5 Eksponencijalne i logaritamske funkcije

Cijena rabljenog automobila ovisi o više čimbenika. . .

Cijena rabljenog automobila ovisi o više čimbenika od kojih je najbitniji godina proizvodnje. Svake godine njegova se vrijednost umanjuje za 25% u odnosu na prethodnu.

Ako je nov automobil stajao 15 000 eura, kolika mu je cijena nakon 5 godina?

Označimo s $C_0 = 15\,000$ *cijenu novog automobila.*

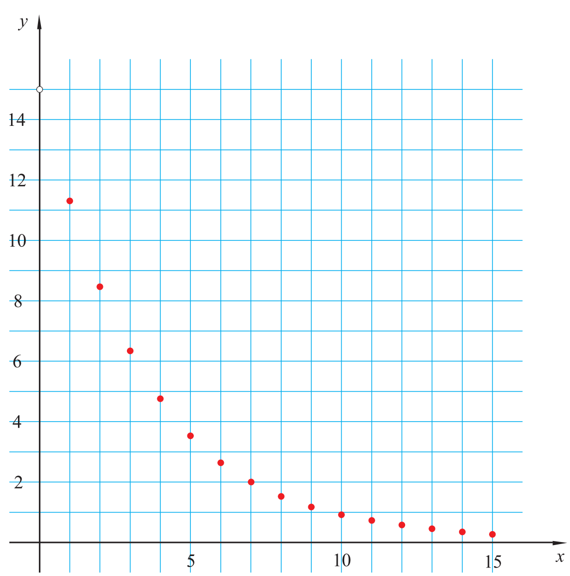
Nakon godinu dana cijena se umanji za 25% *i iznosi* $C_1 = C_0 - C_0 \cdot 0.25 = C_0(1 - 0.25) = C_0 \cdot 0.75 = 11\,250$ *eura.*

Nakon još jedne godine automobilu cijena ponovo padne za 25% *i iznosi* $C_2 = C_1 - C_1 \cdot 0.25 = C_1(1 - 0.25) = C_1 \cdot 0.75 = C_0 \cdot (0.75)^2 = 8\,437.5$ *eura.*

Analogno, nakon 3 godine vrijednost automobila je jednaka $C_3 = C_0 \cdot (0.75)^3 = 6\,328$ *eura. Računamo dalje a čitav račun možemo prikazati pregledno sljedećom tablicom:*

Nakon godina	*Vrijednost auta*
0	15 000
1	11 250
2	8 438
3	6 328
4	4 746
5	3 560

Prikažimo i grafički pad vrijednosti automobila ovisno o njegovoj starosti. Na os apscisu nanosimo vrijeme, na os ordinatu cijenu u tisućama eura. Što primjećujemo? Cijena puno brže pada na početku, prvih godina, a što je auto stariji njezino je umanjenje gotovo zanemarivo.



Cijena automobila funkcija je vremena i možemo je zapisati u sljedećem obliku:

$$C_n = C_0 \cdot (0.75)^n.$$

Pritom je C_0 *cijena novog automobila, a* C_n *cijena istog automobila nakon* n *godina.*

Naravno, ima smisla pitati se o cijeni automobila i nakon 3.5 godine ili nakon 75 mjeseci i slično, jer jedna je godina ipak dugo razdoblje u životu automobila.

Pad vrijednosti rabljenog automobila tek je jedan primjer eksponencijalne funkcije, a postoje i mnogi drugi, vrlo realni i praktični primjeri.

Kakva su očekivanja o duljini životnog vijeka neke zdrave osobe? Kojom se brzinom širi neka zarazna bolest? Koliko se komaraca može očekivati u nekom području sljedećeg ljeta? Koliko vremena treba alkoholiziranom vozaču da bude sposoban za vožnju? Što znači da je neki potres jačine 5 stupnjeva po Richterovoj skali?

Odgovore na ovakva pitanja moći ćemo dati nakon što pobliže upoznamo spomenutu eksponencijalnu, ali i njoj blisku logaritamsku funkciju.

5.1. Eksponencijalna funkcija

Potencije i njihova svojstva

Eksponencijalna funkcija i razumijevanje njezinih svojstava zahtijevaju dobro poznavanje potencija i računa s potencijama. Zbog toga ponovimo taj dio gradiva prvog razreda.

