3 Funkcije, derivacije, integrali

U ovom ćemo poglavlju upoznati složenije načine zadavanja funkcija, upoznati neke nove elementarne funkcije i koristiti ih u diferencijalnom i integralnom računu.

3.1. Polinomi

Među svim elementarnim funkcijama najjednostavniji su polinomi. Njihova se vrijednost može izračunati s pomoću konačno mnogo elementarnih operacija zbrajanja i množenja. No, zbog toga su polinomi iznimno važni, jer ponašanje mnogih drugih funkcija istražujemo dovodeći ih u vezu s polinomima.

U ovom ćemo poglavlju upoznati neka dodatna svojstva polinoma.

Bilo koji polinom stupnja n zapisujemo ovako:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0.$$

Koeficijenti polinoma $a_0, a_1, \ldots a_n$ mogu biti realni ili kompleksni brojevi. Koeficijent a_n se naziva **vodeći koeficijent**, i on je različit od nule.

Neka je z_1 realan ili kompleksan broj. Dijeljenjem polinoma $P(z)$ s polinomom $z - z_1$ dobiva se kvocijent $Q(z)$ — polinom stupnja $n-1$. Kao rezultat dijeljenja može se pojaviti i ostatak, realni ili kompleksni broj r_1. Ta se operacija može napisati formulom:

$$P(z) = Q(z)(z - z_1) + r_1. \tag{1}$$

Stavimo $z = z_1$ u ovu formulu. Dobit ćemo: $P(z_1) = r_1$. Zaključujemo da je broj r_1 upravo vrijednost polinoma $P(z)$ u točki $z = z_1$. Dakle, za svaki broj z_1 vrijedi

$$P(z) = Q(z)(z - z_1) + P(z_1).$$

Posebice, ako je z_1 nultočka polinoma $P(z)$, onda je $P(z_1) = 0$ pa dobivamo

$$P(z) = Q(z)(z - z_1).$$

Kriterij djeljivosti polinoma

Ako je z_1 nultočka polinoma $P(z)$, on je onda djeljiv polinomom $z - z_1$.

Primjer 1.

Za polinom $P(z) = z^4 + 2z^3 - z - 2$ vrijedi $P(1) = 0$. Dakle $z_1 = 1$ je njegova nultočka, pa je polinom djeljiv s $z - 1$. Načinimo dijeljenje:

$$\begin{array}{l}
z^4 + 2z^3 - z - 2 \ : \ z - 1 = z^3 + 3z^2 + 3z + 2 \\
\underline{z^4 - z^3} \\
\quad 3z^3 - z - 2 \\
\quad \underline{3z^3 - 3z^2} \\
\qquad 3z^2 - z - 2 \\
\qquad \underline{3z^2 - 3z} \\
\qquad\quad 2z - 2 \\
\qquad\quad \underline{2z - 2} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Time smo dobili:

$$P(z) = (z^3 + 3z^2 + 3z + 2)(z - 1).$$

Ima li svaki polinom nultočku? Odgovor je *negativan*, ukoliko takve nultočke tražimo u realnim brojevima: polinom $z^2 + 4$ nema realnih nultočki. Razlog uvođenja kompleksnih brojeva leži upravo u tome što u skupu $\mathbf{C}$ *svaki* polinom ima nultočku. Tako je, na primjer, $z_1 = 2i$ nultočka ovog polinoma.

Osnovni stavak algebre

Svaki polinom stupnja $n \geqslant 1$ (s realnim ili kompleksnim koeficijentima) ima nultočku u skupu kompleksnih brojeva.

Ova je tvrdnja vrlo duboka, i svaki njezin dokaz[1] potpuno je netrivijalan. Po tehnici, oni izlaze izvan okvira elementarne matematike i mi ih ovdje ne možemo navoditi. Sam se izrijek zbog svoje važnosti naziva **osnovni stavak algebre**.

Neka je $P(z)$ bilo koji polinom stupnja $n \geqslant 1$:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0. \tag{2}$$

Po osnovnom stavku algebre, on ima nultočku z_1. Pokazali smo da je tada $P(z)$ djeljiv sa $(z - z_1)$. To znači da postoji polinom $P_{n-1}(z)$ stupnja $n-1$ takav da vrijedi

$$P(z) = (z - z_1) P_{n-1}(z). \tag{3}$$

Ako je $n \geqslant 2$, onda je $P_{n-1}(z)$ stupnja barem 1 i možemo ponovno primijeniti osnovni stavak algebre na taj polinom: postoji kompleksni broj z_2 koji je

[1] Prvi dokaz je izveo Gauss.

nultočka polinoma P_{n-1}. Jasno je da je taj kompleksni broj ujedno i nultočka polinoma $P(z)$, i, kako je $P_{n-1}(z)$ djeljiv sa $(z - z_2)$, vrijedi relacija

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)P_{n-2}(z) \tag{4}$$

za neki polinom $P_{n-2}(z)$ stupnja $n-2$.

Nastavljajući ovaj postupak na koncu ćemo dobiti formulu

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)P_0, \tag{5}$$

gdje je P_0 polinom stupnja 0, dakle, broj. Usporedbom vodećeg koeficijenta (uz potenciju z^n) polinoma $P(z)$ u formulama (2) i (5), vidimo da je ta konstanta P_0 upravo koeficijent a_n. Time smo pokazali sljedeće.

Faktorizacija polinoma

Svaki se polinom stupnja $n \geqslant 1$ *može faktorizirati* na sljedeći način:

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n), \tag{6}$$

gdje su $z_1, \ldots, z_n$ njegove nultočke.

Dakako da se neki među brojevima $z_1, \ldots, z_n$ mogu podudarati. Za nultočku koja se u ovom prikazu pojavljuje više puta kažemo da je višestruka ili da ima kratnost onoliku koliko se puta pojavljuje u tom prikazu.

