1 Kombinatorika

- Princip uzastopnog prebrojavanja.................................. 2
- Permutacije.. 15
- Kombinacije... 23

Koliko različitih telefonskih brojeva postoji, ako su brojevi šesteroznamenkasti, a prva znamenka nije jednaka nuli? Koliko se može napisati peteroznamenkastih brojeva s različitim znamenkama? Na koliko se načina deset predmeta može podijeliti na deset osoba? Na koliko se načina može izvući sedam brojeva od 39 u igri LOTO?

Kombinatorika je grana matematike koja se bavi prebrojavanjem konačnih skupova. Ma koliko je brojanje svakodnevan posao, prebrojavanje elemenata nekog skupa može biti iznimno teško. U ovom ćemo poglavlju usvojiti neke elementarne principe prebrojavanja.

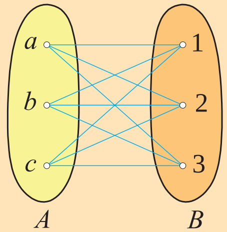
1.1. Princip uzastopnog prebrojavanja

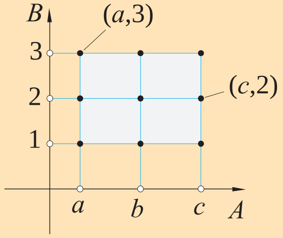
Broj elemenata nekog skupa dobivamo prebrojavajući njegove elemente. Međutim, u određenoj situaciji prebrojavanje možemo zamijeniti efikasnijim postupcima.

Primjer 1. Ekipni susreti u stolnom tenisu igraju se tako da svaki igrač jedne ekipe igra protiv svakog igrača druge ekipe. Ako se svaka ekipa sastoji od tri igrača, koliki je ukupni broj igara?

▶ Svaki igrač prve ekipe odigrat će tri meča, protiv svih igrača druge ekipe. Isti broj igara odigrat će i preostala dva igrača. Dakle, ukupan broj igara je $3 \cdot 3 = 9$.

Ovdje je riječ o malim skupovima i mogli smo ispisati tih 9 igara, naznačujući imena igrača iz svake ekipe koji igraju pojedini susret. Međutim, potpuno isto zaključivanje vrijedi i za skupove s velikim brojem elemenata, gdje bi takvo ispisivanje bilo nepraktično.





Shematski prikaz susreta između dvije ekipe. Svaki igrač prve ekipe igra protiv svakog igrača druge. Jednu igru možemo prikazati uređenim parom, poput $(c, 2)$ *ili* $(a, 3)$.

Kartezijev umnožak skupova

Neka su A i B dva neprazna skupa. **Kartezijev umnožak** skupova A i B je skup $A \times B$ čiji su elementi uređeni parovi (a, b), pri čemu je $a \in A$, $b \in B$. Pišemo

$$A \times B = \{(a, b),\ a \in A,\ b \in B\}.$$

Dva su uređena para (a, b) i (x, y) jednaka ako i samo ako je $a = x$, $b = y$.

Koliki je *broj elemenata* u Kartezijevu umnošku skupova? Uzmimo skupove s malim brojem elemenata, kako bismo mogli ispisati sve njegove članove. Neka je $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Tad se $A \times B$ sastoji od uređenih parova:

$$\begin{array}{ccc} (a_1, b_1) & (a_1, b_2) & (a_1, b_3) \\ (a_2, b_1) & (a_2, b_2) & (a_2, b_3) \end{array}$$

Njihov je broj $6 = 2 \cdot 3$, što prepoznajemo kao umnožak broja elemenata u skupu A s brojem elemenata u skupu B.

