Uvod

Dugi niz godina u zagrebačkoj V. i XV. gimnaziji, a od prije par godina i u riječkoj Gimnaziji A. Mohorovičića, ***studenti*** (bivši *uspješni* natjecatelji) vode grupe u kojima pripremaju mlade matematičare za natjecanja. Ovakav oblik rada je najčešće volonterski i slabo p(r/l)aćen od društvene zajednice.

Školske godine 2004./2005. našao sam se u ulozi *voditelja grupe* 4. razreda u V. gimnaziji, a ova knjiga je rezultat tog rada.

Odmah na početku morao sam riješiti problem *što* i *kako* raditi. Unatoč tome što je posljednjih godina matematička literatura u Hrvatskoj znatno brojnija, ona slabo prati 4. razred srednje škole. Srećom, bila mi je dostupna opsežna strana literatura. Kako sam i sam godinu dana prije bio učenik 4. razreda imao sam sliku onoga što učenik 4. razreda, treba znati. Ova bi knjiga trebala biti svojevrsni ***priručnik* za dodatnu nastavu matematike** koji je pisao *bivši natjecatelj* u ulozi *mentora*.

O načinu rada

Na temelju svojih osobnih iskustava učenika koji je prošao razne pripreme od školskih grupa, preko zimskih i ljetnih priprema, do ljetnih škola sastavio sam svoju koncepciju predavanja:

- Učenici se na predavanjima susreću s **novom teorijom**, **idejama**, uče se razmišljanju o nekim specifičnim temama.

- Zadatke vježbaju **sami** u slobodno vrijeme. Ako nešto ne razumiju mogu pitati mentora (ili kolege).

Ovo podrazumijeva da učenik, uz usvajanje novog gradiva, vježba i zadatke s natjecanja. Na taj će način moći uočiti *rupe* u svojem predznanju koje obvezno **treba** *popuniti*.

Sva sam predavanja odlučio **pismeno** zabilježiti, a dobivene sam bilješke dostavljao polaznicima. Također, nakon svake obrađene cjeline polaznici bi dobili i zadatke koji je prate. Predavanja i zadaci s *grupe* izloženi su u ovoj knjizi (priručniku).

Sadržaj

Sadržaj knjige prati predviđeno gradivo 4. razreda i značajno ga proširuje. Predviđeno je da su polaznici upoznati s područjima koja se pojavljuju na natjecanjima matematike iz prethodnih razreda. Teme su složene u 7 $(6 + 1)$ cjelina:

1. **Matematička indukcija.** Većina polaznika upoznala je matematičku indukciju (mnogo prije 4. razreda) i neke njezine modifikacije. U ovoj cjelini obrađena je matematička indukcija i četiri njezine modifikacije.

2. **Kompleksni brojevi u geometriji.** Gaussova ravnina obrađuje se u 2. razredu gimnazije, no malo učenika zna koristiti kompleksne brojeve u *planimetriji*. Ovdje je prikazan temeljit pregled njihove upotrebe u ovom području.

3. **Funkcije.** Funkcije imaju različita svojstva od kojih mnoga možemo zapisati pomoću funkcijskih jednadžbi, no često se javlja pitanje postoji li još takvih funkcija. U ovoj cjelini su obrađene metode rješavanja funkcijskih jednadžbi.

4. **Nizovi i zbrojevi.** S nizovima se susrećemo vrlo rano u školovanju. Mnogi od njih imaju zanimljiva svojstva, a neke diofantske jednadžbe kao svoja rješenja imaju nizove cijelih brojeva. Ova cjelina nudi pregled nekih zanimljivih i važnih nizova i načina zbrajanja njihovih članova.

5. **Odabrane teme prebrojavanja.** Kombinatorika je široko i neiscrpno područje matematike. Budući da se obrađuje u redovnoj nastavi, u ovoj knjizi se nalaze neke teme koje su tamo izostavljene, ali mogu pomoći u *lakšem brojanju*.

6. **Alati matematičke analize.** Elementi matematičke analize često se na intuitivnom nivou uče u četvrtom razredu srednje škole. Ovdje su objašnjeni neki važni osnovni pojmovi matematičke analize i primjena njenog analitičkog aparata na rješavanje problema.

A. Izlet u teoriju grafova. Ovaj dodatak je autorovo predavanje održano na **pripremama za MMO 2005.** Na početku se uvode osnovni pojmovi teorije grafova, dok se u drugom dijelu upoznaju neki važni i korisni teoremi iz ovog područja.

Sadržaj knjige namijenjen je učeniku (natjecatelju) koji želi **upoznavati *nove ideje* u matematici bez obzira na dob** (npr. dijelovi o indukciji i nizovima pogodni su već za učenike prvih razreda, cjelina o kompleksnim brojevima u geometriji pogodna je i za učenike trećih razreda, dok su cjeline o prebrojavanju i teoriji grafova pogodne za sve ljubitelje matematike).

Vremenska ograničenja

Činjenica je da bi se još mnoge teme mogle nadodati, međutim vremenska ograničenja uvijek primoraju da se izdvoji ono najvažnije. Mnoge će zanimati koliko

je vremena potrebno za obradu ove knjige. Sadržaj (originalnih 6 cjelina bez dodatka A) odrađen je kroz **na 23 tjedna sastanka**. Sastanci su se održavali subotom od 9:30 ujutro po 150 minuta.

Teme, primjeri i zadaci

Svaka od sedam cjelina podijeljena je na manje jedinice (**posebne teme**), a na kraju svake slijedi izbor zadataka iz područja koje prati ta cjelina. Zadaci i primjeri su preuzeti s raznih (domaćih, stranih i međunarodnih) natjecanja, prijedloga za natjecanja i stručnih časopisa (domaćih i stranih). Primjeri su većinom kraći i domišljati zadaci koji prate teoriju i ideje izložene u predavanjima.

