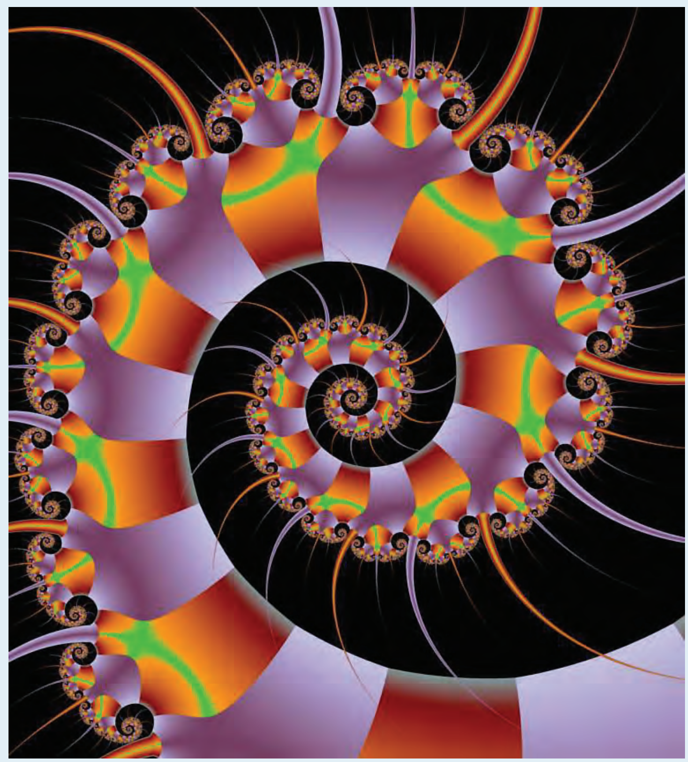
1 Skup kompleksnih brojeva



Sigurno se pitate kakve veze ova slika ima s matematikom. . .

Sigurno se pitate kakve veze s matematikom ima slika na naslovnoj strani ovog poglavlja? Kakve veze ta slika ima uopće s brojevima? Na slici je jedan ***fraktal****, a fraktali imaju i te kakve veze s matematikom, posebice s kompleksnim brojevima o kojima će biti riječi u ovom poglavlju.*

Primjene kompleksnih brojeva danas su vrlo raširene u raznim područjima znanosti. No razina na kojoj ćemo se mi baviti kompleksnim brojevima ne dopušta nam jasniji uvid u te primjene. Naše učenje o tim novim brojevima biti će skromno, a motivirano je rješavanjem kvadratne jednadžbe, koje će uslijediti neposredno iza, u II. poglavlju.

1.1. Što su kompleksni brojevi?

Što su kompleksni brojevi?

Prije nego li odgovorimo na ovo izravno pitanje, prisjetimo se kako smo tijekom učenja matematike stigli od prirodnih do realnih brojeva.

Prirodni brojevi su brojevi $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$. Tim brojevima iskazujemo rezultat brojenja ili prebrojavanja. Skup prirodnih brojeva označava se s $\mathbf{N}$.

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

Navedimo osnovna svojstva skupa $\mathbf{N}$.

U skupu $\mathbf{N}$ postoji namanji broj, broj 1. Ne postoji najveći prirodni broj. Od ma kako velikog prirodnog broja postoji još veći. Dovoljno je bilo kojem prirodnom broju dodati 1 i već smo dobili broj koji je od njega veći. Ovaj zoran opis uvjerava nas da je skup prirodnih brojeva beskonačan.

S prirodnim brojevima računamo; zbrajamo ih, oduzimamo, množimo, dijelimo. Zbroj svaka dva prirodna broja prirodan je broj. No već kod oduzimanja to ne vrijedi. Razlika dvaju prirodnih brojeva je prirodan broj ako od većeg oduzimamo manji broj. Ali ako od manjeg oduzimamo veći, razlika nije prirodan broj. Želimo li da oduzimanje bude izvedivo i u ovom, drugom slučaju, moramo uvesti nove brojeve. Moramo *proširiti* skup $\mathbf{N}$ brojem nula i negativnim brojevima.

