10.20534	9.92874	4
57	9.71121	9.77791	10.22209	9.93329	9.72360	9.79495	10.20505	9.92866	3
58	9.71142	9.77820	10.22180	9.93322	9.72381	9.79523	10.20477	9.92858	2
59	9.71163	9.77849	10.22151	9.93314	9.72401	9.79551	10.20449	9.92850	1
60	9.71184	9.77877	10.22123	9.93307	9.72421	9.79579	10.20421	9.92842	**0**
	log cos	log ctg	log tg	log sin	log cos	log ctg	log tg	log sin	′
	59°				58°				

Logaritamske tablice bile su nužne u računanju sve do pojave džepnih računala, a zadržale su se i do današnjih dana. Njihova je uloga danas dakako zanemariva, međutim, princip numeričkog tabeliranja ostaje važan princip za mnoge specijalne funkcije za koje još ne postoje programi za računanje ili je njihova uporaba složenija od iščitavanja tablica. Tako se na primjer, tablice prije spomenute funkcije Φ još uvijek koriste, jer nije programirana u standardnim džepnim računalima. Izvadak iz tablica funkcije $\Phi^*(x) = \frac{1}{2}[1 + \Phi(x)]$ izgleda ovako:

TABLICA FUNKCIJE Φ^*

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.00	0.50000	0.50080	0.50160	0.50239	0.50319	0.50399	0.50479	0.50559	0.50638	0.50718
0.01	0.50798	0.50878	0.50957	0.51037	0.51117	0.51197	0.51277	0.51356	0.51436	0.51516
0.02	0.51596	0.51675	0.51755	0.51835	0.51915	0.51995	0.52074	0.52154	0.52234	0.52314
0.03	0.52393	0.52473	0.52553	0.52633	0.52712	0.52792	0.52872	0.52951	0.53031	0.53111
0.04	0.53191	0.53270	0.53350	0.53430	0.53510	0.53589	0.53669	0.53749	0.53828	0.53908
0.05	0.53988	0.54067	0.54147	0.54227	0.54306	0.54386	0.54466	0.54545	0.54625	0.54705
0.06	0.54784	0.54864	0.54944	0.55023	0.55103	0.55183	0.55262	0.55342	0.55421	0.55501
0.07	0.55581	0.55660	0.55740	0.55819	0.55899	0.55979	0.56058	0.56138	0.56217	0.56279
0.08	0.56376	0.56456	0.56535	0.56615	0.56694	0.56774	0.56853	0.56933	0.57012	0.57092
0.09	0.57171	0.57251	0.57330	0.57410	0.57489	0.57569	0.57648	0.57727	0.57807	0.57886
0.10	0.57966	0.58045	0.58124	0.58204	0.58283	0.58362	0.58442	0.58521	0.58600	0.58680
⋮										

Zadaci 1.1.

1. Pokaži da zadana funkcija zadovoljava napisanu jednakost:

1. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4\,, \quad f(2) = f(1)\,;$

2. $g(t) = t^3 - 3t^2 + 4t - 1\,, \quad g(2) = g(1)\,;$

3. $h(u) = 4u^3 - 3u^2 - 5u - 6\,, \quad h(3) + 6h(1) = 0\,;$

4. $\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 10\,, \quad \varphi(1) = \varphi(2) = \varphi(3)\,.$

2. Ako je $f(x) = 3x^2 + 2$, izračunaj

1. $f(2)$; **2.** $f(-2)$; **3.** $f(2+\sqrt{3})$;
4. $f(x+1)$; **5.** $f(x-1)+f(x+1)$; **6.** $f(f(x))$.

3. Ako je $f(x)=x^2-x+1$, koliko je $(a+1)f(a)-(a-1)f(-a)$?

4. Ako je $f(x)=x^2+x+1$, koliko je $(a+1)f(-a)+(a-1)f(a)$?

5. Ako je $f(x)=x^3-1$, $g(x)=x^3+1$, koliko je $f(a+1)-g(a-1)$?

6. Ako je $f(x)=x^2-1$, $g(x)=(x-1)^2$, koliko je $(a-1)f(a)-(a+1)g(-a)$?

7. Koliko je $f\left(\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}\right)$, ako je $f(x)=x^2+2x+1$?

8. Ako je $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}:\dfrac{1}{x^3-1}$, koliko je $f(\sqrt{2})$?

9. Ako je $f(x)=\dfrac{x(x+1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+2)}$, koliko je $f(1-\sqrt{3})$?

10. Ako je $f(x)=\dfrac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(x-1)(x+4)}$, izračunaj $f\left(\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}\right)$.