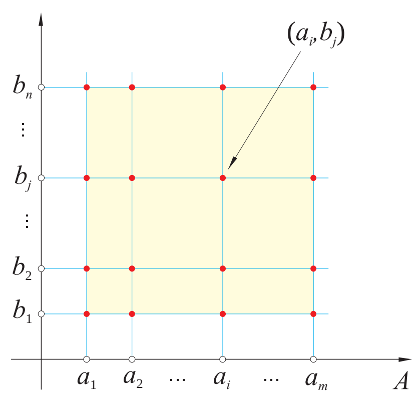
Sličnu shemu možemo napisati za skupove s po volji mnogo elemenata. Ako je $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, onda su elementi Kartezijeva umnoška sljedeći uređeni parovi:

$$\begin{array}{cccc} (a_1, b_1) & (a_1, b_2) & \ldots & (a_1, b_n) \\ (a_2, b_1) & (a_2, b_2) & \ldots & (a_2, b_n) \\ (a_3, b_1) & (a_3, b_2) & \ldots & (a_3, b_n) \\ \vdots & & & \\ (a_m, b_1) & (a_m, b_2) & \ldots & (a_m, b_n) \end{array}$$

Njihov je broj mn. Tako vrijedi:

Broj elemenata Kartezijeva umnoška

Ako skup A ima m elemenata, a skup B n elemenata, tad Kartezijev umnožak $A \times B$ ima mn elemenata. Pišemo $c(A \times B) = c(A) \cdot c(B)$.



Kartezijev umnožak dvaju skupova.

Poredak skupova u Kartezijevu umnošku je važan, jer za $A \neq B$ vrijedi $A \times B \neq B \times A$. Međutim, broj elemenata u oba ova skupa podudara se. Tako, ako nas zanima samo broj elemenata u Kartezijevu umnošku, ne moramo paziti na poredak skupova.

Na potpuno identičan način može se opisati i Kartezijev umnožak nekoliko skupova. Neka su $S_1, \ldots, S_k$ zadani skupovi. Kartezijev umnožak tih skupova skup je svih uređenih k-torki:

$$S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_k = \{(s_1, s_2, \ldots, s_k) : s_1 \in S_1,\ s_2 \in S_2, \ldots, s_k \in S_k\}.$$

Primjer 2. Koliko postoji različitih troznamenkastih brojeva?

Odgovor je 900: to su brojevi od 100 do 999. Povezat ćemo ga s Kartezijevim umnoškom skupova. Ovdje se radi o umnošku triju skupova: skupa $S_1 = \{1, 2, \ldots, 9\}$ iz kojeg biramo prvu znamenku, skupa $S_2 = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ iz kojeg biramo drugu znamenku i istovjetnog skupa S_3. Primjerice, ako uređena trojka (s_1, s_2, s_3) ima oblik $(3, 5, 3)$, ona određuje troznamenkasti broj 353.

Broj 900 jednak je umnošku $9 \cdot 10 \cdot 10$ broja elemenata iz svakoga skupa: prvu znamenku možemo birati na devet načina, drugu na deset i treću također na deset načina. Prema tome, u ovom primjeru vrijedi

$$c(S_1 \times S_2 \times S_3) = 900 = 9 \cdot 10 \cdot 10 = c(S_1) \cdot c(S_2) \cdot c(S_3).$$

Povijesni kutak

RENÉ DESCARTES

René Descartes (La Haye Touraine, 31. ožujka 1596 – Stockholm, 11. veljače 1650) francuski matematičar, fizičar, filozof. S osam godina počinje njegovo školovanje kod isusovaca, koje završava 1612 kad se počinje pripremati za vojnu službu. Služio je u dvije vojske. 1621. započinje studije iz matematike, a od 1628. do 1649. živi u Nizozemskoj gdje se uz potporu mecena bavi znanstvenim i filozofskim radom. Umro je za posjeta Švedskoj na poziv kraljice Christine. Često nazivan ocem moderne filozofije, osnivač je racionalizma i za života je imao mnoge sljedbenike. Descartes je zasnovao analitičku geometriju. Po njegovu latiniziranom imenu *Cartesius* nazivaju se pravokutni koordinatni sustavi. Uveo je pojam promjenjive veličine, koordinatnog sustava, primjenjivao algebarske metode u geometriji i mnogo doprinio u razumjevanju fizikalnog svijeta objašnjavajući pojmove materije i gibanja.