Na kraju ove knjige nalazi se poseban dodatak B s pripremnim zadacima za natjecanja. To su **zadaci** raznih stupnjeva natjecanja iz zemalja koje imaju sličan program nastave kao i Hrvatska. Zbog količine zadataka rješenja nisu dana.

Završni komentar

Zahvaljujem svima koji su doprinjeli ovim materijalima: polaznicima grupe koji su dali svoja mišljenja, kritike, savjete i prijedloge, te Vjekoslavu Kovaču i Tomislavu Pejkoviću na *doniranim* zadacima i sugestijama.

Također se unaprijed zahvaljujem svima koji ukažu na greške, imaju prijedloge ili dodatke koji bi mogli obogatiti ponuđene materijale.

U nadi da će jednog dana izaći slični priručnici za sve razrede srednje škole, svim korisnicima ove knjige želim ugodan rad i čitanje.

Svibanj 2006. Tvrtko Tadić

Izmjene u drugom izdanju

U odnosu na prvo izdanje jedina sadržajna promjena je odjeljak 4.5. o zbrojevima kompleksnih brojeva. Ispravljene su mnoge uočene greške i dodano je nekoliko zadataka i primjera. Neki zadaci i primjeri su dodatno pojašnjeni i ilustrirani novim crtežima. U popis literature su dodani novi naslovi (uglavnom izašli nakon 1. izdanja) te je prošireno kazalo. Izmijenjeno je i dopunjeno izlaganje u odjeljku 3.3. o Cauchyjevoj jednadžbi.

Prosinac 2007. T. T.

`tvrtko.tadic@zg.t-com.hr`
`tvrtko@student.math.hr`

Popis oznaka

Skupovi

OZNAKA	ZNAČENJE
$\mathbb{N}$	skup prirodnih brojeva
$\mathbb{N}_0$	skup nenegativnih cijelih brojeva
$\mathbb{Z}$	skup cijelih brojeva
$\mathbb{Q}$	skup racionalnih brojeva
$\mathbb{R}$	skup realnih brojeva
$\mathbb{R}^+$	skup pozitivnih realnih brojeva
$\mathbb{C}$	skup kompleksnih brojeva
$\lvert A \rvert$	broj elemenata skupa A
$\{a \in X \mid T(a)\}$	skup elemenata a iz skupa X koji zadovoljavaju svojstvo $T(a)$
$\mathbb{Z}[x]$	prsten polinoma s cjelobrojnim koeficijentima
$\mathbb{R}[x]$	prsten polinoma s realnim koeficijentima
$\mathbb{C}[x]$	prsten polinoma s kompleksnim koeficijentima
$\mathcal{P}(A)$	familija svih podskupova skupa A
$\#F$	broj skupova u familiji F

Relacije i operacije

OZNAKA	ZNAČENJE
$A \Rightarrow B$	*A povlači B* ili *ako A onda B*
$A \Leftrightarrow B$	*A je ekivalentno sa B* ili *A ako i samo ako B*
$x := y$	x po definiciji jednako y
$x \to y$	zamjena x sa y
$A \subseteq B$	*A je podskup od B*
$A \setminus B$	skup A bez elemenata skupa B
$A \cap B$	presjek skupova A i B
$A \cup B$	unija skupova A i B
$p \parallel q$	pravac p je paralelan s pravcem q
$\triangle_1 \sim \triangle_2$	trokut $\triangle_1$ je sličan trokutu $\triangle_2$
$f : X \to Y$	funkcija sa skupa X u skup Y
$\Re e(z)$	realni dio kompleksnog broja z
$\Im m(z)$	imaginarni dio kompleksnog broja z

Kratice za natjecanja

KRATICA	ZNAČENJE
ŽUPANIJSKO	županijsko natjecanje u Hrvatskoj
DRŽAVNO	državno natjecanje u Hrvatskoj
OPĆINSKO	općinsko natjecanje u Hrvatskoj
ime države	natjecanje u toj državi (neka razina)
DODATNO	dodatno natjecanje (za izbor olimpijske ekipe) u Hrvatskoj
SAVEZNO	savezno natjecanje u bivšoj Jugoslaviji
MALA OLIMPIJADA	dodatno natjecanje (za izbor o. ekipe) u bivšoj Jugoslaviji
MMO	Međunarodna matematička olimpijada
AIME	Američko pozivno natjecanje
USAMO	Matematička olimpijada SAD-a
APMO	Azijsko pacifička matematička olimpijada
BMO	Balkanska matematička olimpijada
PUTNAM	Sveučilišno natjecanje u SAD-u

Uz mnoge zadatke u ovoj knjizi dodano je i ime autora zadatka (ako je poznato), a uz rješenja ponekad i ime autora rješenja. Tako oznaka

11. (Mediteransko natjecanje 2005., *Vjekoslav Kovač*)

označava natjecanje na kojem se 11. zadatak pojavio i autora zadatka, dok oznake poput

Rješenje. (*Tonći Antunović*)

označava ime osobe čije je rješenje preuzeto.

Ostale oznake

OZNAKA	ZNAČENJE
A-G nejednakost	nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine
A-K nejednakost	nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine
A-H nejednakost	nejednakost između aritmetičke i harmonijske sredine
$\lfloor x \rfloor$	najveći cijeli broj manji ili jednak x
$[x^k]P(x)$	koeficijent uz x^k u polinomu $P(x)$
$\forall x \in A$	za svaki $x \in A$
$\exists x_0 \in A$	postoji $x_0 \in A$
(x_n)	niz $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1} \ldots$
$\sum_{k=1}^{n} a_k$	zbroj $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
[22]	vidi pod [22] u literaturi
■	kraj dokaza
✓	kraj rješenja

Većina oznaka su standardne oznake već duže vremena u upotrebi u Hrvatskoj.