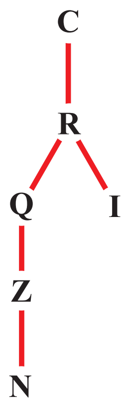
Skup cijelih brojeva sadrži sve prirodne brojeve, nulu i sve negativne cijele brojeve. Taj skup označavamo sa $\mathbf{Z}$ te je

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

U skupu cijelih brojeva nema niti najmanjeg, niti najvećeg broja.

Zbrajanjem ili oduzimanjem bilo koja dva cijela broja dobit ćemo cijeli broj. Ali dijeljenjem dvaju cijelih brojeva općenito ne dobivamo cijeli broj. To je razlog za uvođenje **racionalnih brojeva.**

Racionalni su brojevi omjeri cijelih brojeva a često ih zapisujemo u obliku razlomka. Racionalni su brojevi u svojem decimalnom zapisu konačni ili, ako su beskonačni, onda su periodični.



I konačno, vidjeli smo kako niti racionalni brojevi ne zadovoljavaju sve zahtjeve koje postavljaju razni zadaci. Tako se neki brojevi, kao što su primjerice $\sqrt{2}$ ili π ne mogu zapisati u obliku omjera dvaju cijelih brojeva. Prvi je od njih duljina dijagonale kvadrata kojemu je duljina stranice jednaka 1, a drugi je omjer opsega i duljine promjera bilo kojeg kruga. Ti brojevi nisu racionalni, oni su **iracionalni**.

Iracionalni brojevi su beskonačni neperiodični decimalni brojevi. I skup iracionalnih brojeva je beskonačan.

Skup **realnih brojeva** je unija skupova racionalnih i iracionalnih brojeva. Drugim riječima skup realnih brojeva sadrži sve racionalne (a time onda i prirodne i cijele) i sve iracionalne brojeve.

Novi problem otvara se pri rješavanju kvadratne jednadžbe. Već jednostavna jednadžba kao što je primjerice jednadžba $x^2+1=0$ nema rješenja u skupu realnih brojeva. Zašto? Lako je obrazložiti: Za svaki realni broj x broj x^2+1 je pozitivan.

Želimo li da jednadžba $x^2+1=0$ ima rješenja, naslućujete li kako se postupa? Valja proširiti skup realnih brojeva, uvesti nove, **kompleksne brojeve**.

Najprije uvedimo broj i, **imaginarnu jedinicu**. To je broj čiji je kvadrat jednak -1.

Imaginarna jedinica

Imaginarna jedinica je broj čiji je kvadrat jednak -1:

$$i^2=-1.$$

Umnožak realnog broja i imaginarne jedinice zove se **imaginarni broj**.

Brojevi $3i$, $\frac{1}{4}i$, $-\sqrt{5}i$, $0.1i$ primjeri su imaginarnih brojeva.

Kompleksni broj je zbroj realnog i imaginarnog broja. Brojevi $1+2i$, $3-i$, $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}i$, $\sqrt{3}-5i$ primjeri su kompleksnih brojeva.

Općenito, kompleksni broj zapisujemo u obliku

$$z=a+bi.$$

Pritom se realni broj a zove **realni dio**, a realni broj b **imaginarni dio** kompleksnog broja z. Pišemo $a=\operatorname{Re} z$, $b=\operatorname{Im} z$.

Primjer 1.

Odredimo realni i imaginarni dio svakog od danih kompleksnih brojeva:

1) $z_1 = 2 + 3i$; **2)** $z_2 = -1 - i$;

3) $z_3 = 0.1i$; **4)** $z_4 = -5$.

1) $\operatorname{Re} z_1 = 2$, $\operatorname{Im} z_1 = 3$; **2)** $\operatorname{Re} z_2 = -1$, $\operatorname{Im} z_2 = -1$;

3) $\operatorname{Re} z_3 = 0$, $\operatorname{Im} z_3 = 0.1$; **4)** $\operatorname{Re} z_4 = -5$, $\operatorname{Im} z_4 = 0$.