Na istovjetan način računat ćemo broj elemenata Kartezijeva umnoška više skupova. Neka je n_1 broj elemenata u skupu S_1, n_2 broj elemenata u skupu S_2 itd. Prvu komponentu iz skupa S_1 možemo izabrati na n_1 načina. Svakoj toj komponenti možemo dodati drugu komponentu iz skupa S_2 na n_2 načina. Tako prve dvije komponente možemo odabrati na $n_1 \cdot n_2$ načina. Treću komponentu možemo birati na n_3 načina, pa uređenih trojki ima $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ itd.

Kartezijev umnožak nekoliko skupova

Broj elemenata u Kartezijevu umnošku k skupova je

$$c(S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_k) = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k = c(S_1) \cdot c(S_2) \cdots c(S_m). \qquad (1)$$

Odgovorimo na prvo pitanje postavljeno u uvodu poglavlja.

Primjer 3. Koliko različitih telefonskih brojeva postoji, ako su brojevi šesteroznamenkasti, a prva znamenka nije jednaka nuli?

▶ Broj različitih telefonskih brojeva izračunat ćemo ovako. Jedan telefonski broj je uređena šestorka, dakle element Kartezijeva umnoška šest skupova od kojih prvi $S_1 = \{1, 2, \ldots, 9\}$ ima devet, a preostali skupovi $S_2, \ldots, S_6$ po deset elemenata. Zato je broj svih različitih brojeva jednak broju elemenata tog Kartezijeva umnoška i iznosi

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 900\,000.$$

Slične ćemo zadatke ubuduće rješavati ne spominjući Kartezijeve umnoške, već samo način biranja pojedinih elemenata uređene k-torke.

Primjer 4. Koliko se različitih registracijskih pločica može učiniti ako svaka sadrži tri slova i zatim dvije znamenke?

▶ Različitih slova ima 22 (ne uzimaju se slova Č, Ć, DŽ, Đ, LJ, NJ, Š, Ž, Q, X, Y, W). Registracijska pločica određena je uređenom petorkom, u kojoj se prve tri komponente biraju iz skupa od 22 slova, a preostale dvije iz skupa od 10 znamenaka. Zato je ukupan broj

$$22 \cdot 22 \cdot 22 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,064\,800.$$

Primjer 5. Satničar treba staviti u satnicu jedan sat matematike svaki radni dan u tjednu. Ako razred ponedjeljkom i četvrtkom ima 7 sati, utorkom i srijedom 6 a petkom 5, na koliko se načina to može učiniti?

▶ Mogućih rasporeda ima $7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 5 = 8820$. Sastavljanje cjelokupne satnice težak je kombinatorni problem. Školski su satničari uglavnom profesori matematike.

Zadatak 1. Školska knjižnica sadrži 28 knjiga iz matematike, 16 iz fizike, 10 iz kemije i 15 iz biologije. Na koliko načina učenik može uzeti po jednu knjigu iz ta četiri predmeta?

Rješenje. Na $28 \cdot 16 \cdot 10 \cdot 15 = 67\,200$ načina.

Još jedan, ugodniji zadatak:

Zadatak 2. Videoteka posjeduje 56 akcijskih filmova, 24 komedije, 46 drama i 16 filmova u kategoriji ‘hitova’. Na koliko se načina može odabrati po jedan film iz svake skupine? Na koliko načina nakon toga po jedan film može odabrati sljedeći posjetilac?

Rješenje. Prvi na $56 \cdot 24 \cdot 46 \cdot 16 = 989\,184$ načina, a drugi na $55 \cdot 23 \cdot 45 \cdot 15 = 853\,875$ načina.

Primjer 6. Ako iz videoteke u prošlom zadatku biramo samo dva filma, po jedan iz različitih skupina, na koliko načina to možemo učiniti?