1. Matematička indukcija

Potrebno predznanje

- Osnovno poznavanje matematičke indukcije

Vjerujem da su se do sada već gotovo svi učenici upoznali s matematičkom indukcijom. Mnogi sigurno misle da sve znaju o njoj. No, ovo poglavlje će im omogućiti dublji pogled u matematičku indukciju, te će otkriti da možda ne znaju baš sve. Matematička indukcija je vrlo čest način dokazivanja, no i ona sama ima više različitih formi. Pritom valja imati na umu da indukcija sama po sebi, bez korištenja uvjeta zadatka, neće dovesti do rješenja. Cilj ovog ponavljanja je ovladati matematičkom indukcijom kao korisnim alatom i upoznati se s mnogim njezinim primjenama. Primjeri ovdje dani će pokazati razne (maštovite) načine korištenja matematičke indukcije. Kasnije u knjizi vrlo često ćemo formalni dokaz indukcijom preskakati i zamijeniti izjavom: *lako se pokaže indukcijom* ili *induktivno slijedi*. Zbog toga treba temeljito proći ovu cjelinu.

1.1. Indukcija na prvi način

Ovaj prvi odjeljak samo je ponavljanje onoga s čime su se učenici već dobro upoznali (kako na redovnoj nastavi, tako i izvan nje). Navedeni su neki odabrani primjeri. Pozivam čitatelja da pomno prouči primjere te da prijeđe na sljedeći odjeljak.

Najčešći oblik indukcije s kojim se susrećemo je:

Neka je M neki podskup od $\mathbb{N}_0$, koji ima sljedeća svojstva:

1. $n_0 \in M$;
2. *ako je $n \in M$ tada je $n+1 \in M$.*

tada je $\{x \in \mathbb{N}_0 \mid x \geq n_0\} \subseteq M$.

Gore navedeno zovemo **princip matematičke indukcije** (PMI).

Iz tog principa proizlazi ono što se zove **metoda matematičke indukcije** (MMI).

0. Formulirati tvrdnju indukcije $P(i)$ koju dokazujemo za $i = n_0, n_0 + 1, \ldots$.

1. Dokazati tvrdnju indukcije za $i = n_0$, tj. $P(n_0)$.

2. Dokazati da ako vrijedi $P(k)$ (*pretpostavka indukcije*), onda vrijedi i $P(k+1)$ (*korak indukcije*).

Korak 0. ne mora biti vidljiv na prvi pogled i treba dobro razmisliti po čemu i kako provoditi indukciju.

Korak 1. (tzv. *baza indukcije*) često je trivijalan ali je uvijek **nužan!** Npr. bez baze indukcije lako bismo mogli dokazati sljedeću neistinitu tvrdnju

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n.$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$ tj. da je

$$1 + 2 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k,$$

koristeći ovu pretpostavku dobivamo

$$(1 + 2 + \cdots + 2^{k-1}) + 2^k = 2^k + 2^k = 2^{k+1}.$$

Obično je $n_0 \in \{0, 1\}$, ali može biti i neki drugi broj.

Korak 2. je često najkritičniji, te se u njemu odvija i najveći dio posla.

Sada ćemo se na nekoliko primjera podsjetiti kako koristiti matematičku indukciju. U prvom primjeru najvažniji će nam korak biti pravilno formuliranje tvrdnje koju ćemo dokazati matematičkom indukcijom.

Primjer 1. (Rusija 1971.) Dokaži da za svaki prirodan broj n postoji prirodni broj koji je djeljiv sa 2^n i u čijem se decimalnom zapisu nalaze samo znamenke 1 i 2.

Rješenje. Dokazat ćemo sljedeću tvrdnju:

Postoji n-teroznamenkasti broj koji je djeljiv s 2^n i znamenke su mu samo 1 i 2.

Tvrdnja za $n = 1$ vrijedi jer je 2 takav broj. (Za $n = 2$ takav je broj 12.) Pretpostavimo da je za $n = k$ traženi broj A_k. Za $n = k + 1$ promatrajmo brojeve $10^k + A_k$ i $2 \cdot 10^k + A_k$. Jedan od njih djeljiv je s 2^{k+1}. Naime znamo da je $A_k = 2^k B_k$, a kad podijelimo brojeve kandidate s 2^k dobivamo $5^k + B_k$ i $2 \cdot 5^k + B_k$, od koji jedan mora biti paran. Iz toga slijedi da je jedan od dvaju početnih brojeva djeljiv s 2^{k+1}. ✓

U sljedećem primjeru tvrdnja indukcije je potpuno određena u zadatku, međutim problematična će biti provedba koraka indukcije.

Primjer 2. (Prijedlog za MMO 2001.) Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitivni realni brojevi. Dokaži nejednakost

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \cdots + \frac{x_n}{1+x_1^2+\cdots+x_n^2} < \sqrt{n}.$$

Rješenje. (Tvrtko Tadić) Za $n = 1$ tvrdnja je očita, zapravo vrijedi snažnija nejednakost

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} \leq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq (x_1 - 1)^2.$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$.

Dokažimo da tvrdnja vrijedi za $n = k + 1$. Neka je

$$S = \frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \cdots + \frac{x_{k+1}}{1+x_1^2+\cdots+x_{k+1}^2}$$

i

$$s = \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \cdots + \frac{x_{k+1}}{1+x_1^2+\cdots+x_{k+1}^2}.$$

Tada je $S = \frac{x_1}{1+x_1^2} + s$. Promatrajmo

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x_1^2}}}{\frac{1}{1+x_1^2}} \cdot s = \frac{\frac{x_2}{\sqrt{1+x_1^2}}}{1+\frac{x_2^2}{1+x_1^2}} + \cdots + \frac{\frac{x_{k+1}}{\sqrt{1+x_1^2}}}{1+\frac{x_2^2}{1+x_1^2}+\cdots+\frac{x_{k+1}^2}{1+x_1^2}},$$

tada možemo uvesti supstituciju $y_i = \frac{x_{i+1}}{\sqrt{1+x_1^2}}$ za $i = 1, 2, \ldots, k$, te dobivamo po pretpostavci indukcije

$$\sqrt{1+x_1^2} \cdot s = \frac{y_1}{1+y_1^2} + \frac{y_2}{1+y_1^2+y_2^2} + \cdots + \frac{y_k}{1+y_1^2+\cdots+y_k^2} < \sqrt{k}.$$