11. Odredi nultočke polinoma drugog stupnja $f(x)=ax^2+bx+c$, ako je $f(-2)=4$, $f(1)=-2$, $f(0)=-2$.

12. Izračunaj $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ za sljedeće funkcije f:

1. $f(x)=3x+2$; **2.** $f(x)=\frac{1}{3}x-\frac{2}{5}$; **3.** $f(x)=x^2-2x+3$;
4. $f(x)=x^3-3x+4$; **5.** $f(x)=x^4-x^2+1$; **6.** $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

13. Ako je $f(0)=1$, $f(x)=x+f(x-1)$, za $x>0$, koliko je $f(100)$?

14. Funkcija $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definirana sa

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{za racionalne } x,\\ 0, & \text{za iracionalne } x\end{cases}$$

zove se Dirichletova funkcija. Koliko je $f(-\pi)$, $f(\log_2\sqrt[3]{4})$, $f(\sin 3)$, $f\left(\cos\dfrac{17\pi}{6}\right)$, $f(1.111\ldots)$, $f(4^{-0.5})$?

* * *

15. Odredi $f(x)$, ako je:

1. $f(x+1)=3x-2$; **2.** $f(x-\frac{1}{2})=-2x+\frac{1}{3}$;
3. $f(-\frac{2}{3}x+1)=x$; **4.** $f(2x-1)=4x^2-3$;
5. $f(x+3)=\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{3}{2}$; **6.** $f(3x-1)=x^2$.

16. Odredi $f(x)$ ako je:

1. $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$: **2.** $f\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=x^2-1$;
3. $f\left(\dfrac{3x-1}{x+2}\right)=\dfrac{x+1}{x-1}$; **4.** $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{3x}{2x+7}$;
5. $f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$; **6.** $f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=x^2$.

17. Ako je $f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = \dfrac{x}{x-2}$, koliko je $f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$?

18. Ako je $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{1-x}$, koliko je $f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$?

19. Ako je $f\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = x$, koliko je $f\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$?

20. Koliko je $f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$, ako je $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = x$?

21. Koliko je $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, ako je $f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \dfrac{x-1}{x+1}$?

22. Ako je $f(x) = \log_3 x - 2\log_9 \dfrac{3}{x}$, koliko je $f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right)$?

23. Ako je $f(x) = \log_4 x + 3\log_2(8x)$, koliko je $f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right)$?

* * *

24. Ako je $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - \cos(\pi - x)$, koliko je $f\left(\frac{67\pi}{6}\right)$?

25. Ako je $f(x-2\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - 2\sin(x-\pi)$, koliko je $f\left(-\frac{35\pi}{6}\right)$?

26. Ako je $f(x+\pi) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + \cos(2\pi - x)$, koliko je $f\left(\frac{35\pi}{3}\right)$?

27. Ako je $f\left(x-\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}(\sin x - \cos x)$, koliko je $f\left(\frac{11\pi}{12}\right)$?

28. Ako je $f\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos(\pi + x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$, koliko je $f\left(-\frac{17\pi}{3}\right)$?

29. Ako je $f\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$, koliko je $f\left(\frac{22\pi}{3}\right)$?

30. Ako je $f\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$ koliko je $f(\alpha-\pi) + f\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$?

31. Ako je $f\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin x + \cos x$, koliko je $f\left(\frac{4\pi}{3}\right)\cdot f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$?

32. Ako je $f(x-\pi) = \sin x \cdot \cos x$, koliko je $f\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + f\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$?

33. Ako je $f\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\alpha + \cos\alpha$, tada je $f\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot f\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos 2\alpha$. Dokaži!

* * *

34. Odredi prirodno područje definicije funkcija:

1. $f(x) = \dfrac{1}{2-3x}$; **2.** $f(x) = \dfrac{1}{4x^2-1}$;

3. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$; **4.** $f(x) = \dfrac{1}{\cos \pi x}$;

5. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$; **6.** $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$;

7. $f(x) = \sqrt{\dfrac{2-x}{3x+2}}$; **8.** $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x}$;

9. $f(x) = \sqrt{3^{1-2x}}$; **10.** $f(x) = \sqrt{\sin \pi x}$.

35. Odredi prirodno područje definicije sljedećih funkcija

1. $f(x) = \sqrt{5 - x^2}$; **2.** $f(x) = \log(6x - x^2)$;

3. $f(x) = \log x + \log(4 - x)$; **4.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$;

5. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 2}}$; **6.** $f(x) = \sqrt{2\sin x - 1}$.