▶ Ovaj je problem složeniji. Izbor filmova moramo činiti u dva koraka. Najprije se moramo odlučiti za skupine filmova, a zatim odabrati po jedan film iz svake skupine. Imamo sljedećih šest mogućnosti:

akcijski i komedije:	$N_1 = 56 \cdot 24 = 1344$,
akcijski i drame:	$N_2 = 56 \cdot 46 = 2576$,
akcijski i hitovi:	$N_3 = 56 \cdot 16 = 896$,
komedije i drame:	$N_4 = 24 \cdot 46 = 1104$,
komedije i hitovi:	$N_5 = 24 \cdot 16 = 384$,
drame i hitovi:	$N_6 = 46 \cdot 16 = 736$.

Ukupan broj različitih izbora je $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 = 7040$.

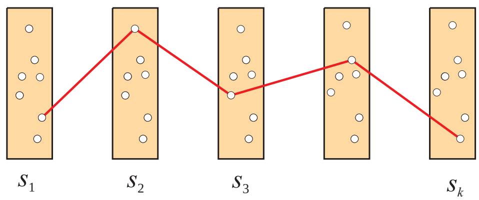
Neka je $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ zadani skup.

- Koliko postoji različitih uređenih k-torki elemenata skupa S?

Isto pitanje možemo postaviti i na ovaj način:

- Na koliko se različitih načina može izabrati k elemenata skupa S pazeći na njihov poredak, s tim da se elementi mogu ponavljati?

Riječ je očito o broju elemenata u Kartezijevu umnošku k istovjetnih skupova $S \times S \times \cdots \times S$. Njihov je broj n^k.



Varijacije s ponavljanjem. Izbor uređene k-torke $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ određuje jedan put, koji povezuje izabrane elemente pojedinih skupova.

Varijacije s ponavljanjem

Varijacija s ponavljanjem k-tog razreda u n-članom skupu S je *svaka uređena k-torka* Kartezijeva umnoška k skupova $S \times S \times \cdots \times S = S^k$.

Broj varijacija s ponavljanjem označavamo s $\overline{V}_n^k$. On jednak je broju elemenata Kartezijeva umnoška S^k:

$$\overline{V}_n^k = c(S \times S \times \cdots \times S) = [c(S)]^k = n^k.$$

Tako su na primjer varijacije s ponavljanjima drugog razreda u skupu $S = \{1, 2, 3, 4\}$:

11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34
41	42	43	44

Njihov je broj $\overline{V}_4^2 = 4^2 = 16$.

Ovdje i u sličnim primjerima, radi jednostavnosti pisat ćemo 11 umjesto uređenog para $(1, 1)$, a slično i za ostale parove. Također, umjesto uređene k-torke govorimo često o **nizu** elemenata, i pišemo $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sa ili bez zareza između elemenata.

Primjer 7. Test na razredbenom postupku ima 40 zadataka. Pristupnik u svakom zadatku može zaokružiti jedan od ponuđenih pet odgovora, ili ostaviti zadatak neodgovorenim. Na koliko se različitih načina može odgovoriti na zadani test?

▶ Na svaki se zadatak može odgovoriti na šest različitih načina. Ukupan broj različitih odgovora u cijelom testu je $6^{40} \approx 1.34 \cdot 10^{31}$. Riječ je o varijacijama s ponavljanjima, razreda 40 u skupu od 6 elemenata.

Zadatak 3. Iz snopa od 52 karte izvlači se jedna karta i zapiše rezultat. Pokus se ponavlja tri puta. (Nakon izvlačenja karta se vraća u snop.) Koliko različitih ishoda ima ovaj pokus?

Zadatak 4. Iz snopa od 52 karte izvlače se, jedna po jedna, tri karte (bez vraćanja u snop). Koliko različitih ishoda ima ovaj pokus?

Primjer 8. **Broj podskupova zadanog skupa.** Koliki je broj podskupova skupa S koji ima n elemenata (uključujući prazan skup i cijeli skup)?

▶ Svakom elementu skupa S možemo pridružiti broj 0 ili 1, sa značenjem

0: taj se element ne uzima u podskup,

1: taj se element uzima u podskup.