Dobivamo $s < \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{1+x_i^2}}$. Odavde slijedi

$$S = \frac{x_1}{1+x_1^2} + s < \frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} + \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{1+x_1^2}}.$$

Preostaje nam pokazati da je $x_1 + \sqrt{k} \leq \sqrt{(k+1)(1+x_1^2)}$, kako su obje strane pozitivne možemo kvadrirati, te je naša nejednakost istovrijedna

$$x_1^2 + 2\sqrt{k}x_1 + k \leq k + 1 + (k+1)x_1^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq (\sqrt{k}x_1 - 1)^2,$$

time smo pokazali da je $S < \dfrac{x_1 + \sqrt{k}}{\sqrt{1+x_1^2}} \leq \sqrt{k+1} = \sqrt{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$ ✓

Komentar. Čitatelj će se vjerojatno zapitati: *Kako ću se ja toga sjetiti?* Rješenje je nastalo na sljedeći način. U drugom koraku se treba zapitati kako iskoristiti pretpostavku? Možemo primijeniti pretpostavku indukcije na prvih $n-1$ pribrojnika, no to nam neće biti od neke koristi. Tada je zgodno pokušati svesti tvrdnju na prethodni slučaj za mali n. U ovom slučaju pogledajmo $n = 3$. Iako se tvrdnja

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \frac{x_3}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2} < \sqrt{3}$$

lako dokaže bez svođenja na slučaj $n = 2$, ona je dobra za shvaćanje općenitijeg dokaza. Kako smo već zaključili da ne možemo ništa ako primijenimo slučaj $n = 2$ na prva dva člana zbroja, možemo pokušati primijeniti to na zadnja dva člana. U tim kombinacijama se može doći do ideje koja je iskorištena u prethodnom rješenju.

U našem zadnjem primjeru zadatak neće odati da ga se može riješiti indukcijom, ali je čest slučaj da se konkretni brojevi $(1997, 2003, 2004, 2007\ldots)$ mogu zamijeniti sa n i pokazati da tvrdnja vrijedi znatno općenitije.

Primjer 3. (Hrvatska 2003., 4. r.) Prirodni brojevi od 1 do 2003 poredani su u niz. Na nizu vršimo ovu operaciju: ako je prvi broj u nizu jednak k, okrenemo poredak prvih k brojeva. Dokaži da se nakon konačno mnogo uzastopnih primjena ove operacije broj 1 pojavi na prvom mjestu bez obzira na početni poredak.

Rješenje. Broj 2003 zamjenit ćemo s n i pokazati da tvrdnja vrijedi u općem slučaju što ćemo dokazati indukcijom.

Za $n = 1$ tvrdnja je očito istinita.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n = k \geq 1$.

Gledajmo slučaj $n = k + 1$. Imamo dvije mogućnosti:

1° Broj $k+1$ je na zadnjem mjestu. Tada se $k+1$ ne može pomaknuti, jer neki broj može doći na $(k+1)$-vo mjesto samo ako se $k+1$ pojavi na prvom mjestu, što je nemoguće. Tada na prvih k brojeva možemo primijeniti pretpostavku indukcije.

2° Broj $k+1$ nije na zadnjem mjestu. U slučaju da tijekom danih operacija $k+1$ dođe na zadnje mjesto primijenimo slučaj 1°. Pretpostavimo da će se $k+1$ uvijek nalaziti između prvog i k-tog mjesta (uključujući i ta dva mjesta). Tada se broj l koji je na zadnjem mjestu, nikada neće pomaknuti s njega jer $k+1$ neće doći na prvo mjesto. Možemo zamijeniti brojeve l i $k+1$ bez utjecaja na daljnje operacije. Ponovno možemo primijeniti induktivnu pretpostavku i 1 staviti na prvo mjesto. ✓

Napomena. U knjizi [62] čitatelj može pronaći kombinatorni dokaz ove tvrdnje.

1.2. Indukcija po k bazi

Promotrimo sljedeću modifikaciju matematičke indukcije.

Dan je podskup M od $\mathbb{N}_0$ i broj $k \in \mathbb{N}$ za tako da vrijedi

1. $n_0 \in M$, $n_0 + 1 \in M$,...,$n_0 + k - 1 \in M$;
2. *ako je* $n \in M$, $n+1 \in M$,...,$n+k-1 \in M$, *tada je* $n + k \in M$;

tada je $\{x \in \mathbb{N}_0 \,|\, x \geq n_0\} \subseteq M$.

Ovu modifikaciju indukcije provodimo na sljedeći način:

0. Formulirati tvrdnju $P(i)$ koju dokazujemo za $i = n_0, n_0 + 1, \ldots$.

1. Dokazati tvrdnje $P(n_0)$, $P(n_0 + 1)$,...,$P(n_0 + k - 1)$

2. Dokazati da ako vrijedi $P(n), \ldots, P(n + k - 1)$, tada vrijedi $P(n + k)$.

Način dokazivanja identičan je onom opisanom u odjeljku 1.1., osim što se u bazi indukcije tvrdnja mora provjeriti za više brojeva.

Primjer 4. Niz (x_n) dan je sa $x_0 = 3$, $x_1 = 4$ i formulom

$$x_{n+1} = x_{n-1}^2 - nx_n$$

za sve $n \in \mathbb{N}_0$. Odredi izraz za x_n.

Rješenje. Kako tvrdnja nije zadana valja ju naslutiti. Pogledajmo tablicu sa prvih par brojeva:

n	0	1	2	3	4	5
x_n	3	4	5	6	7	8

Indukcijom ćemo dokazati da je $x_n = n + 3$.

