1 Realni brojevi

U glagoljici slova služe i za zapis brojeva s tim da se tada ispred i iza slova nacrta kvadratić, a ponekad se nad slovom nacrta i vitica.

Prvi matematički udžbenik na hrvatskom jeziku, tiskan u Zagrebu 1758. godine

Upitamo li nekoga tko nije matematičar, ili mu matematika barem nije osobito bliska, čime se bavi ta znanost, vjerojatno će odgovoriti — brojevima. *Premda odgovor baš i nije točan, on nije neobičan, jer prva iskustva s matematikom u svakog su čovjeka vezana uz brojeve i računanje. A i ne baš tako davno matematičke su se početnice zvale* Računice.

Osnovna svojstva skupova prirodnih, cijelih, racionalnih i realnih brojeva poznata su nam iz osnovne škole.

1.1. Skup prirodnih i skup cijelih brojeva

Prirodni i cijeli brojevi

Prirodnim se brojevima služimo kad brojimo ili prebrojavamo. Prirodni broj je odgovor na pitanje: *koliko članova ima neki konačni skup?*

Skup prirodnih brojeva

Skup **prirodnih brojeva** označavamo s $\mathbf{N}$.

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots\}.$$

U skupu prirodnih brojeva postoji najmanji broj, to je broj 1. Ne postoji najveći prirodni broj; *od ma kako velikog prirodnog broja postoji još veći*. Iz ove činjenice proistječe da je *skup prirodnih brojeva beskonačan.*

S prirodnim brojevima računamo. Zbrajamo ih, oduzimamo, množimo i dijelimo. Zbroj dvaju prirodnih brojeva prirodan je broj. No razlika dvaju prirodnih brojeva nije uvijek prirodan broj. To nije slučaj kad od manjeg oduzimamo veći broj. (Navedi nekoliko primjera!)

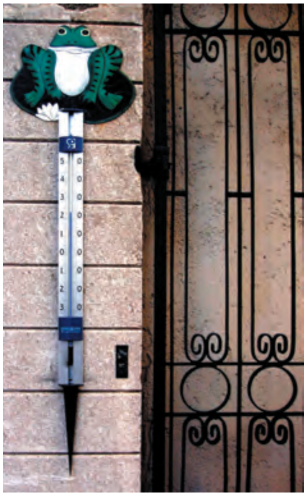
Da bi oduzimanje prirodnih brojeva uvijek bilo izvedivo, skup $\mathbf{N}$ proširuje se negativnim cijelim brojevima i nulom. Tako dobivamo skup cijelih brojeva.

Skup cijelih brojeva

Skup cijelih brojeva označavamo sa $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Negativnim brojem zapisuje se temperatura ispod ništice, visina vodostaja koja je manja od uobičajene, manjak u poslovanju itd.



Pokušajte odgovoriti na sljedeća pitanja:

Ako se temperatura zraka podigne sa $-9\,°C$ na $2\,°C$, kolika je promjena?

Kolika je promjena temperature ako se živa u termometru spusti sa $-1\,°C$ na $-8\,°C$?

A kolika je promjena ako se živa u termometru spusti sa $2\,°C$ na $-11\,°C$?

Primjer 1.

Pri jakoj buri pojačava se osjećaj studeni pa naše tijelo hladnoću doživljava većom no što ona to uistinu jest. Tako za temperature zraka od $5°$ C uz vjetar brzine 20 m/s subjektivno osjećamo temperaturu od $-3°$ C, dakle nižom za $8°$ C. A pri istoj temperaturi zraka uz orkansku buru od 50 m/s (180 km/h) umanjenje je $13°$ C, spušta se dakle na $-8°$.

Slično, pri vožnji na motoru već kod brzine od 40 km/h, pri vanjskoj temperaturi zraka od $0°$ C vozač osjeća temperaturu umanjenu čak i do $-15°$ C.

Zadatak 1.

Što znači da je *dopušteni minus na tekućem računu* 4 000 kn?

Ako netko na tekućem računu ima 2 100 kuna, a treba podmiriti račun od 3 520 kuna, koliko će *ući u minus*?

Zadatak 2.