Primijetimo da je broj -5 kompleksan broj, jer je $-5 = -5 + 0 \cdot i$. Jednako je tako i svaki drugi realni broj kompleksan broj. To je svakako važno naglasiti jer je skup kompleksnih brojeva proširenje skupa realnih brojeva ili, drugim riječima, svi su realni brojevi i kompleksni brojevi.

Zadatak 1.

Popuni sljedeću tablicu:

z	$1+3i$	$-2+i$	0.2	$\frac{3}{4} - \frac{1}{2}i$	$1+\sqrt{3}$	$-10i$
$\operatorname{Re} z$						
$\operatorname{Im} z$						

Kompleksni brojevi

Kompleksni broj je broj oblika

$$z = x + yi,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se **realni dio** kompleksnog broja z, a broj y **imaginarni dio** kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Zapis $z = x + yi$ zovemo **algebarski** ili **standardni prikaz** kompleksnog broja.

Skup kompleksnih brojeva označavamo $\mathbf{C}$.

Jednakost kompleksnih brojeva

Nakon što smo uveli kompleksne brojeve, valja uvesti kriterij po kojem će se ti brojevi razlikovati. Bolje rečeno, postavlja se pitanje kada su dva kompleksna broja jednaka?

Prirodno je prihvatiti sljedeću definiciju:

Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako je realni dio prvog jednak realnom dijelu drugog i ako je imaginarni dio prvog jednak imaginarnom dijelu drugog.

Jednakost kompleksnih brojeva

Neka su z i w kompleksni brojevi. Tada vrijedi:

$$z = w \iff \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w \quad \text{i} \quad \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w.$$

Primjer 2.

U svakom od tri sljedeća zadatka odredimo realne brojeve a i b za koje vrijede jednakosti:

1) $(a-1)+(b+1)i = 2+3i$; **2)** $a+1-3i = -1+bi$;

3) $a+b+3i = 1-(a-b)i$; **4)** $a-2i = b+2i$.

1) Iz uvjeta jednakosti kompleksnih brojeva izravno slijedi: $a-1=2$ i $b+1=3$. Odatle dobivamo $a=3$, $b=2$.

2) Postupamo kao u rješenju prethodnog zadatka i dobijemo $a=-2$, $b=-3$.

3) Izjednačavanjem realnih dijelova dvaju brojeva dobijemo jednadžbu $a+b=1$, a izjednačavanjem imaginarnih dijelova imamo $a-b=-3$. Iz sustava tih dviju jednadžbi slijedi $a=-1$, $b=2$.

4) Uočavamo da su imaginarni dijelovi kompleksnih brojeva različiti; imaginarni dio prvoga je -2, a drugoga 2. Zbog toga jednakost nije ispunjena ni za koje vrijednosti realnih brojeva a i b.

Zadatak 2.

Za koje realne brojeve a i b vrijede jednakosti:

1) $a+(b-1)i = 3-2i$;

2) $1-ai = 2+bi$;

3) $a-3+5i = -1+(b+2)i$.

Povijesni kutak

KAKO SU NASTALI KOMPLEKSNI BROJEVI

Spektakularna otkrića, kakva su česta u nekim znanostima, u matematici su prava rijetkost. Matematička znanja nastaju i sazrijevaju u dugotrajnom procesu kroz naporan rad mnogih matematičara pa se zbog toga gotovo nikad ne pripisuju pojedincu. Tako je i s poviješću kompleksnih brojeva. Kad su nastali? Tko ih je otkrio? Premda neki povjesničari matematike drže kako pojava ideje o kompleksnim brojevima seže sve do Herona Aleksandrijskog, ipak se danas njihovo otkriće pripisuje talijanskim matematičarima iz XVI. stoljeća, a osobito Tartagliai i Cardanu. Oni su riješili opću algebarsku jednadžbu trećeg stupnja $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Formule kojima se rješava takva jednadžba zovu se *Cardanove formule*.