Broj nultočaka polinoma

Polinom stupnja n ima n nultočaka, brojeći njihovu kratnost.

Vièteove formule

Izjednačimo oba dobivena prikaza:

$$a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0. \tag{7}$$

Pomnožimo faktore s lijeve strane i izjednačimo koeficijente uz istovjetne potencije. Dobit ćemo sljedeće jednakosti koje moraju zadovoljavati nultočke polinoma:

$$\begin{gathered}
z_1 + z_2 + \ldots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}\\
z_1z_2 + \ldots + z_1z_n + z_2z_3 + \ldots + z_2z_n + \ldots + z_{n-1}z_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}\\
\vdots\\
z_1z_2\cdots z_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}.
\end{gathered}$$

Ove se formule nazivaju **Vièteove**[1] **formule**. U drugom retku nalazi se zbroj svih umnožaka dvaju brojeva z_i, z_j ($i \neq j$), u trećem retku zbroj svih umnožaka od po triju takvih brojeva itd.

[1] François Viète (1540.–1603.), francuski matematičar.

Primjer 2.

Napišimo Vièteove formule za polinome stupnja $n = 2, 3, 4$. Dobit ćemo sljedeće formule, koje ispisujemo označavajući koeficijente na način uobičajen za polinome malog stupnja.

- Za polinom drugog stupnja

$$P(z) = az^2 + bz + c,$$

formule glase:

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a},$$
$$z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

- Za polinom trećeg stupnja

$$P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d,$$

formule glase:

$$z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{b}{a},$$
$$z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = \frac{c}{a},$$
$$z_1z_2z_3 = -\frac{d}{a}.$$

- Za polinom četvrtog stupnja

$$P(z) = az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e,$$

formule glase:

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -\frac{b}{a},$$
$$z_1z_2 + z_1z_3 + z_1z_4 + z_2z_3 + z_2z_4 + z_3z_4 = \frac{c}{a},$$
$$z_1z_2z_3 + z_1z_2z_4 + z_1z_3z_4 + z_2z_3z_4 = -\frac{d}{a},$$
$$z_1z_2z_3z_4 = \frac{e}{a}.$$

Nultočke polinoma s realnim koeficijentima

Sve što smo dosad rekli odnosi se na polinome s po volji odabranim koeficijentima, kako realnim (ili cjelobrojnim!), tako i kompleksnim. Međutim, ako su koeficijenti polinoma realni, o njima se može reći nešto više. Pokažimo najprije jedan pomoćni rezultat.

Primjer 3.

Pokažimo da za svaki polinom P s realnim koeficijentima vrijedi $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$.

▶ Vrijedi $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$; odavde je indukcijom $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$. Kako su koeficijenti a_k realni, za svaki k vrijedi $\overline{a_k} = a_k$. Zato

$$P(\overline{z}) = a_n(\overline{z})^n + \ldots + a_1\overline{z} + a_0 = \overline{a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0} = \overline{P(z)}.$$

Ova formula ima sljedeću važnu posljedicu:

Kompleksne nultočke dolaze u parovima

Ako je P polinom s realnim koeficijentima, i $z \in \mathbf{C}$ njegova nultočka, onda je i $\overline{z}$ nultočka istog polinoma.

Zaista, ako je z nultočka, onda vrijedi $P(z) = 0$, pa stoga i $\overline{P(z)} = 0$. Odavde slijedi $P(\overline{z}) = 0$ te je i $\overline{z}$ nultočka istog polinoma.

Kažemo da nultočke polinoma s realnim koeficijentima *dolaze u kompleksno-konjugiranim parovima*.

Primjer 4.

Odredimo rješenja jednadžbe

$$P(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = 0,$$

znajući da je jedno njezino rješenje broj i.

▶ Broj i zaista jest rješenje:

$$i^4 + 2i^3 + 3i^2 + 2i + 2 = 1 - 2i - 3 + 2i + 2 = 0.$$

Zato je, budući da polinom ima realne koeficijente, broj $-i$ također njezino rješenje. Stoga je polinom P djeljiv s $(x-i)(x+i) = x^2 + 1$. Učinimo naznačeno dijeljenje:

$$\begin{array}{l}
(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2) : (x^2 + 1) = x^2 + 2x + 2 \\
\underline{x^4 \qquad\quad + x^2} \\
\qquad 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2 \\
\qquad \underline{2x^3 \qquad\quad + 2x} \\
\qquad\qquad 2x^2 \qquad + 2 \\
\qquad\qquad \underline{2x^2 \qquad + 2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Druge dvije nultočke dobivamo rješavajući jednadžbu

$$x^2 + 2x + 2 = 0,$$

odakle je $x_3 = -1 + i$, $x_4 = -1 - i$.

Zadaci 3.1.

1. Provjeri je li zadani kompleksni broj z rješenje jednadžbe:

1. $z^3-2z^2+2z=0$, $z=1+i$;

2. $z^4-5z^3+4z^2+2z-8=0$, $z=1-i$.

2. Za koje će vrijednosti parametra a nultočke polinoma $P(x)=(a+5)x^2-2ax+(a-1)$ biti kompleksne?

3. Odredi koeficijent b i preostale nultočke polinoma $P(x)=x^3-3x^2+bx-6$ ako je 3 jedna njegova nultočka.

4. Odredi polinom s cjelobrojnim koeficijentima čija je nultočka $x_1=\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

5. Broj $z=1+i$ jedno je rješenje jednadžbe $3z^4-5z^3+3z^2+4z-2=0$. Odredi sva ostala njezina rješenja.

6. Odredi nultočke polinoma $f(x)=3x^6-6x^5+8x^4+14x^3-33x^2-4x+10$, znajući da je $f(1-2i)=0$.

7. Odredi nultočke polinoma $f(x)=x^4+2x^3-2x^2+2x-3$ znajući da je $f(i)=0$.

8. Uvjeri se da je broj i nultočka polinoma i u brojniku i u nazivniku razlomka

$$\frac{z^4-4z^3+4z^2-4z+3}{z^4-5z^3+5z^2-5z+4}.$$

Potom skrati razlomak.