Za $n = 1, 2$ tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo (za $n = k - 2$ i $n = k - 1$) da je $x_{k-2} = k + 1$ i $x_{k-1} = k + 2$. Slijedi

$$x_k = x_{k-2}^2 - (k-1)x_{k-1} = (k+1)^2 - (k-1)(k+2) = k + 3.$$

Čime smo dokazali tvrdnju za $n = k$, a time i za sve $n \in \mathbb{N}_0$. ✓

Nije uvijek jasno nad čime ćemo provesti indukciju, a u idućem primjeru ćemo to poprilično umjetno napraviti.

Primjer 5. (APMO 2002.) Dokaži da za nenegativne cijele brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vrijedi nejednakost

$$a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_n! \geq (\lfloor A_n \rfloor !)^n,$$

gdje je $A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.

Rješenje. Odaberimo proizvoljni $n \in \mathbb{N}$. Neka je $s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Indukciju ćemo provesti po s_n.

Tvrdnja vrijedi za $s_n = 0, 1, \ldots, n-2, n-1$. Naime tada je $\lfloor A_n \rfloor = 0$, pa je lijeva strana neki prirodan broj, dok je desna strana jednaka $0! = 1$. Tvrdnja očito vrijedi, a jednakost se postiže za $a_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $s_n = k$.

Pokažimo da onda tvrdnja vrijedi za $s_n = k+n$. Promatrajmo sljedeći umnožak

$$P_0 := b_1^{(0)}! \cdot b_2^{(0)}! \cdot \ldots \cdot b_n^{(0)}!,$$

gdje je $b_1^{(0)} + \cdots + b_n^{(0)} = k + n$. Sada provodimo sljedeći postupak:

Neka su $b_{(1)}^{(0)} \leq b_{(2)}^{(0)} \leq \cdots \leq b_{(n)}^{(0)}$ po veličini[1] poredani brojevi $b_1^{(0)}, \ldots, b_n^{(0)}$. Vrijedi

$$P_0 = b_{(n)}^{(0)} \cdot \underbrace{(b_{(n)}^{(0)} - 1)! b_{(n-1)}^{(0)}! \ldots b_{(1)}^{(0)}!}_{P_1}.$$

Sada definiramo $b_1^{(1)} := b_{(1)}^{(0)}, \ldots, b_{n-1}^{(1)} := b_{(n-1)}^{(0)}$ i $b_n^{(1)} := b_{(n)}^{(0)} - 1$. Uočimo da je $b_1^{(1)} + \ldots + b_n^{(1)} = k + n - 1$ i $P_1 = b_1^{(1)}! \cdots b_n^{(1)}!$. Ponavljamo gornji postupak na umnošku P_1 i brojevima $b_1^{(1)}, \ldots, b_n^{(1)}$.

Nakon n puta provođenja ovog postupka dobivamo

$$P_0 = b_{(n)}^{(0)} b_{(n)}^{(1)} \cdot \ldots \cdot b_{(n)}^{(n-1)} \cdot \underbrace{(b_1^{(n)}! \cdot \ldots \cdot b_n^{(n)}!)}_{P_n},$$

u svakom od n koraka vrijedi $b_1^{(l)} + b_2^{(l)} + \ldots + b_n^{(l)} > k$, pa je po Dirichletovom principu $b_{(n)}^{(l)} \geq \lfloor \frac{k}{n} \rfloor + 1 = \lfloor A_n \rfloor$, za $l = 0, 1, \ldots, n-1$.

Kako je $b_1^{(n)} + \cdots + b_n^{(n)} = k$ na P_n možemo primijeniti pretpostavku indukcije

$$P_0 \geq b_m^{(0)} b_m^{(1)} \cdot \ldots \cdot b_m^{(n-1)} \left(\left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor ! \right)^n \geq (\lfloor A_n \rfloor)^n \left((\lfloor A_n \rfloor - 1)! \right)^n = (\lfloor A_n \rfloor !)^n$$

čime smo dokazali tvrdnju za sve s_n. Kako je n bio proizvoljan slijedi tvrdnja zadatka.

Nužan i dovoljan uvjet da se postigne jednakost u slučaju $k \geq n$ je da su $b_{(n)}^{(l)} = \lfloor \frac{k}{n} \rfloor + 1$, što se postiže ako i samo ako su svi $b_i^{(0)}$ međusobno jednaki. ✓

Napomena 1. Postoji i (službeno) rješenje koje ne koristi indukciju.
Napomena 2. Uočimo da smo u primjeru dokaz proveli na sljedeći način: za svaki $n \in \mathbb{N}$ smo dokazali tvrdnju $P_n(s_n)$ indukcijom. (Odabrali smo proizvoljan n.)
Napomena 3. U pretpostavci indukcije mi smo *prešutno* pretpostavili da vrijedi $P_n(k), P_n(k+1), \ldots, P_n(k+n-1)$, no u koraku nam je bilo dovoljno iskoristiti pretpostavku da vrijedi $P_n(k)$.

[1] Kada imamo niz brojeva (podataka) $a_1, a_2, \ldots, a_k$ njihov poredak po veličini (u statistici) često pišemo $a_{(1)}, a_{(2)}, \ldots, a_{(k)}$, gdje je $a_{(1)}$ najmanji, $a_{(2)}$ drugi najmanji,..., $a_{(n)}$ najveći.

1.3. Svi prethodnici

Još jedan oblik matematičke indukcije koji se često koristi je sljedeći:

Ako je M podskup od $\mathbb{N}_0$ koji ima ova svojstva:

1. $n_0 \in M$;
2. *ako je* $n_0 \in M$, $n_0 + 1 \in M, \ldots, n - 1 \in M$ *tada je* $n \in M$ *za svaki* $n \geq n_0$;

tada je $\{x \in \mathbb{N}_0 \mid x \geq n_0\} \subseteq M$.