Ako je $a > 0$ realan, a n prirodan broj, onda je

$$\begin{aligned} a^2 &= a \cdot a, \\ a^3 &= a \cdot a \cdot a, \\ &\vdots \\ a^n &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}. \end{aligned}$$

Uzima se da je $a^1 = a$.

Broj a je **baza**, a broj n **eksponent** potencije a^n.

Iz definicije neposredno slijede ova osnovna svojstva potencija:

(E₁) $\quad a^x \cdot a^y = a^{x+y},$

(E₂) $\quad (a^x)^y = a^{x \cdot y},$

(E₃) $\quad (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x.$

Potom smo uveli potencije čiji je eksponent negativan cijeli broj

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$

pri čemu je $a > 0$ i $n \in \mathbf{N}$.

Nadalje, uz primjenu svojstva **(E$_1$)** vrijedi:

$$a^0 = a^{n-n} = a^n \cdot a^{-n} = a^n \cdot \frac{1}{a^n} = 1.$$

Ovo ćemo važno svojstvo potencija također posebno istaknuti:

$$\textbf{(E}_4\textbf{)} \qquad a^0 = 1\,.$$

Potenciranje pozitivnog broja a recipročnim brojem prirodnog broja n povezali smo korijenom broja a:

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}\,.}$$

Zatim smo uveli pojam potencije čija je baza a pozitivan broj, a eksponent bilo koji racionalan broj. Ako je $x = \dfrac{m}{n}$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, tada stavljamo:

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Računanje s ovakvim potencijama posjeduje sva svojstva **E$_1$–E$_4$**.

Tako smo definirali potenciju a^x za sve pozitivne brojeve a te racionalne brojeve x.

Zadatak 1. Zapiši u obliku potencije:

$$\sqrt{10}; \quad \sqrt[3]{3}; \quad \sqrt[4]{50}; \quad \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \frac{1}{\sqrt[3]{9}}; \quad \frac{1}{\sqrt[4]{8}}\,.$$

Zadatak 2. Zapiši u obliku korijena sljedeće potencije:

$$4^{\frac{1}{3}}; \quad 3^{\frac{1}{4}}; \quad 3^{-\frac{1}{2}}; \quad 2^{-\frac{2}{3}}; \quad 9^{\frac{2}{3}}; \quad 0.1^{-\frac{1}{2}}; \quad 0.2^{0.2}; \quad 3^{-1.5}\,.$$

Primjer 1.

Izračunajmo $\dfrac{0.01^{-1.5} \cdot \sqrt{10}}{0.001^{-\frac{1}{2}}}$.

Svaka od triju potencija u brojevnom izrazu može se prikazati kao potencija s bazom 10. Učinimo to:

$$\frac{0.01^{-1.5} \cdot \sqrt{10}}{0.001^{-\frac{1}{2}}} = \frac{(10^{-2})^{-1.5} \cdot 10^{\frac{1}{2}}}{(10^{-3})^{-\frac{1}{2}}}.$$

Primijenimo zatim pravila za računanje s potencijama pa imamo:

$$(10^{-2})^{-1.5} \cdot 10^{\frac{1}{2}} \cdot (10^{-3})^{\frac{1}{2}} = 10^3 \cdot 10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{-\frac{3}{2}} = 10^2 = 100.$$

Zadatak 3. Obrazloži sljedeće dvije jednakosti:

1) $4^{-0.75}+8^{-\frac{1}{6}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$; **2)** $\sqrt{12}\cdot\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[6]{12}=12$.

Zadatak 4. Izračunaj vrijednost brojevnog izraza $\left[\left(a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{4}}\right)^{3}:\left(a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}\right]^{-3}$ ako je $a=\frac{1}{2}$, $b=16$.

Primjer 2.

Kineski je zid najveća građevina što ju je stvorio čovjek. Dugačak je 6352 km, a po nekim pretpostavkama bio je čak 500 km dulji, no taj je dio s vremenom uništen. Gradnja zida započela je u 5. st. prije Krista, a završena je negdje u 17. stoljeću.

Kad se želi istaknuti kako je zid golem, često se čuje da je to jedina građevina na Zemlji koja se vidi i s Mjeseca. No je li to uistinu tako?

Usporedimo promatranje zida s Mjeseca s promatranjem vlasi kose s neke udaljenosti d.