Mrtvo more je jezero površine 600 km^2. Nadmorska visina njegove površine iznosi -418 metara. Dno jezera doseže do -794 m. Kolika je najveća dubina Mrtvog mora?

Zadaci 1.1.

1. **1)** Zapiši prirodni broj koji neposredno slijedi iza prirodnog broja n.

2) Zapiši prirodni broj koji neposredno prethodi prirodnom broju $n-2$. Kad zadatak ima rješenje?

3) Zapiši broj koji je za 2 veći od zbroja brojeva m i n.

4) Zapiši broj koji je dvostruko veći od razlike brojeva a i b.

5) Zapiši broj koji je tri puta manji od umnoška brojeva a i b.

2. Ispiši:

1) sve cijele brojeve koji su između cijelih brojeva $k-1$ i $k+5$;

2) sve neparne cijele brojeve koji su veći od $2k-1$ i manji od $2k+7$, gdje je k cijeli broj;

3) sve parne cijele brojeve veće od $2k-5$ i manje od $2k+1$, gdje je k cijeli broj.

3. Zamisli neki broj. Dodaj mu 1 pa zbroj pomnoži s 4. Zatim oduzmi 4 pa dobiveni rezultat podijeli s 4. Koji je broj rezultat?

Ponovi ovaj postupak nekoliko puta. Što primjećuješ? Obrazloži!

4. Neka je d dan, a m mjesec rođenja tvojeg prijatelja. Evo kako ćeš odrediti kojeg je dana njegov rođendan. Zadaj mu neka provede sljedeći račun:

— *Podvostruči broj* d.
— *Pomnoži dobiveni rezultat s 10.*
— *Dodaj 73.*
— *Pomnoži s 5.*
— *Dodaj broj* m.

Neka ti sada prijatelj kaže rezultat koji je dobio. Oduzmi krišom od tog rezultata broj 365 i dobit ćeš datum njegovog rođenja.

Obrazloži matematičku pozadinu ovog općeg rješenja.

5. Odredi četiri uzastopna prirodna broja kojima je zbroj jednak $1\,258$.

6. Zbroj pet uzastopnih parnih prirodnih brojeva jednak je $6\,080$. Koji su to brojevi?

7. Zbroj sedam uzastopnih neparnih prirodnih brojeva jednak je 581. Koji su to brojevi?

8. Koja je posljednja znamenka umnoška
$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 99?$$

9. S koliko nula završava umnožak $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 33$?

10. Koja je posljednja znamenka umnoška prvih stotinu prostih brojeva?

11. Izračunaj:

1) $88 : 2 + 4 \cdot 11$;
2) $33 + 11 \cdot (-4) : 2$;
3) $15 \cdot 4 - 3 \cdot (-9)$;
4) $100 - 99 : 3 \cdot (-3)$;
5) $64 - 5 \cdot (-12) : 10$;
6) $47 + 57 : (-3) + 16$;
7) $95 : 19 - 4 \cdot (-11)$;
8) $75 : 15 - 10 \cdot (-7)$;
9) $55 : (-11) - 4 \cdot 15$;
10) $48 : 8 \cdot (-6) + 1$.

1.2. Skup racionalnih brojeva

Zbroj i razlika dvaju cijelih brojeva cijeli su brojevi. I umnožak dvaju cijelih brojeva cijeli je broj. No količnik dvaju cijelih brojeva općenito nije cijeli broj. Da bi dijeljenje cijelih brojeva bilo općenito izvedivo, skup cijelih brojeva se proširuje. Uvode se racionalni brojevi.

Racionalni su brojevi količnici cijelih brojeva. Zapisujemo ih obično u obliku razlomaka, te je

$$1 : 2 = \frac{1}{2}, \quad -3 : 4 = \frac{-3}{4}, \quad 111 : 25 = \frac{111}{25}, \quad 7 : (-33) = \frac{7}{-33}.$$

Dijeljenje s nulom nije izvedivo pa u nazivniku razlomka ne smije biti nula.