Ovu modifikaciju indukcije provodimo na sljedeći način:

0. Formulirati tvrdnju $P(i)$ koju dokazujemo za $i = n_0, n_0 + 1, \ldots$.

1. Dokažemo $P(n_0)$.

2. Dokazati ako vrijedi $P(i)$ za sve $i \in \{n_0, \ldots n - 1\}$, tada vrijedi $P(n)$.

Sljedeći zadatak je poopćenje zadatka s državnog natjecanja 2004. godine za 2. razred.

Primjer 6. Žaba skače po točkama cjelobrojne mreže u ravnini počevši od točke $(1, 1)$ po sljedećim pravilima:

(i) iz točke (a, b) žaba smije skočiti u točku $(2a, b)$, odnosno $(a, 2b)$;

(ii) ako je $a > b$, žaba smije skočiti u $(a - b, b)$, a ako je $a < b$, žaba smije skočiti iz (a, b) u $(a, b - a)$.

U koje točke (a, b) žaba može doći, a u koje ne?

Rješenje. Dokazat ćemo da je $\text{nzd}(a, b) = 2^k$ nužan i dovoljan uvjet da bi se iz točke $(1, 1)$ moguće stići u točku (a, b).

Ako se može doći u točku (a, b) iz točke $(1, 1)$ onda je očito $\text{nzd}(a, b) = 2^k$, gdje je $k \in \mathbb{N}_0$.

Neka je $\text{nzd}(a, b) = 2^k$. Provodimo sljedeći postupak

$$\begin{array}{ccccccccccc} (1,1) & \to & (2,1) & \to & (4,1) & \to & \ldots & \to & (2^{k-1},1) & \to & (2^k,1) \\ & \to & (2^k,2) & \to & (2^k,4) & \to & \ldots & \to & (2^k,2^{k-1}) & \to & (2^k,2^k). \end{array}$$

Sada će kretanje žabe biti ograničeno na polja oblika $(2^k \cdot j, 2^k \cdot l)$, $j, l \in \mathbb{N}$. Time smo cijeli problem zapravo sveli na pitanje može li se iz točke $(1, 1)$ doći u točku (a, b), gdje je $\text{nzd}(a, b) = 1$. Pokazat ćemo da je to moguće.

Indukciju provodimo po $\max\{a, b\}$. Za $\max\{a, b\} = 1$ tvrdnja je očita. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $\max\{a, b\} \in \{1, 2, \ldots, k - 1\}$. Dokažimo sada slučaj

kada je $\max\{a,b\} = k$. Neka je $a > b$ (slučaj $b > a$ dokazuje se na isti način). Tada je $a = k$. Promatrajmo dva slučaja:

1° k je paran. Tada se po pretpostavci indukcije može doći do točke $(a/2, b)$ (jer je $a/2 = k/2 < k$). Žabi preostaje da napravi sljedeći korak $(a/2, b) \to (a, b)$.

2° k je neparan. Neka je $b = 2^p \cdot b'$, gdje je b' neparan prirodni broj i $p \in \mathbb{N}_0$. Tada se po pretpostavci indukcije može doći do točke $\left(\frac{a+b'}{2}, b'\right)$ (jer je $b' < \frac{a+b'}{2} < a = k$). Kako bi smo stigli do točke (a, b) provodimo sljedeći postupak

$$\begin{array}{ccccccccc} \left(\frac{a+b'}{2}, b'\right) & \to & (a+b', b') & \to & (a, b') & \to & (a, 2b') & \to \\ \dots & \to & (a, 2^{p-1}b') & \to & (a, 2^p b') & = & (a, b). & \end{array}$$

✓

Primjer 7. (Dodatno natjecanje 2004.) Nađite sve parove prirodnih brojeva (x, y), $x \neq y$ koji zadovoljavaju jednadžbu

$$x(x+y) = y^2 + 1. \qquad (\clubsuit)$$

Rješenje. Promatrajmo rješenja jednadžbe u prirodnim brojevima. Pogledajmo koja rješenja dobivamo za nekoliko vrijednosti od x:

$$\begin{array}{lcccl} x = 1 & \Rightarrow & y^2 - y = 0 & \Rightarrow & y = 1, \\ x = 2 & \Rightarrow & y^2 - 2y - 3 = 0 & \Rightarrow & y = 3, \\ x = 3 & \Rightarrow & y^2 - 3y - 8 = 0 & \Rightarrow & y \notin \mathbb{N}, \\ x = 4 & \Rightarrow & y^2 - 4y - 15 = 0 & \Rightarrow & y \notin \mathbb{N}, \\ x = 5 & \Rightarrow & y^2 - 5y - 24 = 0 & \Rightarrow & y = 8. \end{array}$$

Rješenja su parovi $(1,1)$, $(2,3)$, $(5,8)$ ili (F_1, F_2), (F_3, F_4), (F_5, F_6), gdje F_i označava i-ti Fibonaccijev broj[2]. Sada naslućujemo da je $(x, y) = (F_{2i-1}, F_{2i})$, za svaki $i \in \mathbb{N}$.

Dokažimo da je (F_{2i-1}, F_{2i}) stvarno rješenje jednadžbe. Koristit ćemo indukciju po i. Za $i = 1$ tvrdnja je očita. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $i = k$. Tada za $i = k+1$ dobivamo

$$\begin{aligned} & F_{2k+1}(F_{2k+1} + F_{2k+2}) - F_{2k+2}^2 \\ = \; & F_{2k+1}^2 + F_{2k+2}(F_{2k+1} - F_{2k+2}) \\ = \; & (F_{2k-1} + F_{2k})^2 - F_{2k+2}F_{2k} \\ = \; & F_{2k-1}(F_{2k-1} + F_{2k}) + F_{2k}(F_{2k-1} + F_{2k} - F_{2k+2}) \\ = \; & F_{2k-1}(F_{2k-1} + F_{2k}) - F_{2k}^2 = 1 \end{aligned}$$

Ovo zadnje je po induktivnoj pretpostavci jednako 1. Time smo tvrdnju dokazali za sve $i \in \mathbb{N}$.