Tako dobivamo niz duljine n koji se sastoji od nula i jedinica, a koji opisuje način izbora podskupa.

Na primjer, ako je $S = \{a, b, c, d, e\}$, tad niz $1, 0, 0, 1, 1$ određuje podskup $\{a, d, e\}$, a niz $0, 0, 1, 0, 0$ određuje podskup $\{c\}$. Niz $\{0, 0, 0, 0, 0\}$ odgovara praznom podskupu, a niz $\{1, 1, 1, 1, 1\}$ cijelom skupu.

Time smo pokazali da je broj podskupova jednak broju nizova duljine n koji se sastoje od nula i jedinica. Prvu znamenku u tom nizu možemo izabrati na dva načina, drugu i sve ostale također na dva načina. Zato je ukupan broj različitih nizova, odnosno broj svih podskupova, jednak 2^n.

Partitivni skup

Skup svih podskupova skupa S označavamo s $P(S)$ i nazivamo **partitivnim skupom** skupa S. Ako je $c(S) = n$, onda je $c(P(S)) = 2^n$.

Zadatak 5. Na koliko različitih načina dijete može odabrati jednu ili više igrački, između 10 igrački koje posjeduje?

Princip uzastopnog prebrojavanja

Brojanje elemenata Kartezijeva umnoška možemo poopćiti i na slučaj kad promatramo broj elemenata u nekim njegovim podskupovima. Pogledajmo sljedeći jednostavni primjer.

Primjer 9. Koliko postoji dvoznamenkastih brojeva s različitim znamenkama?

Prvu znamenku biramo iz skupa $S_1 = \{1, 2, \ldots, 9\}$, a drugu iz skupa $S_2 = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, ali pritom moramo paziti da ne odaberemo već prije odabranu znamenku. Zato će izbor biti uređeni par (s_1, s_2), pri čemu je $s_2 \neq s_1$. Time je određen neki podskup Kartezijeva umnoška, koji (u složenijim primjerima) nije jednostavno opisati. Međutim, broj njegovih elemenata možemo lako odrediti.

Prvu znamenku možemo birati po volji, devet je mogućih izbora. Bez obzira koju znamenku s_1 izabrali, drugu znamenku biramo između devet *preostalih* znamenki skupa S_2, koje su različite od s_1. Njihov izbor ovisi dakle o izboru prve znamenke, ali *njihov broj ne ovisi*. Ukupan broj svih mogućnosti je $9 \cdot 9$.

Na identičan način možemo odgovoriti na drugo pitanje u uvodu poglavlja.

Primjer 10. Koliko se može napisati peteroznamenkastih brojeva s različitim znamenkama?

Peteroznamenkastih brojeva s različitim znamenkama ima

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27\,216,$$

jer prvu znamenku biramo iz skupa S_1 (devet mogućnosti), drugu iz skupa svih znamenki različitih od prve (devet mogućnosti), treću iz skupa svih znamenki različitih od prve dvije (osam mogućnosti) itd.

Primjer 11. Koliko se peteroznamenkastih brojeva može napisati znamenkama 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ako se 0 ne smije naći niti na prvom, niti na posljednjem mjestu, a sve znamenke moraju biti različite?

Brojeva kod kojih nula nije na prvom mjestu ima $6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$, jer prva znamenka mora biti različita od nule, druga bilo koja od preostalih itd. Neki od ovih brojeva imat će nulu na posljednjem mjestu. Zato ćemo sada prebrojati koliko je takvih brojeva. Kod njih prvu znamenku možemo odabrati na 6 načina, drugu na 5 načina, treću na četiri načina, a četvrtu na 4 načina. Peta znamenka je nula. Ukupno ima $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ ovakvih brojeva. Prema tome, svega je $6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 - 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1800$ brojeva koji zadovoljavaju oba uvjeta.