Skup racionalnih brojeva

Skup **racionalnih brojeva** označavamo s $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \; : \quad a, b \in \mathbf{Z}, \quad b \neq 0 \right\}.$$

Ako bismo proveli razlomkom $\frac{a}{b}$ naznačeno dijeljenje, dobili bismo **decimalni zapis** istog racionalnog broja.

Tako je, primjerice:

$$-\frac{1}{2} = -1 : 2 = -0.5; \qquad \frac{3}{4} = 3 : 4 = 0.75; \qquad -\frac{5}{8} = -5 : 8 = -0.625.$$

Svi su ovi primjeri **konačni decimalni brojevi**. Znamo, dakako, i za drukčije primjere:

$$\begin{aligned} \frac{3}{7} &= 3 : 7 = 0.428571428571428571\ldots; \\ \frac{1}{3} &= 1 : 3 = 0.333333333333333\ldots; \\ -\frac{10}{11} &= -10 : 11 = -0.9090909090909090\ldots. \end{aligned}$$

Ovdje je riječ o racionalnim brojevima kojima je decimalni prikaz **beskonačan decimalni broj**.

Ako je decimalni zapis racionalnog broja beskonačan, onda možemo uočiti kako se skupina znamenki uzastopce ponavlja. U prvom primjeru tu skupinu čini šest znamenki, u drugom samo jedna, u trećem dvije.

Kažemo da su ti decimalni brojevi **beskonačni i periodični**. Skupinu znamenki koja se ponavlja iza decimalne točke zovemo **period**.

Pri zapisu beskonačnih periodičnih decimalnih brojeva nad prvom i posljednjom znamenkom perioda stavljamo točkicu:

$$\frac{3}{7} = 0.\dot{4}2857\dot{1}; \quad \frac{1}{3} = 0.\dot{3}; \quad -\frac{10}{11} = -0.\dot{9}\dot{0}.$$

Primjer 1.

Koja je znamenka na 1001. mjestu iza decimalne točke u decimalnom zapisu broja $\frac{3}{7}$?

Vidjeli smo da je $\frac{3}{7} = 0.\dot{4}2857\dot{1}$, tj. uzastopce se ponavlja skupina od 6 znamenki. Podijelimo li 1001 sa 6, dobit ćemo količnik 166 i ostatak 5. Stoga će se skupina od 6 navedenih znamenki izredati 166 puta i potom će slijediti još pet znamenki. Zaključujemo da je 1001. po redu znamenka 7.

Zadatak 1.

Koja je znamenka na 333. mjestu iza decimalne točke u decimalnom prikazu racionalnog broja $\frac{5}{13}$?

Jednakost racionalnih brojeva

Racionalni brojevi $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ jednaki su ako i samo ako je umnožak $a \cdot d$ jednak umnošku $b \cdot c$:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \cdot d = b \cdot c.$$

Primjer 2.

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}, \quad \text{jer je } 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6.$$

$$\frac{-45}{-108} = \frac{5}{12}, \quad \text{jer je } -45 \cdot 12 = 5 \cdot (-108).$$

$$\frac{-4}{7} = \frac{-20}{35} \quad \text{jer je } (-4) \cdot 35 = (-20) \cdot 7.$$

$$\frac{101}{110} \neq \frac{1001}{1010} \quad \text{jer je } 101 \cdot 1010 \neq 110 \cdot 1001.$$

Prema ovim primjerima vidimo da je količnik dvaju negativnih cijelih brojeva pozitivan racionalan broj. Tako je na primjer $\frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$. Za količnik brojeva različitog predznaka slijedi onda: $\frac{-2}{5}=\frac{2}{-5}$, jer je $(-2)\cdot(-5)=2\cdot 5$. Oba broja, i $\frac{-2}{5}$ i $\frac{2}{-5}$ zapisujemo kao $-\frac{2}{5}$, te su takvi brojevi negativni racionalni brojevi:

$$\frac{-2}{5}=\frac{2}{-5}=-\frac{2}{5}.$$

Zapis racionalnog broja

Svaki racionalni broj moguće je zapisati u obliku razlomka $\frac{m}{n}$, gdje je m cijeli, a n prirodni broj.