[2] Za više o Fibonaccijevim brojevima vidi odjeljak 4.2. ili u knjizi [14].

Dokažimo sada da su to jedina rješenja. To ćemo napraviti indukcijom po x. Uočimo: ako su $x, y \in \mathbb{N}$ rješenja jednadžbe, onda je $x \leq y$. Tvrdnja indukcije glasi:

$P(x)$: *Ako je x takav da jednadžba $x(x+y) = y^2 + 1$ ima rješenje u skupu prirodnih brojeva, tada postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $x = F_{2i-1}$ i $y = F_{2i}$.*

Tvrdnju smo za $x = 1$ dokazali na početku. Pretpostavimo da tvrdnja $P(x)$ vrijedi za sve $x < k$, za neki $k > 1$.

Dokažimo tvrdnju za $x = k$. Ako jednadžba

$$k^2 + ky - y^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 - ky - k^2 + 1 = 0 \tag{1}$$

po y nema rješenja u skupu prirodnih brojeva, onda smo gotovi. Neka postoji rješenje u skupu prirodnih brojeva recimo $y_1 = l$. Tada iz (1) po Vietéovim formulama dobivamo

$$y_1 + y_2 = k \quad \Rightarrow \quad y_2 = k - l = \frac{y_1 y_2}{y_1} = \frac{-k^2 + 1}{l} < 0.$$

Sada je $x_1 = k$ jedno rješenje jednadžbe $x^2 + x(k-l) - (k-l)^2 - 1 = 0$. Po Vietéovim formulama je

$$x_1 + x_2 = l - k \quad \Rightarrow \quad x_2 = l - 2k = \frac{x_1 x_2}{x_1} = \frac{-(k-l)^2 - 1}{k} < 0.$$

Dobili smo: ako je (k, l) rješenje jednadžbe (♣) tada je i $(2k - l, l - k)$ rješenje početne jednadžbe. Kako je $2k - l < k$ po pretpostavci indukcije postoji i takav da je $2k - l = F_{2i-1}$ i $l - k = F_{2i}$ iz čega dobivamo $k = (2k - l) + (l - k) = F_{2i-1} + F_{2i} = F_{2i+1}$ i $l = (l - k) + k = F_{2i} + F_{2i+1} = F_{2i+2}$. Time smo $P(x)$ dokazali za sve $x \in \mathbb{N}$.

Sva rješenja su $(x, y) \in \{(F_{2i+1}, F_{2i+2}) \mid i \in \mathbb{N}\}$. (F_1, F_2) nije rješenje jer se traži $x \neq y$. ✓

1.4. Regresivna indukcija

Ovaj primjer matematičke indukcije je prvi koristio **Cauchy** kako bi dokazao A-G nejednakost (u stranoj literaturi poznatu kao Cauchyjeva[3]). Mnogi učenici koriste A-G nejednakost unatoč tome što je ne znaju dokazati! Postoje mnogi dokazi indukcijom (npr. vidi [45] ili [44]), međutim svi su dosta zahtjevni. Stoga nam u pomoć stiže regresivna indukcija.

O čemu je zapravo riječ? Kod dosadašnjih metoda dokaza uglavnom smo dokazivanje provodili tako da smo išli *korak po korak*, a sada ćemo jedan korak preskočit

[3]Uobičajeno je izbjegavanje ovog naziva za A-G nejednakost zbog druge poznate nejednakosti Cauchy-Schwarz-Bunjakovskog.

i kasnije se vratiti na njega. Tj. kad smo dokazivali tvrdnju prvo smo ju dokazali za $n = 1$, pa za $n = 2, \ldots$ Naše dokazivanje je većinom izgledalo ovako

$$P(1) \Rightarrow P(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow \cdots \Rightarrow P(k-1) \Rightarrow P(k)$$

Međutim pogledajmo sljedeći primjer. Kasnije ćemo iskoristit ideju iz njega.

Primjer 8. Ako su α, β, γ kutovi trokuta onda vrijedi

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Rješenje. Uočimo da je $\sqrt{3}/2 = \sin\pi/3 = \sin(\alpha/3 + \beta/3 + \gamma/3)$. Vrijedi

$$\frac{\sin x + \sin y}{2} \leq \sin\frac{x+y}{2}, \tag{2}$$

za $x, y \in \langle 0, \pi \rangle$, jer nakon primjene formule za zbroj sinusa, nejednakost postaje $\sin(x/2+y/2)(\cos(x/2-y/2)-1) \leq 0$, što je zbog $0 < x+y < 2\pi$ istinito. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\cos(x/2 - y/2) = 1 \Leftrightarrow x = y$. Koristeći nejednakost (2) dva puta dobivamo

$$\frac{\sin x + \sin y + \sin z + \sin w}{4} \leq \frac{\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) + \sin\left(\frac{z+w}{2}\right)}{2} \leq \sin\frac{x+y+z+w}{4}, \tag{3}$$

za sve $x, y, z, w \in \langle 0, \pi \rangle$, gdje jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = y = z = w$. Uvrštavanjem u (3) $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$ i $w = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ dobivamo

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)}{4} \leq \sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right), \tag{4}$$

što postaje nakon sređivanja

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3} \leq \sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right).$$

Kako je $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ (zbroj kutova u trokutu), konačno dobivamo

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3} \leq \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Jednakost vrijedi (zbog uvjeta jednakosti u (3), odnosno (4)) ako i samo ako je $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$, tj. ako je trokut jednakostraničan. ✓

Kao što možemo vidjeti, nismo izravno iz tvrdnje za $n = 2$ dokazali $n = 3$

$$P(2) \Rightarrow P(3),$$

već smo prvo iz $n = 2$ (tvrdnja (2)) dokazali za tvrdnju za $n = 4$ (tvrdnja (3)), onda smo se *spustili* i dokazali tvrdnju za $n = 3$ (traženu tvrdnju)

$$P(2) \Rightarrow P(4) \Rightarrow P(3).$$

Ideja iz ovog primjera je upravo ideja regresivne indukcije. Dokažemo tvrdnju za neke *velike* n i onda *spuštanjem* pokažemo da tvrdnja vrijedi za manje brojeve.