Tartaglia

Cardano

Naziv *imaginaran broj* uveo je René Descartes.

No sve ono što je vezano uz kompleksne brojeve i što ih je u matematici dovelo u "ravnopravan položaj" s realnim brojevima ipak je stvoreno u XVIII. stoljeću, pri čemu su Abraham de Moivre i Leonhard Euler imena koja valja posebno istaknuti.

Priča je zaokružena povezivanjem kompleksnih brojeva i geometrije, pri čemu je osobito zaslužan Carl Friedrich Gauss.

Danas su poznate vrlo vrijedne primjene kompleksnih brojeva u raznim primijenjenim znanostima.

Na pitanje završava li s kompleksnim brojevima priča o brojevima, odgovor je "ne". Ona ima svoj nastavak u daljnjim proširenjima skupa kompleksnih brojeva. Ali o tome (možda) na nekom drugom mjestu i u neko kasnije doba.

Zadaci 1.1.

1. Odredi realni i imaginarni dio svakog od kompleksnih brojeva:

1) $z = 5 + 2i$; **2)** $z = 1 - 3i$;

3) $z = -\dfrac{1}{2}i$; **4)** $z = \sqrt{2}$;

5) $z = \dfrac{2-3i}{3}$; **6)** $z = 1 - \sqrt{2} + i\sqrt{3}$.

2. Odredi realne brojeve a i b iz jednakosti:

1) $a + 4i = -2 + bi$;

2) $a - b + 5i = 1 + (a + b)i$;

3) $2a - 3b + (a + b)i = a + 2b + (3a + 1)i$.

3. Odredi realne brojeve x i y iz jednakosti:

1) $x + (y - 1)i = -1 + 3i$;

2) $2x + y - yi = 1 + i$;

3) $x - y + (x + y)i = 2 + 4i$;

4) $x - 2y + (2x - y)i = 3i$;

5) $2x - 3y + (x - y)i = -1$.

4. Gdje je greška u računu:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$$
$$= i \cdot i = -1?$$

1.2. Zbrajanje i množenje kompleksnih brojeva

Kako se računa s kompleksnim brojevima? Kako odrediti zbroj, razliku i umnožak dvaju kompleksnih brojeva? Kako dijeliti kompleksne brojeve?

Primjer 1.

Neka su dani kompleksni brojevi $z = 2+3i$ i $w = 1-4i$. Izračunajmo zbroj $z + w$, razliku $z - w$ i umnožak $z \cdot w$ tih brojeva. Dijeljenje odložimo za malo kasnije.

S kompleksnim brojevima računamo kao s algebarskim izrazima pri čemu, kad brojeve množimo, uzimamo u obzir da je $i^2 = -1$.

Tako je: $z + w = 2 + 3i + 1 - 4i = 3 - i$.

Nadalje je $z - w = 2 + 3i - (1 - 4i) = 2 - 1 + 3i + 4i = 1 + 7i$.

I konačno imamo: $z \cdot w = (2+3i)(1-4i) = 2-8i+3i-12i^2 = 14-5i$.

Zbroj, razlika i umnožak kompleksnih brojeva

Ako su $z = a + bi$ i $w = c + di$ bilo koja dva kompleksna broja, tada zbrajanje, oduzimanje i množenje definiramo na sljedeći način:

$$z + w = a + c + (b + d)i,$$
$$z - w = a - c + (b - d)i,$$
$$z \cdot w = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Zadatak 1. Izračunaj zbroj, razliku i umnožak kompleksnih brojeva z i w, ako je:

1) $z = 1 + 3i$, $w = 2 - 5i$; **2)** $z = 4 - 3i$, $w = 2 - i$.

Zadatak 2. Ako je $z = 1 - 2i$, $w = 3 - i$, izračunaj:

1) $(z + w)^2$; **2)** $z^2 - w^2$; **3)** $z^2w - zw^2$.

Potencije imaginarne jedinice

Množimo li nekoliko kompleksnih brojeva pojavit će se i više potencije imaginarne jedinice.