Kraćenje i proširivanje razlomaka

Iz definicije jednakosti racionalnih brojeva izravno proistječe i sljedeća jednakost, koja vrijedi za svaki racionalni broj $\frac{a}{b}$ i svaki broj m različit od nule:

$$\boxed{\frac{a\cdot m}{b\cdot m}=\frac{a}{b}.}$$

Naime, jednakost racionalnih brojeva izravno slijedi iz jednakosti $(a\cdot m)\cdot b=a\cdot(b\cdot m)$.

Tu istaknutu jednakost možemo čitati dvostrano. Čitamo li je s lijeva u desno, tada govorimo o **kraćenju razlomaka**.

Primjer 3.

Skratimo razlomak $\frac{210}{1155}$.

Rastavimo brojeve 210 i 1155 na proste faktore:

$210=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7,\qquad 1155=3\cdot 5\cdot 7\cdot 11.$ Sada imamo

$$\frac{210}{1155}=\frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 11}=\frac{2}{11}.$$

Zadatak 2. Skrati razlomke: $\frac{91}{117}$; $\frac{220}{462}$; $\frac{123\,123}{234\,234}$.

Ako jednakost $\dfrac{a \cdot m}{b \cdot m} = \dfrac{a}{b}$ *čitamo* s desna u lijevo tada kažemo da smo razlomak $\dfrac{a}{b}$ **proširili** brojem m koji je različit od nule.

Proširivanje razlomaka primjenjuje se u raznim zadacima, od kojih su najčešći uspoređivanje razlomaka, njihovo zbrajanje i oduzimanje.

Primjer 4.

Poredajmo po veličini brojeve:

$$a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{19}{24}, \quad c = \frac{5}{8}, \quad d = \frac{7}{12}, \quad e = \frac{5}{6}.$$

Proširivanjem će svaki od navedenih razlomaka u nazivniku imati 24:

$$a = \frac{16}{24}, \quad b = \frac{19}{24}, \quad c = \frac{15}{24}, \quad d = \frac{14}{24}, \quad e = \frac{20}{24}.$$

Kako je razlomkom zapravo naznačeno dijeljenje brojeva, onda, uz jednak nazivnik, od dva je razlomka veći onaj koji ima veći brojnik. Tako poredani po veličini, od najmanjeg do najvećeg, zadani brojevi čine niz d, c, a, b, e.

Zadatak 3.

Poredaj po veličini brojeve:

$$a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{11}{15}, \quad c = \frac{23}{30}, \quad d = \frac{5}{6}, \quad e = \frac{7}{10}.$$

Algebarske operacije s racionalnim brojevima

Pri zbrajanju racionalnih brojeva razlomke svodimo na zajednički nazivnik. U tu svrhu možemo uzeti umnožak nazivnika kao zajednički nazivnik:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Računajući ovako, uvijek ćemo dobiti ispravan rezultat, ali brojnik i nazivnik dobivenog razlomka vrlo često će se moći skratiti:

$$\frac{5}{6} + \frac{3}{8} = \frac{5 \cdot 8 + 3 \cdot 6}{6 \cdot 8} = \frac{58}{48} = \frac{29}{24}.$$

Jednostavniji se račun dobiva ako za zajednički nazivnik odaberemo *najmanji zajednički višekratnik* dvaju nazivnika. U ovom primjeru za zajednički nazivnik možemo uzeti $V(6, 8) = 24$:

$$\frac{5}{6} + \frac{3}{8} = \frac{5 \cdot 4 + 3 \cdot 3}{24} = \frac{29}{24}.$$

Oduzimanje racionalnih brojeva vršimo na analogan način.

Zbrajanje i oduzimanje racionalnih brojeva

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}.$$

Prisjetimo se još definicije umnoška i količnika racionalnih brojeva:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Posebno, primijetimo da vrijedi

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{a\cdot b}{b\cdot a}=1.$$

Broj $\frac{b}{a}$ nazivamo **recipročnim brojem** broja $\frac{a}{b}$ i označavamo s

$$\frac{b}{a}=\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}.$$

Dakle, recipročni broj zadanog racionalnog broja ima zamijenjen brojnik i nazivnik. Primijetimo da je

$$\frac{b}{a}=1:\frac{a}{b}.$$

Dijeljenje racionalnih brojeva zato se svodi na množenje recipročnim brojem:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

Količnik se može zapisati u obliku dvojnog razlomka:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}.$$

Pritom a i d nazivamo vanjskim, a b i c unutarnjim članovima dvojnog razlomka. Ovo pamtimo kao pravilo: *razlomci se dijele tako da se umnožak vanjskih članova podijeli umnoškom unutarnjih.*

Zadatak 4. Izračunaj: **1)** $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$; **2)** $0.8\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{9}\cdot 0.6$.