36. Odredi prirodno područje definicije sljedećih funkcija:

1. $f(x) = \log \dfrac{x + 3}{x}$; **2.** $f(x) = \sqrt{3 + x} + \sqrt{3 - x}$;

3. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 5} \cdot \log_2(x + 1)$;

4. $f(x) = \sqrt{4x - x^2} - \log_3(x - 2)$;

5. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 5}}{\log(9 - x)}$; **6.** $f(x) = \log_{x-1}(x + 1)$;

7. $f(x) = \log_{x+3}(x^2 + 1)$; **8.** $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x - 1)}$;

9. $f(x) = \log_{\frac{2}{3}} \sin x$; **10.** $f(x) = \sin\sqrt{x}$.

37. Odredi prirodno područje definicije sljedećih funkcija:

1. $f(x) = \sqrt{2 + x - x^2}$; **2.** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - x}}$;

3. $f(x) = \dfrac{1}{\lfloor x \rfloor}$; **4.** $f(x) = \dfrac{1}{\{x\}}$;

5. $f(x) = \sqrt{1 - \lfloor x \rfloor}$; **6.** $f(x) = \sqrt{\{x\} - 1}$;

7. $f(x) = \sqrt{2^{x-1} - 3^{x+1}}$; **8.** $f(x) = \log_2(2 - x) + \log_2(x + 2)$;

9. $f(x) = \log_2 \log_{0.5} \dfrac{x + 1}{x - 2}$; **10.** $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1 - 2x}{x + 3}}$;

11. $f(x) = \sqrt{\log_x 2 - \log_2 x}$; **12.** $f(x) = \sqrt{\log_{x-2}(x^2 - 8x + 15)}$.

38. Odredi prirodno područje definicije sljedećih funkcija:

1. $f(x) = \sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}$; **2.** $f(x) = \sqrt{\cos(\sin x)}$;

3. $f(x) = \log_{\cos x}(\sin x)$; **4.** $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 - \sin x}}$;

5. $f(x) = \sqrt{\dfrac{\cos x - 1}{\sin x}}$; **6.** $f(x) = \sqrt{\sin^2 x - \sin x}$.

39. Jesu li jednake funkcije f i g, definirane na prirodnoj domeni:

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} - 3$, $g(x) = x - 2$;

2. $f(x) = 2^{\log_2(x+1)}$, $g(x) = x + 1$;

3. $f(x) = \sqrt{x - 1} \cdot \sqrt{2x + 1}$, $g(x) = \sqrt{2x^2 - x - 1}$;

4. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$, $g(x) = x - 2$;

5. $f(x) = \log_3 x^2$, $g(x) = 2\log_3 x$;

6. $f(x) = 2x$, $g(x) = |x - 1| + |x + 1|$;

7. $f(x) = \log_3(x - 1) + \log_3(x + 1)$, $g(x) = \log_3(x^2 - 1)$;

8. $f(x) = \log_2 |x - 1|$, $g(x) = |\log_2(x - 1)|$?

40. Jesu li jednake funkcije f i g definirane na prirodnoj domeni:

1. $f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$, $g(x) = 1$;

2. $f(x) = \lfloor \sin x \rfloor$, $g(x) = \dfrac{|\sin x|}{\sin x}$;

3. $f(x) = 1$, $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$;

4. $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$, $g(x) = 2$;

5. $f(x) = \cos x - \sin x$, $g(x) = \sqrt{2}\cos(\dfrac{\pi}{4} + x)$;

6. $f(x) = \cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x$, $g(x) = \sin^2 x \cdot \operatorname{ctg} x$?

* * *

41. Koja od sljedećih jednadžbi određuje y kao funkciju od x:

1. $3x + 2y = 1$; **2.** $x = y^2 - 3$; **3.** $x^2 = y^3 - 3$;

4. $x^2 + 3xy + y^2 = 8$; **5.** $x = \dfrac{y-1}{y+1}$; **6.** $x = 10^y - 10^{-y}$?

Napiši vezu varijabli u eksplicitnom obliku.

42. Pretvori u eksplicitni oblik $y = f(x)$ implicitno zadane funkcije:

1. $xy + x^2 = y$; **2.** $x^2y^2 = x - 1$; **3.** $2^{x+y} - 3 = 0$;

4. $e^{xy} = x$; **5.** $\log x + \log y = 1$; **6.** $\ln \dfrac{x}{y} = 1 - x$.

43. Pretvori u eksplicitni oblik $y = f(x)$ implicitno zadane funkcije:

1. $x + |y| = 2y$; **2.** $x|x-1| + 2y = 0$;

3. $|x|y + y = x$; **4.** $|x| + xy = x$.

Svaku od ovih realnih funkcija prikaži grafički u pravokutnom koordinatnom sustavu.