Izračunajmo primjerice $(1 + i)^3$:

$$(1 + i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3.$$

Koliko je i^3? Računamo: $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$. Tako je konačno: $(1+i)^3 = -2+2i$.

Izračunajmo još nekoliko uzastopnih potencija imaginarne jedinice:

$$\begin{aligned}
&i^2 = -1,\\
&i^3 = -i,\\
&i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1,\\
&i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i,\\
&i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1,\\
&i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i,\\
&i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1, \ldots
\end{aligned}$$

Uočavamo kako se vrijednosti ponavljaju pri čemu se uzastopce izmjenjuje četvorka i, -1, $-i$, 1.

Kako ćemo izračunati vrijednost neke više potencije? Koliko je, primjerice, i^{111}?

Podijelimo najprije 111 sa 4. Dobit ćemo količnik 27 i ostatak 3. Drugim riječima $111 = 4 \cdot 27 + 3$. Sada pišimo:

$$i^{111} = i^{4\cdot 27+3} = i^{4\cdot 27} \cdot i^3 = (i^4)^{27} \cdot i^3 = 1^{27} \cdot i^3 = i^3 = -i.$$

Slično je:

$$i^{1234} = i^{4\cdot 308+2} = (i^4)^{308} \cdot i^2 = 1 \cdot i^2 = -1.$$

$$i^{537} = i^{4\cdot 134+1} = (i^4)^{134} \cdot i = 1 \cdot i = i.$$

Uočite kako je za vrijednost potencije bitan ostatak što ga dobijemo pri dijeljenju eksponenta s 4. Taj ostatak može biti jednak 0, 1, 2 ili 3.

Postupamo dakle na sljedeći način: eksponent n potencije i^n podijelimo s 4. Ostatak je broj k pa je $i^n = i^k$. I još jednom naglasimo kako je k jedan od brojeva 0, 1, 2 ili 3.

Zadatak 3. Izračunaj vrijednosti sljedećih potencija kojima je baza imaginarna jedinica:

1) i^{123}; **2)** i^{66}; **3)** i^{505}; **4)** i^{888}.

Potencije imaginarne jedinice

Neka je k prirodan broj. Tada za potencije imaginarne jedinice vrijedi:

$$i^{4k} = 1; \quad i^{4k+1} = i; \quad i^{4k+2} = -1; \quad i^{4k+3} = -i.$$

Primjer 2.

Izračunajmo zbroj $1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{101}$.

Imamo 102 pribrojnika, prvi je broj 1, ostali su pribrojnici uzastopne potencije imaginarne jedinice, njih 101.

Uočimo kako je zbroj svake četiri uzastopne potencije imaginarne jedinice jednak 0. To nije teško niti dokazati jer je

$$i^{4k}+i^{4k+1}+i^{4k+2}+i^{4k+3}=1+i-1-i=0.$$

Zbrajamo li $1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{101}$ unatraške, u svakoj od ukupno 25 skupina imat ćemo po četiri potencije čiji je zbroj jednak nuli i ostat će samo prva dva pribrojnika. Rezultat je jednak $1+i$.

Zadatak 4.

Izračunaj:

1) $i+i^3+i^5+i^7+\ldots+1^{101}$; **2)** $i+i^4+i^7+i^{10}+\ldots+i^{100}$.

Primjer 3.

Izračunajmo umnožak: $i\cdot i^3\cdot i^5\cdot i^7\cdot\ldots\cdot i^{101}$.

U ovom umnošku imamo 51 faktor, to su uzastopne neparne potencije imaginarne jedinice. Umnožak svakih dviju uzastopnih neparnih potencija imaginarne jedinice jednak je 1. Naime, vrijedi:

$$i^{4k+1}\cdot i^{4k+3}=i\cdot i^3=i\cdot(-i)=-i^2=-(-1)=1.$$

Od 51 faktora umnožak svaka dva uzastopna jednak je 1 pa ostaje na kraju još samo i^{101}. Kako je $i^{101}=i$, to je ujedno i rezultat zadatka.