9. Riješi jednadžbe:

1. $z^2-4iz-7-4i=0$;

2. $z^2-z+1+i=0$.

10. U skupu **C** riješi sljedeće jednadžbe. Rješenja napiši u trigonometrijskom obliku.

1. $z^2-4(6+i)z+3(8i-1)=0$;

2. $z^2+(10i-7)z-11-41i=0$;

3. $iz^2+(4i-3)z+i-5=0$.

11. U skupu **C** riješi sljedeće jednadžbe:

1. $z^4+z^2+1=0$;

2. $(z+1)^2+i(z+2)^2=0$;

3. $(z-i)^3=i(z+i)^3$;

4. $(z+1)^2+i(z^2+z)^2=0$;

5. $z^4-(5-14i)z^2-2(5i+12)=0$.

12. Riješi jednadžbe:

1. $(3-i)z^3=-4+8i$;

2. $z^4+z^2+1=0$;

3. $z^6+2iz^3-1=0$;

4. $z^3+3z^2+3z+3=0$;

5. $(1+i)z^4-(1-i)z=0$.

13. Odredi rješenja jednadžbe

1. $z^6-2z^3+4=0$, z iz prvog kvadranta;

2. $z^6+2z^3+4=0$, z iz četvrtog kvadranta;

3. $\dfrac{(z+16)^3}{2\sqrt{3}-2i}=\dfrac{(-\sqrt{3}-i)^{11}}{1-\sqrt{3}i}$;

4. $z^3+3z^2+3z+2=0$;

5. $\dfrac{z^4+16}{\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12})}=(-1+i)^7$;

6. $\left(\dfrac{z^3}{1-i}-2\right)^3+8=0$, z iz trećeg kvadranta.

14. Odredi (kompleksne) koeficijente a, b, c polinoma $f(z)=z^3+az^2+bz+c$ tako da bude $f(1)=8+16i$, $f(-1)=16-8i$, $f(i)=0$. Potom riješi jednadžbu $f(z)=0$. Izračunaj realni i imaginarni dio svakog rješenja.

15. Pokaži da se polinom $P(z)=8z^4-8z^3+27z-27$ može napisati u obliku $P(z)=(z-1)Q(z)$, gdje je $Q(z)$ polinom trećeg stupnja koji treba odrediti. Riješi u skupu **C** jednadžbu $P(z)=0$.

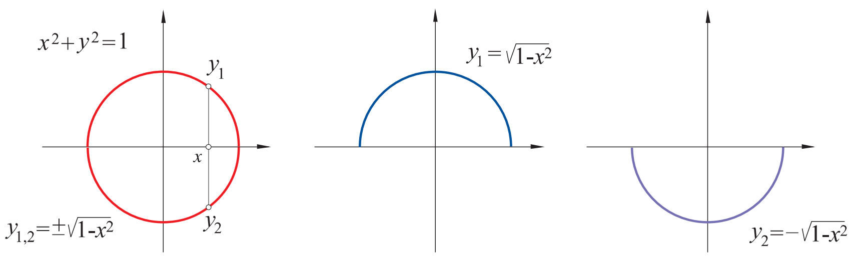
3.2. Implicitno zadane funkcije. Relacije

Implicitno zadavanje funkcije

Skup svih točaka (x, y) koje zadovoljavaju jednadžbu

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

predstavlja kružnicu u ravnini $\mathbf{R}^2$, sa središtem u ishodištu. Kako ova krivulja ne zadovoljava vertikalni test, ona ne određuje funkcijsku vezu između varijabli x i y. Jednoj vrijednosti varijable x odgovaraju dvije vrijednosti za y.



Načini određivanja funkcijske veze iz relacijske zavisnosti.

Računajući y iz (1) dobit ćemo te vrijednosti, dane izrazom

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Odaberemo li za svaki x pozitivan predznak u ovom izrazu, time je definirana funkcija kojoj je graf gornja polukružnica. Ta polukružnica zadovoljava vertikalni test, jednoj vrijednosti varijable x odgovara točno jedna vrijednost za y. Ona je određena formulom

$$y = f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Donja polukružnica određuje funkcijsku zavisnost

$$y = f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Kažemo da je formulom $x^2 + y^2 = 1$ dana **implicitna veza** varijabli x i y ili da je y zadana **implicitnom formulom**. Tu implicitnu formulu možemo prikazati u obliku nultočke funkcije dviju varijabli:

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Rješavanjem ove jednadžbe po varijabli y mi određujemo **eksplicitnu formulu** (funkcijsku vezu varijabli x i y). Jednoj implicitno zadanoj funkciji može odgovarati nekoliko (pa čak i beskonačno mnogo) eksplicitnih formula.

Primjer 1.

Formulom

$$F(x,y) = Ax + By + C = 0$$

zadana je **implicitna jednadžba pravca**.

Čim je $B \neq 0$, ovaj pravac nije paralelan s y osi pa zadovoljava vertikalni test. To znači da je ovom implicitnom formulom definirana funkcijska veza koju lako nalazimo iz jednadžbe pravca:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Time smo dobili **eksplicitnu jednadžbu pravca**.

Primjer 2.

Je li formulom

$$\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x$$

definirana varijabla y kao funkcija varijable x?

Da bismo odredili postoji li funkcijska veza, moramo riješiti jednadžbu po nepoznanici y. Množenjem s nazivnikom i sređivanjem, dobivamo ekvivalentnu jednadžbu

$$\begin{aligned}
e^y - e^{-y} &= x(e^y + e^{-y}),\\
e^{2y} - 1 &= e^{2y}x + x,\\
e^{2y}(1-x) &= 1 + x,\\
e^{2y} &= \frac{1+x}{1-x},\\
y &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).
\end{aligned}$$

Dakle, y je funkcija varijable x. Što je područje definicije ove funkcije?