Zadaci 1.2.

1. Za koje su cijele brojeve a brojevi $\frac{1}{a}$, $\frac{a+2}{a(a-3)}$, $\frac{a}{2a-10}$, $\frac{a+2}{a^2-4}$ racionalni?

2. Za koje je cijele brojeve n razlomak $\frac{6}{n-1}$ cijeli broj?

3. Odredi sve cijele brojeve n za koje je razlomak $\frac{n+2}{n-2}$ cijeli broj.

4. Odredi prirodni broj x tako da vrijede jednakosti:

1) $\frac{x}{12}=\frac{2}{3}$; **2)** $\frac{4}{x}=\frac{2}{5}$; **3)** $\frac{3}{7}=\frac{x}{21}$.

5. Za koji cijeli broj x vrijedi:

1) $\frac{1}{5}=\frac{x}{20}$; **2)** $\frac{x}{6}=-\frac{1}{3}$; **3)** $-\frac{x}{24}=\frac{5}{6}$?

6. Skrati razlomke:

$\frac{105}{168}$, $\frac{1155}{5775}$, $\frac{6\,930}{12\,870}$, $\frac{3\,333\,333}{5\,555\,555}$, $\frac{135\,135}{234\,234}$.

7. Ako je $a=0.\dot{3}$, $b=0.25$, koliko je $\frac{1}{a}$, a^2, $a+b$, $a\cdot b$, $\frac{a}{b}$?

— ◆ —

8. Izračunaj:

1) $\left(1.6-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-2\frac{1}{4}\right)-0.2:\left(-\frac{4}{5}\right)$;

2) $\left(\frac{4}{5}-1.8\right):\left(-1\frac{4}{5}\right)+0.1\cdot\left(-\frac{5}{9}\right)$;

3) $\left[\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\left(1+\frac{2}{3}\right)\right]:\left[\left(0.75-\frac{2}{3}\right):1.25-1\right]$;

4) $\left[\frac{3}{5}-1.2\left(1+1\frac{1}{2}\right)\right]:\left[\left(2.5-\frac{2}{5}\right):\frac{7}{8}-3\right]$.

9. Izračunaj:

1) $\dfrac{3\frac{4}{25}+0.59}{\left(\frac{3}{4}-0.15\right):4}$; **2)** $\dfrac{\frac{7}{24}:0.125+3.5}{\frac{2}{3}-0.25}$.

10. Izračunaj:

1) $\left(\dfrac{0.75}{1\frac{2}{3}-1.2}:\dfrac{3+1\frac{1}{2}}{1.4}\right)\cdot\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}$;

2) $\left(\dfrac{0.875}{3.2-1\frac{1}{3}}:\dfrac{3+\frac{3}{4}}{1.2}\right)\cdot\dfrac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{4}}$.

11. Izračunaj x iz sljedećih jednakosti, primjenjujući svojstva osnovnih računskih operacija s racionalnim brojevima:

1) $(5-0.2):(3.3-x)=12$;

2) $(184+x):\frac{32}{5}=(2x-48):2.4$;

3) $1:\left(3\frac{4}{5}-0.8x\right)=55:(x+4)$;

4) $1.2-(0.8+x)=-3.6$;

5) $1.1-(5x+5.5)=11.1$;

6) $12\cdot(0.22-x)=-1.44$;

7) $-1.2\cdot(0.3+x)=-3.6$;

8) $\dfrac{10}{[(8x+24):5]:4+6}=1$;

9) $208:\left[112-\dfrac{(100-3x)\cdot 4}{23}\right]=2$;

10) $\dfrac{(x-11.875):\frac{5}{8}}{0.625\cdot\frac{8}{25}-2\frac{1}{5}}=1$;

11) $\left[\dfrac{(145-24x):5}{29}+24\right]:5=5$;

12) $\dfrac{3\frac{4}{15}}{(5.5+x):21\frac{3}{7}}-1\frac{3}{8}=5.625$.