Način razmišljanja u svim dosadašnjim primjerima možemo formulirati na sljedeći način:

Princip uzastopnog prebrojavanja

Ako element s_1 možemo izabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k.$$

Princip obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na n_1 način, drugi dio posla na n_2 načina,..., posljednji na n_k načina, onda se cijeli posao može učiniti na $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$ načina[1].

Ukoliko poredak elemenata nije važan, pri primjeni principa o uzastopnom prebrojavanju moramo biti vrlo oprezni. Objasnit ćemo to kroz sljedeća dva primjera.

Primjer 12. Koliko dijagonala ima pravilan n-terokut?

Dijagonala je određena s dva nesusjedna vrha n-terokuta. Prvi vrh možemo odabrati na n načina. Za drugi vrh nakon toga na raspolaganju imamo $n-3$ nesusjedna vrha. Ukupan broj (uređenih) parova vrhova je $n(n-3)$. Međutim, broj dijagonala je dva puta manji, jer svaka dijagonala povezuje dva vrha: dva uređena para (A, B) i (B, A) vrhova određuju istu dijagonalu. Dakle, broj dijagonala je $N = \frac{1}{2}n(n-3)$. Ovaj je broj uvijek cjelobrojan, jer su brojevi n i $n-3$ različite parnosti.

Primjer 13. Snop karata sastoji se od 52 karte, podijeljenih u četiri boje (po 13 karata svaka). Na koliko različitih načina možemo odabrati dvije karte iste boje?

Boju možemo odabrati na četiri načina. Prvu kartu u toj boji na 13 načina. Nakon što smo odabrali prvu kartu, preostaje 12 mogućnosti za izbor druge karte iste boje. Ponovno je svaki par brojen dva puta. Ukupan broj izbora dviju karata je $4 \cdot 13 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} = 312$.

[1] Murphyjev zakon: Postoji li ijedan način da posao krene naopako, sigurno će krenuti naopako — iskustvena je činjenica koja se ne da matematički dokazati.

Primjer 14. Na koliko različitih načina možemo iz snopa od 52 karte odabrati dvije karte različitih boja?

Dvije boje možemo odabrati na šest načina. Kartu u toj svakoj boji možemo odabrati na 13 načina. Ukupan broj izbora dviju karata je $6 \cdot 13 \cdot 13 = 1014$.

Možemo razmišljati i ovako: Prvu kartu možemo odabrati na 52 načina, a drugu (među preostalim bojama) na 39. Pritom je svaki mogući par brojan dvaput, pa je ukupan broj jednak $52 \cdot 39 \cdot \frac{1}{2}$.

Odgovorimo sad na sljedeće pitanje:

- *Na koliko načina možemo poredati k različitih elemenata iz skupa od n elemenata?*

Prvi element možemo odabrati na n načina. Nakon toga, drugi element možemo odabrati na $n-1$ način, jer mora biti različit od prvog. Treći možemo odabrati na $n-2$ načina. Posljednji, k-ti na $n-(k-1) = n-k+1$ način. Zato je ukupan broj načina jednak $n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

Varijacije bez ponavljanja

Uređena k-torka različitih elemenata istog skupa $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ naziva se **varijacijom** k-tog razreda u skupu od n elemenata. Pri tom mora biti $k \leqslant n$. Broj varijacija označavamo s V_n^k. Vrijedi

$$V_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

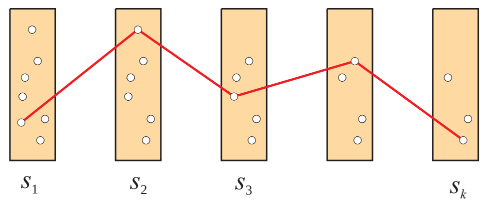
Primjer 15. Na koliko se različitih načina može podijeliti zlatna, srebrna i brončana medalja između osam natjecatelja?