Relacije

Pojam relacije općeniti je od pojma funkcije. Govorili smo npr. o relaciji poretka $x \leqslant y$ na skupu realnih brojeva. Također, s pojmom relacije upoznali smo se pri proučavanju geometrijskih pojmova poput paralelnosti. Što je to relacija? Kakva je veza između relacija i funkcija?

Relacija

Neka su A i B neprazni skupovi. **Kartezijev umnožak** skupova A i B je skup svih uređenih parova:

$$A \times B = \{(a, b),\ a \in A,\ b \in B\}.$$

Svaki podskup ρ kartezijeva umnoška $A \times B$ zove se **relacija**.

Za element $a \in A$ kažemo da je u relaciji ρ s elementom $b \in B$, onda i samo onda ako je $(a, b) \in \rho$.

Poseban slučaj nastupa kad se skupovi A i B podudaraju:

Relacija na skupu S

Relacija na skupu S je bilo koji podskup ρ kartezijevog umnoška $S \times S$.

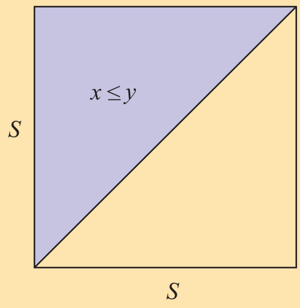
Za relaciju ρ kažemo da je **binarna relacija** na skupu S.

Zadatak 1. Za sljedeće dobro poznate relacije odredi što je pripadni skup S na kojem su definirane:

1. Relacija "biti podskup", $A \subseteq B$.
2. Relacija "biti djeljiv", $m \mid n$.
3. Relacija "biti okomit", $p \perp q$.
4. Relacija "biti incidentan" (ležati na), $A \in p$.

Primjer 3. Neka je $S = [0, 1]$. Koji podskup Kartezijevog umnoška $S \times S$ određuje relacija *manje ili jednako*?

Umjesto $x\rho y$ pišemo kako je uobičajeno $x \leqslant y$. U relaciji će biti svi parovi točaka (x, y) koji se nalaze *iznad* pravca $y = x$:



Relacija $\leqslant$ na skupu $[0, 1]$. Za svaku točku s trokuta istaknutog sa slike vrijedi $x \leqslant y$.

Primjer 4.

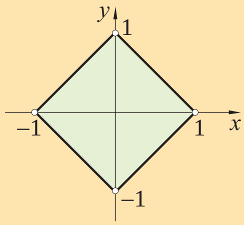
Odredi podskup ravnine određen relacijom

$$\rho = \{(x, z) : |x| + |y| \leqslant 1\}$$

Pogledajmo najprije koje točke iz prvog kvadranta pripadaju ovoj relaciji. Tu je $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ pa vrijedi $|x| = x$, $|y| = y$. Zato uvjet prelazi u

$$x + y \leqslant 1,$$

a njega zadovoljavaju sve točke *ispod* pravca $y = -x + 1$.



Slično, za točke iz drugog kvadranta mora vrijediti

$$-x + y \leqslant 1,$$

jer je u drugom kvadrantu apscisa negativna, a ordinata pozitivna. Relaciji pripadaju točke *ispod* pravca $y = x + 1$.

Na isti se način odrede podskupovi u preostala dva kvadranta. Tako relacija određuje kvadrat nacrtan na slici.

Primjer 5.

Na kartezijevom umnošku $\mathbf{R} \times \mathbf{Z}$ definirana je relacija ρ ovako:

$$(x, y) \in \rho \iff y < x + 1 \ \wedge \ y \geqslant x.$$

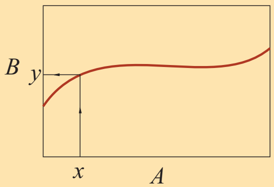
Uvjeri se da je cijeli broj y u relaciji s realnim brojem x onda i samo onda ako je y najveće cijelo od x (najveći cijeli broj koji nije veći od x). Dakle, ova relacija određuje y kao funkciju u ovisnosti od x.

Primjer 6.

Svaka funkcijska veza određuje relaciju. Neka je $f : A \to B$ funkcija. Definirajmo relaciju ρ na $A \times B$ ovako:

$$\rho = \{(x, y) : y = f(x)\}$$

Vidimo da funkcija određuje relaciju koja je opisana grafom funkcije.



Svaka funkcija određuje relaciju između x i y.

Primjeri relacija

Različite relacije na nekom skupu mogu imati zajednička svojstva. Sljedeća su naročito važna:

Svojstva relacija

Kažemo da je relacija ρ na skupu S

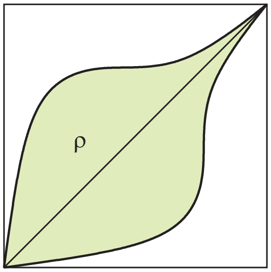
simetrična, ako iz $(x, y) \in \rho$ slijedi $(y, x) \in \rho$,

antisimetrična, ako iz $(x, y) \in \rho$ i $(y, x) \in \rho$ slijedi $x = y$,

tranzitivna, ako vrijedi

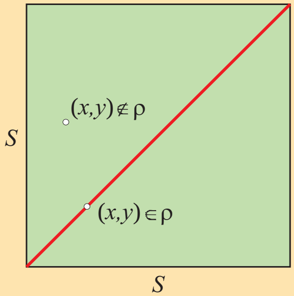
$$(x, y) \in \rho,\ (y, z) \in \rho \implies (x, z) \in \rho.$$

refleksivna, ako je $(x, x) \in \rho$ za svaki $x \in S$.



Svaka simetrična relacija definira podskup zrcalno simetričan s obzirom na dijagonalu Kartezijevog produkta.