— ◆ —

12. Razlomke $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{15}{16}$ prikaži u obliku decimalnog broja.

13. Brojeve 0.5, 0.25, 0.125, 0.75, 0.625 prikaži u obliku razlomka.

14. Poredaj po veličini brojeve: $\frac{2}{3}$, 66%, 0.666, $0.\dot{6}$.

15. Ako je $\frac{1}{3} = 0.\dot{3}$, koliko je $\frac{1}{30}$?

Ako je $\frac{2}{7} = 0.\dot{2}8571\dot{4}$, koliko je $2\frac{6}{7}$?

16. Odredi period u decimalnom zapisu racionalnog broja:

1) $\frac{5}{6}$; **2)** $\frac{3}{11}$; **3)** $\frac{5}{13}$; **4)** $\frac{6}{7}$.

17. Koja se znamenka nalazi na 101. mjestu iza decimalne točke u decimalnom zapisu svakog od četiriju brojeva iz prethodnog zadatka?

18. Odredi 303. znamenku u dec. zapisu broja $\frac{15}{37}$.

19. Odredi 777. znamenku u dec. zapisu broja $-\frac{111}{11}$.

20. Odredi 1500. znamenku u dec. zapisu broja $\frac{3}{13}$.

21. Broj 135 podijeli na dva dijela koji su u omjeru $7:8$.

22. Ako je $3x : 5y = 7 : 11$, koliko je $x : y$?

23. Ako su veličine kutova u trokutu u omjeru $1:3:4$, koliki je najveći kut trokuta?

24. Ako su a, b i c duljine stranica trokuta i ako je $a:b = 5:4$, $a:c = 3:5$, a opseg trokuta iznosi 156 cm, kolika je duljina najkraće stranice ovog trokuta?

25. Broj 2 400 podijeli na tri dijela koji su u omjeru $3:5:8$.

26. Broj 697 podijeli na tri dijela, a, b i c tako da je $a:b = 3:4$ i $b:c = 3:5$.

27. Opseg oranice iznosi 2 800 metara. Kolike su duljina i širina oranice, ako su u omjeru $5:9$?

28. Za 1.5 sat napuni se 0.3 obujma bazena. Koliko treba vremena da bi se napunilo 0.9 obujma bazena?

29. Nakon 12 minuta gorenja duljina svijeće smanji se s 30 cm na 25 cm. Nakon koliko će vremena svijeća dogorjeti?

30. Ako su od 70 proizvoda 3 s greškom, koliko se proizvoda s greškom može očekivati u 840?

ZA RADOZNALE

PRIČA O NULI

Nula, naoko ništa neobično, broj kao i svaki drugi! No, je li uistinu tako? Pogledajmo ove jednakosti:

$a + 0 = a$, $a \cdot 0 = 0$, $a - a = 0$, $a^0 = 1$.

S nulom se ne smije dijeliti, učimo još u osnovnoj školi. A zašto? Iz $\frac{a}{0} = b$ slijedi $a = b \cdot 0$, pa imamo ove dvije mogućnosti:

(1) ako je $a = 0$, onda je $0 = b \cdot 0$ i ta je jednakost ispunjena za svaki broj b. Dakle, dijeljenje je tada neodređeno. Rezultat dijeljenja je bilo koji broj b;

(2) ako je $a \neq 0$, jednakost $a = b \cdot 0$ nije ispunjena niti za jedan broj b. Naime, s njezine lijeve strane je broj različit od nule, a s desne nula. U ovom slučaju dijeljenje nije definirano.

Nula je cijeli broj. Ona nije prirodan broj **po definiciji**. Njezin je naziv latinskog podrijetla (nullus = nijedan), a prvi se put kao simbol pojavljuje u indijskoj matematici 6. stoljeća.