Riječ je o varijacijama trećeg razreda u skupu od osam elemenata. Zato je traženi broj $N = V_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

Svakako je korisnije zapamtiti način na koji smo došli do ovog broja, nego samu formulu. Moramo biti sigurni da razumijemo princip uzastopnog prebrojavanja:

- zlatnu medalju možemo podijeliti na 8 načina,
- srebrnu medalju možemo podijeliti na 7 načina (među preostalih 7 natjecatelja),
- brončanu medalju možemo podijeliti na 6 načina (među preostalih 6 natjecatelja).

Zato je broj različitih načina za dodjelu sve tri nagrade jednak $8 \cdot 7 \cdot 6$.



Varijacije bez ponavljanja u skupu od n elemenata. Prvi element biramo po volji, drugi element tako da bude različit od prvog itd.

Zadatak 6. Abeceda u hrvatskome jeziku sastoji se od 30 slova od kojih je 5 samoglasnika i 25 suglasnika. Na koliko se različitih načina može ispisati riječ od pet slova ako:

1) sva slova u riječi moraju biti različita,
2) poredak slova je suglasnik-samoglasnik-suglasnik-samoglasnik-suglasnik,
3) isto što i 2), ali su sva slova u riječi različita.

Rješenje.

1) Na $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 = 17\,100\,720$ načina.
2) Na $25 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 5 \cdot 25 = 390\,625$ načina.
3) Na $25 \cdot 5 \cdot 24 \cdot 4 \cdot 23 = 276\,000$ načina.

Primjer 16. Na koliko se načina može načiniti raspored sati za ponedjeljak, ako je ukupno 12 nastavnih predmeta, a ponedjeljkom je po rasporedu nastava iz 6 različitih predmeta u 6 sati?

Prvi način. Za prvi sat možemo odabrati bilo koji od 12 predmeta. Nakon toga, za drugi sat dolazi u obzir bilo koji od preostalih 11 predmeta itd. Ukupan broj različitih rasporeda je $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.

Drugi način. (neispravan!) Neki predmet možemo odabrati na 12 načina. Nakon toga ga možemo staviti u satnicu na 6 različitih načina. Drugi predmet možemo odabrati na 11 načina, a staviti ga u satnicu na 5 načina itd. Ukupan broj različitih rasporeda je

$$12 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 1$$

Ovdje je učinjena pogreška višestrukog prebrojavanja iste kombinacije.

Tu je pogrešku lako uočiti kad su manji brojevi u pitanju. Recimo, za samo dva sata i samo dva predmeta A i B na raspolaganju, dvije su satnice: AB i BA. Računajući na prvi način dobivamo ispravno rješenje: $2 \cdot 1$. Razmišljajući na drugi način dobili bi: prvi predmet možemo odabrati na 2 načina, a u satnicu ga staviti na 2 načina, što daje neispravnih $2 \cdot 2$.

Zadaci 1.1.

1. Koliko bi šahovskih partija odigrali učenici dvaju razreda od po 24 učenika u međusobnom susretu, ako svaki učenik jednog razreda odigra jednu partiju sa svakim učenikom iz drugog razreda?

2. Na koliko se načina može odabrati jedno crno i jedno bijelo polje na šahovskoj ploči? (Poredak odabira crnog i bijelog polja nije važan.)

3. Na koliko se načina može odabrati jedno crno i jedno bijelo polje na šahovskoj ploči, ako ne smiju biti u istom retku ili stupcu?

4. U razredu je 17 djevojčica i 15 dječaka. Na koliko se načina mogu odabrati dva dežurna učenika, dječak i djevojčica?

5. Koliki je ukupan broj igara u prvenstvu u kojem sudjeluje 18 ekipa, ako svatko igra sa svakim i to dva puta tijekom prvenstva?

6. Jedan test ima 20 pitanja na koje se odgovara s “da” ili “ne”. Koliko je mogućnosti popunjavanja ovakva testa?

7. Koliko ima troznamenkastih brojeva kojima su sve tri znamenke neparni brojevi, a koliko kojima su parni (uzimamo 0 kao paran broj)?