Primjer 7. Neka je $S = [0, 1]$, interval u skupu realnih brojeva. Relacija **biti jednak** na tom skupu određuje podskup D kartezijevog umnoška $S \times S$. Tu relaciju obično označavamo s $=$ i pišemo $x = y$ umjesto $(x, y) \in \rho$. Ova je relacija simetrična, tranzitivna i refleksivna.



Relacija jednakosti na skupu $[0, 1]$. *x i y su u relaciji* 'biti jednak' *onda i samo onda kad leže na dijagonali ovog kvadrata.*

Primjer 8.

Neka je $S = [0, 1]$. Na tom skupu uvodimo relaciju: *biti blizak*. x i y su *bliski*, ako vrijedi

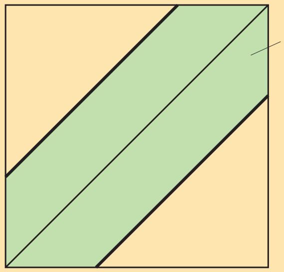
$$|x - y| < \frac{1}{3}.$$

Nacrtaj ovu relaciju.

Relacija je ekvivalentna s dvije nejednakosti:

$$-\frac{1}{3} < x - y < \frac{1}{3}.$$

Sad se lako odredi podskup zadan ovim uvjetima.



Uvjeri se da je ova relacija simetrična i refleksivna. Primjerom pokaži da nije tranzitivna.

Relacija ekvivalencije

Za relaciju R kažemo da je **relacija ekvivalencije** ako je ona refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Relaciju ekvivalencije često označavamo simbolima $\equiv$ ili $\sim$. Tako, umjesto $(x, y) \in \rho$ pišemo $x \equiv y$ ili $x \sim y$.

Zadatak 2. Na skupu cijelih brojeva definirana je relacija: $(x, y) \in \rho$ onda i samo onda ako je razlika $x - y$ djeljiva prirodnim brojem n.

Uvjeri se da je ovime zadana relacija ekvivalencije.

Zadatak 3. Pravilo športskog saveza utvrđuje da za neki klub smije nastupiti samo igrač koji je registriran za taj klub. Jedan igrač ne može biti u istom trenutku registriran za više klubova. Broj registriranih igrača svaki klub utvrđuje po svojoj volji.

Na skupu svih registriranih igrača definirana je relacija $\sim$. Dva su igrača u relaciji ako su registrirani za isti klub. Dokaži da je $\sim$ relacija ekvivalencije.

U skupu realnih brojeva poznata nam je relacija poretka $\leqslant$. Preko njezinih svojstava mogu se definirati relacije sa sličnim svojstvima i na drugim skupovima:

Relacije poretka

Relacije poretka određene su sljedećim svojstvima:

$x\rho x$	refleksivnost
$x\rho y \wedge y\rho z \implies x\rho z$	tranzitivnost
$x\rho y \wedge y\rho x \implies x = y$	antisimetričnost
$x \neq y \implies x\rho y \vee y\rho x$	(ali ne oboje!)

Zadatak 4. Neka je X bilo koji skup i $S = \mathscr{P}(X)$ njegov partitivni skup (skup svih podskupova od X). Na S je definirana relacija $\subseteq$ *biti podskup*. Koja tri od gore navedena četiri svojstva zadovoljava ova relacija?

Zadaci 3.2.

1. Koja od sljedećih jednadžbi određuje y kao funkciju od x:

1. $3x+2y=1$; **2.** $x=y^2-3$;
3. $x^2=y^3-3$; **4.** $x^2+3xy+y^2=8$;
5. $x=\dfrac{y-1}{y+1}$; **6.** $x=10^y-10^{-y}$?

Napiši vezu varijabli u eksplicitnom obliku.

2. Pretvori u eksplicitni oblik $y=f(x)$ implicitno zadane funkcije:

1. $xy+x^2=y$; **2.** $x^2y^2=x-1$;
3. $2^{x+y}-3=0$; **4.** $e^{xy}=x$;
5. $\log x+\log y=1$; **6.** $\ln\dfrac{x}{y}=1-x$.

3. Pretvori u eksplicitni oblik $y=f(x)$ implicitno zadane funkcije:

1. $x+|y|=2y$; **2.** $x|x-1|+2y=0$;
3. $|x|y+y=x$; **4.** $|x|+xy=x$.

Svaku od ovih realnih funkcija prikaži grafički u pravokutnom koordinatnom sustavu.

— ◆ —

4. Grafički prikaži sljedeće podskupove ρ skupa $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$:

1. $\rho=\{(x,y):xy=0\}$;
2. $\rho=\{(x,y):x^2-y^2=0\}$;
3. $\rho=\{(x,y):x+|x|=y+|y|\}$;
4. $\rho=\{(x,y):x-|x|=y-|y|\}$;
5. $\rho=\{(x,y):x|x|=y|y|\}$;
6. $\rho=\{(x,y):x^2+y^2=0\}$;
7. $\rho=\{(x,y):x>1\}$;
8. $\rho=\{(x,y):y<2\}$;
9. $\rho=\{(x,y):xy\leqslant 0\}$;
10. $\rho=\{(x,y):y^2>y\}$.

5. Grafički prikaži skup $A\times B$, $A=\langle 1,6]$, $B=[-1,2\rangle$, te odredi relaciju $\rho\subset A\times B$:

1. $\rho=\{(x,-1):x\in A\}$;
2. $\rho=\{(3,y):y\in B\}$;
3. $\rho=\{(x,y):3x+5y=13\}$;
4. $\rho=\{(x,y):2x-3y\geqslant 9\}$.

6. Grafički prikaži skup $A\times B$, $A=[-1,3]$, $B=[-2,2]$, pa zatim odredi relaciju $\rho\subset A\times B$:

1. $\rho=\{(x,y):y-1=0\}$;
2. $\rho=\{(x,y):x=1\}$;
3. $\rho=\{(x,y):y=x-1\}$;
4. $\rho=\{(x,y):x^2+y^2<1\}$;
5. $\rho=\{(x,y):x^2+y^2\geqslant 4\}$;
6. $\rho=\{(x,y):(x-1)^2+y^2\geqslant 4\}$.