Regresivna indukcija je formulirana ovako:

Neka je M podskup od $\mathbb{N}$ koji ima ova svojstva:

1. *M je beskonačan skup;*
2. *za $m \geq 2$ vrijedi $m \in M \Rightarrow m - 1 \in M$.*

tada je $M = \mathbb{N}$.

Kod dokazivanja to ovako koristimo:

0. Formuliramo tvrdnju $P(i)$.

1. Dokažemo da tvrdnja vrijedi za beskonačno mnogo prirodnih brojeva (ali ne nužno za sve, npr. za brojeve djeljive s 3, potencije broja 2, i sl.)

2. Dokažemo da za proizvoljan prirodan broj $n \geq 2$ vrijedi $P(n) \Rightarrow P(n-1)$.

Kad smo dokazali prvi korak onda za svaki broj n odaberemo broj $t \in M$ takav da je $n < t$. Ako vrijedi **2.** lako se možemo spustiti

$$P(t) \Rightarrow P(t-1) \Rightarrow \cdots \Rightarrow P(t-(t-n)) = P(n).$$

Time smo tvrdnju dokazali za sve $n \in \mathbb{N}$.

Slijedi Cauchyjev dokaz na kojem je prvi put isprobana ova metoda.

Primjer 9. (A-G NEJEDNAKOST) Za $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, +\infty\rangle$ vrijedi

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

<u>*Rješenje*</u>. *(Cauchy)* Za $n = 2$ tvrdnja se svodi na $0 \leq (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2$. Dokažimo da tvrdnja vrijedi za sve $n = 2^k$, gdje je $k \in \mathbb{N}$. Za $k = 1$ tvrdnju smo dokazali. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = 2^k$.

Dokažimo da tvrdnja vrijedi za $n = 2^{k+1}$. Koristeći pretpostavku dobivamo

$$\frac{x_1 + \cdots + x_{2^k}}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_{2^k}}$$

$$\frac{x_{2^k+1} + \cdots + x_{2^{k+1}}}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{x_{2^k+1} \cdot \ldots \cdot x_{2^{k+1}}}$$

Zbrajanjem prethodnih nejednakosti i dijeljenjem sa 2 dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{(x_1+\cdots+x_{2^k})+(x_{2^k+1}\cdot\ldots\cdot x_{2^{k+1}})}{2^{k+1}} &\geq \frac{\sqrt[2^k]{x_1\cdot\ldots\cdot x_{2^k}}+\sqrt[2^k]{x_{2^k+1}\cdot\ldots\cdot x_{2^{k+1}}}}{2}\\ &\geq \sqrt[2^{k+1}]{x_1\cdot\ldots\cdot x_{2^{k+1}}}.\end{aligned}$$

Za posljednju nejednakost smo koristili tvrdnju u slučaju $n=2$.

Dokazali smo da za $n=2^k$ vrijedi tvrdnja zadatka, a takvih brojeva je beskonačno mnogo.

Dokažimo sada da ako tvrdnja vrijedi za prirodan broj $n\geq 2$, onda vrijedi i za $n-1$. Neka vrijedi

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n},$$

tada tvrdnja vrijedi i kada je $x_n=(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})/(n-1)$, te dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}}{n}&\geq\\ &\geq\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_{n-1}\cdot\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}}\end{aligned}$$

transformacijama (dizanjem na n-tu i dijeljenjem sa x_n) dobivamo

$$\left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}\geq x_1\cdot\ldots\cdot x_{n-1}.$$

Time smo dokazali nejednakost. ✓

Napomena. U dijelu 6. navest ćemo dokaz poopćenja A-G nejednakosti (vidi teorem 15.).

Primjer 10. Je li moguće poredati brojeve $1,2,\ldots,2004^{2004}$ u niz tako da se prosjek nikoja dva broja iz tog niza ne nalazi između njih.

Rješenje. Tvrdimo da je brojeve $1,2,\ldots,n$ moguće poredati u niz tako da se prosjek nikoja dva broja iz tog niza ne nalazi između njih.

Prvo ćemo indukcijom dokazati da je tvrdnja istinita za $n=2^k$, za sve prirodne brojeve k. Baza $k=1$ je očita.

Sada pretpostavimo da se (za $k=l$) brojevi $1,2,\ldots,2^l$ mogu poredati u niz $(a_1,a_2,\ldots,a_{2^l})$ tako da je zadovoljen uvjet zadatka. Nije teško uočiti da tada poredak

$$\begin{aligned}&(b_1,b_2,\ldots,b_{2^{l+1}})\\ =\;&(2a_1-1,2a_2-1,\ldots,2a_{2^l}-1,2a_1,2a_2,\ldots,2a_{2^l})\end{aligned}$$

ima tražena svojstva. Zaista prosjek para b_i i b_j za $1 \leq i < j \leq 2^l$ i $2^l + 1 \leq i < j \leq 2^{l+1}$ se po pretpostavci indukcije ne nalazi između njih, a za $1 \leq i \leq 2^l < j \leq 2^{l+1}$ prosjek nije prirodan broj. Time smo tvrdnju dokazali za $k = l + 1$, a time i za sve $k \in \mathbb{N}$.

Za brojeve n koji nisu potencija broja 2, uvijek možemo uzeti m takav da je $n < 2^m$. Tada poredamo brojeve $1, 2, 3, \ldots, 2^m$ na željeni način i sve brojeve veće od n u dobivenom nizu izbrišemo. ✓