8. Lokot na šifru sastoji se iz šest koluta od po 10 znamenki. Koliko je mogućnosti odabira šifre takva lokota?

9. Koliko ima različitih peteroznamenkastih brojeva u sustavu

1) s bazom 3; **2)** s bazom 5?

10. Koliko ima peteroznamenkastih brojeva koji su

1) djeljivi s 5; **2)** djeljivi s 4?

11. U nekom je mjestu 2000 žitelja. Dokaži da barem trojica imaju iste inicijale.

— ◆ —

12. Na nekom natjecanju sudjeluje 10 natjecatelja. Po završetku dijele se tri medalje za tri prva osvojena mjesta. Na koliko se načina može obaviti takva podjela?

13. Trideset učenika treba smjestiti na 34 mjesta u razredu. Na koliko se načina to može provesti?

14. Koliko je peteroznamenkastih brojeva u zapisu kojih se nalazi barem jedna znamenka 5?

15. Na jednoj je stranici trokuta odabrano n točaka, na drugoj m i na trećoj k, pri čemu ni jedna od odabranih točaka nije vrh trokuta. Koliko postoji trokuta kojima su vrhovi u odabranim točkama i svaki na drugoj stranici trokuta?

16. Koliko ima peteroznamenkastih brojeva djeljivih s 5 kod kojih u zapisu nema jednakih znamenki?

17. Koliko šesteroznamenkastih brojeva postoji kojima je
1) prva znamenka paran broj?
2) druga i posljednja znamenka neparan broj?

18. Koliko različitih peteroznamenkastih brojeva postoji koji

1) ne sadrže znamenku 1;

2) sadrže točno jednu znamenku 1;

3) sadrže barem jednu znamenku 1?

19. Na koliko se načina u razredu s 28 učenika mogu odabrati četiri učenika koji će napisati po jedan referat iz četiri različite teme?

20. Na koliko načina može 6 osoba sjesti na po jednu od 8 stolica?

21. Koliko troznamenkastih brojeva možemo sastaviti iz znamenki 1, 2, 3, 4, 5,
1. ako se u zapisu brojeva svaka znamenka pojavljuje samo jednom;
2. ako se u zapisu broja ista znamenka može pojaviti i više puta?

22. Na koliko se načina mogu načiniti 4 mješovita para od 10 tenisača i 6 tenisačica?

— ◆ —

23. Od znamenki $0, 1, 2, 3, 4, 5$ zapisujemo peteroznamenkaste brojeve. Koliko ima takvih brojeva

1) kojima su sve znamenke različite;

2) kojima se znamenke mogu i ponavljati;

3) koji su parni;

4) koji su djeljivi s 5;

5) koji su simetrični tj. čitani slijeva ili zdesna isti su broj.

24. Koliko različitih peteroznamenkastih brojeva, koji nisu djeljivi s 5, možemo zapisati znamenkama 1, 3, 5, 7, 9 a da u zapisu svakog pojedinog broja nema jednakih znamenki?

25. Koliko različitih razlomaka u kojima je brojnik manji od nazivnika možemo sastaviti od brojeva 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 tako da su brojnik i nazivnik po jedan od danih brojeva?

26. Od dva osnovna znaka, točke i crtice, slažu se složeni znakovi koji sadrže najviše do pet osnovnih znakova. Koliko se različitih znakova može složiti?

27. Koliko postoji sedmeroznamenkastih brojeva kojima je zbroj znamenki paran broj?

28. Koliko prostornih dijagonala ima kocka, koliko oktaedar, koliko dodekaedar a koliko ikosaedar?

29. *Sportska prognoza* ispunjava se tako da se u svakom od 13 susreta ispuni jedan od znakova: 1 — pobjeda domaćina, 0 — neriješeni ishod, 2 — pobjeda gosta.
1) Koliko različitih ishoda Sportske prognoze se može napisati?
2) Igrač popunjava sistemski listić. Od 13 susreta, na 6 upisuje samo jedan znak, na 3 dva znaka, a u 4 susreta sva tri moguća znaka. Koliko kombinacija treba uplatiti?