7. Na skupu A^2, $A=[-2,2]$ odredi relaciju ρ ako je $(x,y)\in\rho \iff |x|+|y|\geqslant 1$.

8. Na skupu A^2, $A=[1,5]$, odredi relaciju ρ tako da je $(x,y)\in\rho \iff |x-2|+|y-3|\leqslant 2$.

9. Grafički prikaži relacije $\rho\subset A\times B$, $A=[-4,4]$, $B=[-2,2]$ ako je $(x,y)\in\rho \iff |y|=\big|2-|x|\big|$.

10. Ako je $A=[-1,4]$, $B=[-2,3]$, odredi relaciju $\rho\subset A\times B$ s tim da je $(x,y)\in\rho \iff |x-y|\geqslant 2$.

11. Koje su od sljedećih relacija relacije ekvivalencije:

1. Relacija "biti paralelan" na skupu svih pravaca u ravnini.

2. Relacija "biti okomit" na istom skupu. ravnini.

3. Relacija "biti jednak" na skupu realnih brojeva.

4. Relacija "biti djeljiv s 5" na skupu cijelih brojeva.

5. Relacija "biti manji ili jednak od" na skupu racionalnih brojeva.

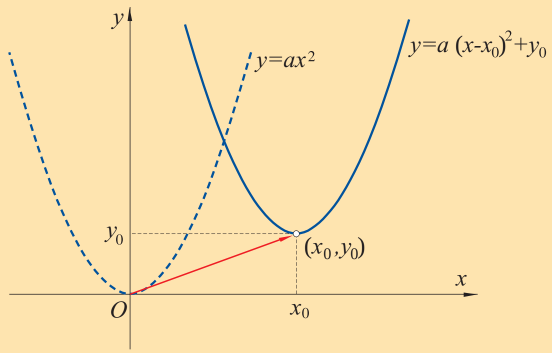
3.3. Transformacije grafa funkcije

Pretpostavimo da smo na grafu funkcije f načinili neku transformaciju, poput zrcaljenja s obzirom na neku koordinatnu os ili translacije za zadani vektor. Time smo dobili graf neke druge funkcije; označimo je s f^*. Koja je to funkcija?

Translacija grafa

Primjer 1.

Graf parabole $y = a(x-x_0)^2+y_0$ dobivamo translacijom grafa parabole $y = ax^2$ tako da njezino tjeme iz ishodišta prijeđe u točku (x_0, y_0).



Translacijom grafa parabole $y = ax^2$ *dobiva se graf parabole* $y = a(x-x_0)^2+y_0$.

— ◆ —

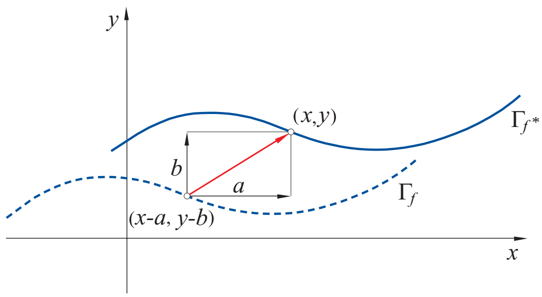
Postavimo općenitiji problem. Neka je $y = f(x)$ graf početne funkcije. Kojoj funkciji odgovara graf translatiran za vektor $a\vec{\imath}+b\vec{\jmath}$?

Najlakše ćemo odgovoriti na ovo pitanje ako funkcijsku vezu napišemo u implicitnom obliku: $F(x,y) = 0$. Točka (x,y) leži na grafu Γ_f funkcije ako i samo ako vrijedi $F(x,y) = 0$:

$$(x,y) \in \Gamma_f \iff F(x,y) = 0.$$

Translatirani graf označavat ćemo s Γ^* ili s Γ_{f^*}. Točka (x,y) leži na translatiranom grafu onda i samo onda ako točka $(x-a, y-b)$ leži na grafu početne funkcije. Zato možemo napisati:

$$(x,y) \in \Gamma_{f^*} \iff (x-a, y-a) \in \Gamma_f \iff F(x-a, y-b) = 0.$$



Točka (x, y) *leži na grafu* Γ_{f^*} *onda i samo onda ako* $(x-a, y-b)$ *leži na grafu* Γ_f *.*

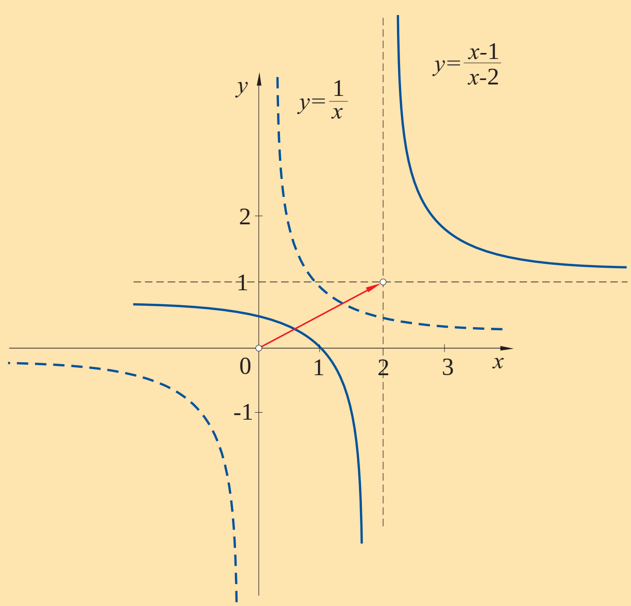
Primjer 2. Neka je $y = \dfrac{1}{x}$ racionalna funkcija. Napišimo tu vezu u obliku

$$F(x, y) = y - \frac{1}{x} = 0.$$

Translacijom grafa za vektor $2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ dobit ćemo graf funkcije

$$F(x-2, y-1) = y - 1 - \frac{1}{x-2} = 0,$$

$$y = \frac{1}{x-2} + 1 = \frac{x-1}{x-2}.$$



Graf funkcije $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$ *dobiva se translacijom hiperbole* $y = \dfrac{1}{x}$ *za vektor* $2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