Zadatak 5.

Izračunaj:

1) $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4\cdot\ldots\cdot i^{33}$; **2)** $i^2\cdot i^4\cdot i^6\cdot i^8\cdot\ldots\cdot i^{1\,000}$.

Primjer 4.

Koliki je imaginarni dio kompleksnog broja $z=(1+i)^{100}$?

Kvadrat kompleksnog broja $1+i$ imaginaran je broj. Provjerimo:

$$(1+i)^2=1+2i-1=2i.$$

Dakle je $z=(1+i)^{100}=(2i)^{50}=2^{50}\cdot i^{50}=2^{50}\cdot(-1)$.

Zaključujemo: $\operatorname{Im} z=0$.

Zadatak 6.

Izračunaj:

1) $\operatorname{Re}(1+i)^{10}$; **2)** $\operatorname{Im}(1-i)^{20}$.

Zadaci 1.2.

1. Izračunaj $z+w$, $z-w$ i $z\cdot w$ ako je:

1) $z=3-4i$, $w=4-3i$;
2) $z=1-5i$, $w=2-4i$;
3) $z=1-10i$, $w=1+10i$;
4) $z=-7+5i$, $w=8+11i$;
5) $z=-8-3i$, $w=4+5i$;
6) $z=-6+5i$, $w=-5+6i$.

2. Izračunaj $z+w$, $z-w$ i $z\cdot w$ ako je:

1) $z=-\frac{1}{2}+i$, $w=1-\frac{1}{3}i$;
2) $z=-2+3i$, $w=2+i$;
3) $z=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}i$, $w=\frac{3}{4}+\frac{1}{3}i$;
4) $z=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}i$, $w=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}i$;
5) $z=-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}i$, $w=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}i$.

3. Izračunaj $z+w$, $z-w$, $z\cdot w$, z^2 i w^2 ako je:

1) $z=1-2i$, $w=3-i$;
2) $z=-3+5i$, $w=4-7i$;
3) $z=11-5i$, $w=-7-i$.

4. Izračunaj:

1) $(1+i)^2$; **2)** $(1-2i)^2$; **3)** $(2-i)^2$;
4) $(1+2i)^3$; **5)** $(3+2i)^3$; **6)** $(i+2)^3$;
7) $(1-i)^4$; **8)** $(2+i)^4$.

5. Izračunaj:

1) $(1-i\sqrt{2})(\sqrt{2}-i)$;
2) $(\sqrt{3}-i)(1+i\sqrt{3})$;
3) $(\sqrt{2}-i)(\sqrt{3}+2i)-(\sqrt{3}+i)(\sqrt{2}-i)$.

6. Izračunaj:

1) $(1-i)(2-i)(3-i)$;
2) $(1+i)(1+2i)(1+3i)$;
3) $\left(\frac{1}{2}-i\right)(1+2i)\left(1-\frac{1}{2}i\right)(2+i)$.

7. Izračunaj:

1) $(1-i)^2\cdot(2-i)^2\cdot(3-i)^2$;
2) $(1-i)^2\cdot(1-2i)^2\cdot(1-3i)^2$;
3) $(1+i)^3\cdot(1+2i)^3\cdot(1+3i)^3$;
4) $(1+2i)^3\cdot(2-i)^3\cdot(1+3i)^3\cdot(3-i)^3$.

8. Dani su kompleksni brojevi $z=-5+8i$ i $w=7-11i$. Odredi realni i imaginarni dio brojeva

1) z^2-w^2; **2)** $(z-w)^2$; **3)** z^2+w^2.

— ◆ —

9. Brojevi $z_1=3+4i$ i $z_2=3-4i$ rješenja su jednadžbe $z^2-6z+25=0$. Provjeri.

10. Brojevi $z_1=2-3i$ i $z_2=2+3i$ rješenja su jednadžbe $z^2-4z+13=0$. Provjeri.

11. **1)** Provjeri je li kompleksni broj $z=1-2i$ rješenje jednadžbe $(1+i)z^2-(3+i)z+4+2i=0$.
2) Je li kompleksni broj $z=1+i$ rješenje jednadžbe $(1+i)z^2-(3+i)z+4+2i=0$?