Primjer 3. Funkcija kosinus dobiva se iz funkcije sinus translacijom grafa ulijevo za $\frac{\pi}{2}$, dakle za vektor $-\frac{\pi}{2}\vec{\imath}$. Zato točka (x, y) leži na grafu funkcije kosinus onda i samo onda ako $(x + \frac{\pi}{2}, y)$ leži na grafu funkcije sinus. Možemo napisati

$$y = \cos x \iff y = \sin(x + \tfrac{\pi}{2}),$$

odakle slijedi

$$\sin(x + \tfrac{\pi}{2}) = \cos x, \qquad \forall x.$$

Primjer 4. **Periodične funkcije.** Ako je funkcija periodična s periodom T, onda se translacijom za vektor $-T\vec{\imath}$ njezin graf ne mijenja. To znači da je jednadžbom $F(x, y) = 0$ i $F(x + T, y) = 0$ određena ista funkcija, dakle, vrijedi za svaki x

$$y = f(x) = f(x + T).$$

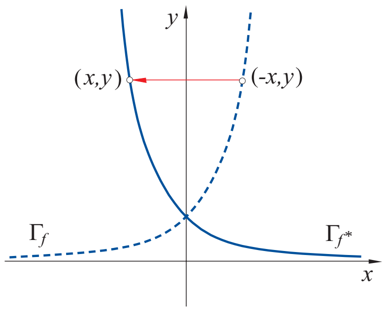
Zrcaljenje s obzirom na y-os

Promotrimo sad drugu transformaciju grafa funkcije: zrcaljenje s obzirom na y-os.

Ako točka (x, y) pripada grafu Γ_{f^*}, onda točka $(-x, y)$ pripada grafu Γ_f. Zato vrijedi

$$(x, y) \in \Gamma_{f^*} \iff F(-x, y) = 0.$$

Drukčije napisano, funkcija čiji graf dobivamo zrcaljenjem grafa funkcije f s obzirom na t-os glasi $y = f(-x)$.



Zrcaljenje s obzirom na y-os.

Primjer 5. Zrcaljenjem oko y-osi grafa eksponencijalne funkcije $y = a^x$ dobivamo graf funkcije $y = a^{-x}$.

Primjer 6. **Parna funkcija**. Funkcija je parna ako se pri ovoj transformaciji njezin graf ne mijenja. Iz $\Gamma_f = \Gamma_{f^*}$ slijedi

$$F(x,y) = 0 \iff (x,y) \in \Gamma_f \iff (x,y) \in \Gamma_{f^*} \iff F(-x,y) = 0,$$

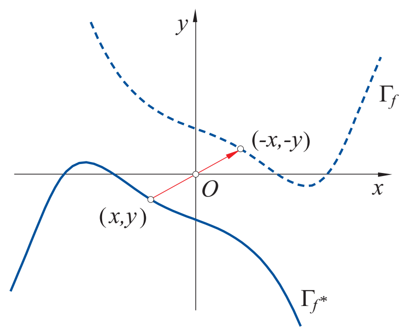
te je $F(x,y) = 0$ onda i samo onda ako je $F(-x,y) = 0$, odnosno $f(x) = f(-x)$ za svaki x za koji je f definirana.

Primjer 7. **Zrcaljenje s obzirom na x-os.** Slično ovome, točka (x,y) ležat će na grafu funkcije simetrične s obzirom na x-os ako vrijedi $F(x,-y) = 0$. Napisana u eksplicitnom obliku, jednadžba transformirane funkcije je $y = -f(x)$.

Zrcaljenje s obzirom na ishodište

Promotrimo sad zrcaljenje s obzirom na ishodište. Točka (x,y) leži na zrcaljenom grafu ako i samo ako točka $(-x,-y)$ leži na početnom grafu. Dakle

$$(x,y) \in \Gamma_{f^*} \iff F(-x,-y) = 0 \iff y = -f(-x).$$



Zrcaljenje s obzirom na ishodište.

Primjer 8. **Neparne funkcije.** Ako je funkcija neparna, onda se ovom transformacijom njezin graf ne mijenja: $\Gamma_{f^*} = \Gamma_f$. Zato je

$$\begin{aligned} F(x,y) = 0 &\iff (x,y) \in \Gamma_f \iff (-x,-y) \in \Gamma_f \\ &\iff F(-x,-y) = 0, \end{aligned}$$

te je

$$y = f(x) \iff -y = f(-x),$$

odnosno $f(-x) = -f(x)$ za svaki x za koji je f definirana.

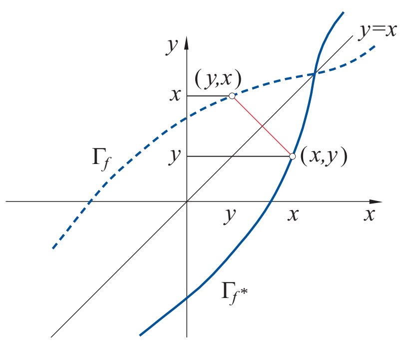
Simetrija s obzirom na pravac $y = x$

Simetrijom s obzirom na pravac $y = x$ (simetralu prvog i trećeg kvadranta) točka (x,y) prelazi u točku (y,x) i obratno. Zato točka (x,y) leži na transformiranom grafu onda i samo onda ako (y,x) leži na početnom grafu. To možemo napisati ovako:

$$(x,y) \in \Gamma_{f^*} \iff (y,x) \in \Gamma_f,$$

pa je jednadžba nove funkcije određena s $F(y,x) = 0$.

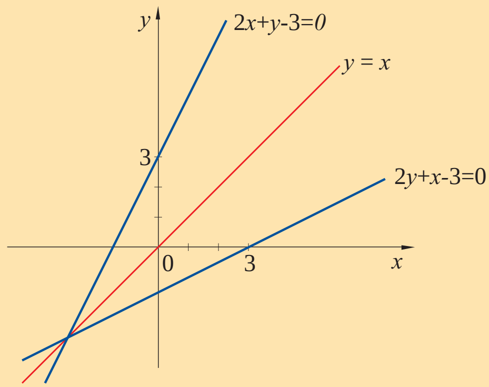
Ovom se transformacijom iz grafa funkcije f dobiva graf inverzne funkcije.



Jednadžba funkcije čiji se graf dobije simetrijom s obzirom na pravac $y = x$ glasi $F(y,x) = 0$.

Primjer 9. Neka je $y = a^x$. Implicitna jednadžba ove funkcije je $F(x,y) = y - a^x = 0$. Implicitna jednadžba funkcije čiji je graf simetričan grafu ove eksponencijalne funkcije s obzirom na pravac $y = x$ glasi $F(y,x) = 0$, odnosno $x - a^y = 0$. Odavde slijedi: $a^y = x$, tj. $y = \log_a x$.

Primjer 10. Jednadžbom $F(x,y) = 2x + y - 3 = 0$ definiran je pravac. Jednadžba njemu simetričnog pravca s obzirom na pravac $y = x$ glasi $F(y,x) = 0$, odnosno $2y + x - 3 = 0$. Na slici nacrtana su oba pravca.



Pravac $2x+y-3=0$ *simetričan je pravcu* $2y+x-3=0$ *s obzirom na simetralu prvog kvadranta.*

Zadaci 3.3.

1. Napiši funkciju čiji se graf dobije iz pravca $y = 2x + 1$:

1. translacijom za dvije jedinice udesno;
2. translacijom za tri jedinice ulijevo;
3. translacijom koja prevodi točku $(1, 3)$ tog pravca u točku $(3, 7)$;
4. simetrijom s obzirom na y-os;
5. simetrijom s obzirom na x-os;
6. simetrijom s obzirom na ishodište;
7. simetrijom s obzirom na pravac $y = x$.

2. Riješi zadatak istovjetan prethodnom za funkciju $y = 2^x$.

3. Pomoću grafa funkcija $f(x) = x^2$ nacrtaj grafove sljedećih funkcija

1. $f(x) = -x^2$; **2.** $f(x) = x^2 + 1$;
3. $f(x) = -x^2 + 4$; **4.** $f(x) = -(x-1)^2$;
5. $f(x) = (x+2)^2$; **6.** $f(x) = -(x+1)^2 + 1$.

4. Pomoću grafa funkcija $f(x) = x^3$ nacrtaj grafove sljedećih funkcija

1. $f(x) = -x^3$; **2.** $f(x) = x^3 + 2$;
3. $f(x) = -x^3 + 2$; **4.** $f(x) = (x+2)^3$;
5. $f(x) = -(x-1)^3$; **6.** $f(x) = -(x+2)^3 + 2$.

5. Koristeći graf funkcija sinus i kosinus, nacrtaj graf sljedećih funkcija:

1. $f(x) = 1 + \sin x$; **2.** $g(x) = \cos x - 2$;
3. $h(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$; **4.** $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$;
5. $g(x) = 2\sin x$; **6.** $h(x) = \cos 2x$;
7. $f(x) = 2\sin^2 x$; **8.** $g(x) = 3\cos^2 x$;
9. $h(x) = 2 + 3\sin x$.

6. Koristeći graf funkcije $f(x) = |x|$, nacrtaj graf sljedećih funkcija

1. $f(x) = |x-2|$; **2.** $f(x) = |x+3|$;
3. $g(x) = |x-2| - 1$; **4.** $h(x) = |x+1| - 2$;
5. $g(x) = |2x+3|$; **6.** $f(x) = 2|x-3| + 1$;
7. $g(x) = \big||x-1|-1\big|$; **8.** $h(x) = \big||2-x|-2\big|$;
9. $f(x) = \big||2x-1|-2\big|$.

7. Koristeći graf funkcije $f(x) = \sqrt{x}$, nacrtaj graf sljedećih funkcija

1. $f(x) = \sqrt{x} + 2$; **2.** $g(x) = \sqrt{x-1}$;
3. $g(x) = \sqrt{x+2} - 2$; **4.** $f(x) = -\sqrt{x-1}$;
5. $h(x) = \sqrt{2-x}$; **6.** $h(x) = -\sqrt{1-x}$.

8. Nacrtaj graf sljedećih funkcija

1. $f(x) = |x| + |x+1|$;
2. $f(x) = 2|x| - |x+1|$;
3. $f(x) = |x| - |x+1|$;
4. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x-1}$;

9. Nacrtaj graf sljedećih funkcija

1. $f(x) = \sin x - \cos x$;
2. $f(x) = \cos x - 2\sin x$;
3. $f(x) = 3\cos x - 2\sin x$;
4. $f(x) = |2\sin x + 1|$.

10. Nacrtaj graf funkcije $f(x) = |x^2 - 4x|$ crtajući graf funkcija u sljedećem poretku: **a)** $f_1(x) = x - 2$; **b)** $f_2(x) = (x-2)^2$; **c)** $f_3(x) = x^2 - 4x$; **d)** $f_4(x) = |x^2 - 4x|$.

11. Jednadžbom $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ određena je kružnica. Uvjeri se da vrijedi $F(-x, y) = F(x, -y) = F(-x, -y) = F(y, x) = 0$. Što to znači za kružnicu?