12. Provjeri jesu li brojevi $z_1=1+i$ i $z_2=2+i$ rješenja jednadžbe $z^2-(3+2i)z+1+3i=0$.

— ◆ —

13. Odredi realne brojeve x i y iz jednakosti:

1) $(x+yi)(1-i)=3-i$;
2) $(2-3i)(x+yi)=13$;
3) $(1+2i)(x+yi)=i$.

14. Ako je $z=1+i$, $w=2+i$, odredi realne brojeve x i y tako da bude

$$x\cdot z+y\cdot w=z\cdot w.$$

15. Dani su kompleksni brojevi $z=3-i$ i $w=1-2i$. Odredi realne brojeve x i y tako da vrijedi jednakost:

$$x\cdot z+y\cdot w=z\cdot w.$$

16.* Riješi sustave jednadžbi:

1) $$\begin{cases} z+2w=1+i, \\ 3z+iw=2-3i; \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} 2z+w=7i, \\ zi+w=-1. \end{cases}$$

17. Izračunaj:

1) i^{11}; **2)** i^{22};
3) i^{44}; **4)** i^{321};
5) i^{1111}; **6)** i^{1010}.

18. Koliko je:

1) $1+i^3+i^6+i^9+i^{12}+i^{15}$;
2) $i^{111}+i^{222}+i^{333}+\ldots+i^{999}$.

19. Dokaži da za svaki cijeli broj k vrijedi:

1) $i^k+i^{k+1}+i^{k+2}+i^{k+3}=0$;
2) $i^k\cdot i^{k+1}\cdot i^{k+2}\cdot i^{k+3}=-1$.

20. Koristeći se činjenicama iz prethodnog zadatka izračunaj:

1) $i+i^2+i^3+\ldots+i^{303}$;
2) $i\cdot i^2\cdot i^3\cdots i^{303}$.

21. Koliko je $i^{2k-1}+i^{2k+1}$, $k\in\mathbf{Z}$?
Koristeći se dobivenim rezultatom izračunaj:

$$i+i^3+i^5+\ldots+i^{111}.$$

22. Koliko je $i^{2k}+i^{2k+2}$, $k\in\mathbf{Z}$?
Koristeći se dobivenim rezultatom izračunaj:

$$i^2+i^4+i^6+\ldots+i^{100}.$$

Izračunaj:

23. **1)** $i^2\cdot i^5\cdot i^8\cdot\ldots\cdot i^{101}$;
2) $i\cdot i^4\cdot i^7\cdot i^{10}\cdot\ldots\cdot i^{103}$.

24. **1)** $1-i+i^2-i^3+\ldots+i^{100}-i^{101}$;
2) $1+i-i^2+i^3-i^4+\ldots-i^{100}+i^{101}$.

25. **1)** $1-2i+3i^2-4i^3+\ldots-100i^{99}+101i^{100}$;
2) $i+2i^2+3i^3+4i^4+\ldots+100i^{100}$.

TOČNO-NETOČNO PITALICE

Koje su od sljedećih tvrdnji točne a koje netočne? Odgovori i odgovor obrazloži.

1. Imaginarna jedinica je broj čiji je kvadrat jednak -1. T N

2. Realni dio kompleksnog broja $-i$ je jednak -1. T N

3. Imaginarni dio kompleksnog broja $1-i^3$ jednak je 1. T N

4. $i^{1+2+3+4+5}=-i$. T N

5. Vrijednost potencije i^{2k} je jednaka 1 za svaki cijeli broj k. T N

6. Jednakost $a+i=b+i$ ispunjena je ako i samo ako je $a=b$. T N

7. Ako je $(1-2i)(2-i)=a+bi$, onda je $a=0$ i $b=-5$. T N

8. Broj $2+i$ rješenje je jednadžbe $x^2+4x+5=0$. T N