Zemlja je od Mjeseca udaljena oko $4\cdot10^8$ metara. Kineski zid je širok 5-8 metara. U računu uzmimo da je 8 metara. Sada zamislimo da s udaljenosti d promatramo vlas kose čiji je promjer $8\cdot10^{-5}$ metara.

Zapisat ćemo omjer:

$$4\cdot10^8 : 8 = d : 8\cdot10^{-5}.$$

Slijedi $d=\dfrac{4\cdot10^8\cdot8\cdot10^{-5}}{8}=4\cdot10^3$ metara.

Tvrdnja da se Kineski zid vidi s Mjeseca jednaka je dakle tvrdnji da vlas kose prostim okom vidimo s udaljenosti od 4 km.

Eksponencijalna funkcija

Ako je a zadana baza, $a > 0$ i $a \neq 1$, a x bilo koji racionalan broj, onda vrijednost potencije a^x ovisi o x. Možemo govoriti o funkciji koja racionalnom broju x pridružuje vrijednost potencije a^x,

$$x \mapsto a^x.$$

Definicija te funkcije može se proširiti i na realne brojeve te je za svaki realni broj x definirana funkcija

$$f(x) = a^x,$$

koju zovemo **eksponencijalna funkcija**.

Primjer 3.

Funkcija $f(x) = 3^x$ primjer je eksponencijalne funkcije. Za realni broj x vrijednost funkcije jednaka je 3^x.

Tako je

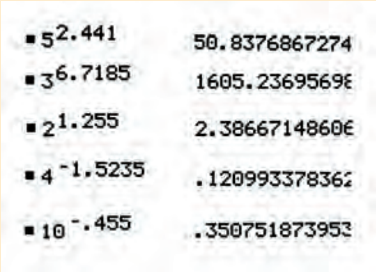
$$f(3) = 3^3 = 27, \qquad f(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{9}, \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

U svakom od triju primjera umjesto x uvrštavali smo samo probrane brojeve. Jer općenito, bez pomoći džepnog računala ili tablica nije moguće izračunavati vrijednosti potencije 3^x.

Koliko je, primjerice, $f\left(\frac{3}{5}\right)$? Odnosno, koliko je $3^{\frac{3}{5}}$?

$$3^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{3^3} = \sqrt[5]{27}.$$

Vrijednosti funkcije $f(x) = a^x$ računaju se na znanstvenom džepnom kalkulatoru na sljedeći način:



Nakon unošenja baze funkcije, broja a, pritisnemo tipku x^y i unesemo vrijednost eksponenta. Pritiskom tipke za znak jednakosti dobijemo vrijednost potencije, odnosno funkcije.

Na nekim džepnim računalima umjesto tipke x^y treba pritisnuti tipku $\wedge$, a ima i drugih rješenja.

Jednostavno sada nalazimo i $3^{\frac{3}{5}} = 3^{0.6} \approx 1.933182045$.

Zadatak 5. Provjeri: $2^{8.55} = 374.8059382$; $3^{4.5678} = 151.1452375$; $5^{6.725} = 50\,184.92497$; $10^{4.3355} = 21\,652.09879$; $8^{-2.2255} = 9.776271049 \cdot 10^{-3}$; $4^{-1.2345} = 0.180616299$.

Eksponencijalna funkcija

Neka je $a > 0$ i $a \neq 1$ realan broj. Funkcija $f(x) = a^x$ definirana za svaki realni broj x zove se **eksponencijalna funkcija**.

Zašto se zahtijeva da baza potencije bude pozitivan broj? Ako bismo dopustili da je baza negativan broj, tada potencije kao što su, primjerice, $(-2)^{-\frac{1}{4}}$, $(-3)^{\frac{3}{8}}$ i slične ne bi bile realni brojevi.

Ako bi pak baza bila jednaka nuli, tada bi vrijedilo $0^x = 0$ za svaki realni broj x osim za $x = 0$, kada ta potencija nije definirana.

Jednako tako je $1^x = 1$ za svaki realni broj x. Dakle, funkcija $f(x) = 1^x = 1$ je konstanta pa je zbog toga uvedeno i ograničenje $a \neq 1$.

Zadatak 6. Ako je dana eksponencijalna funkcija $f(x) = 4^x$, koliko je: $f(2)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(-\frac{3}{2}\right)$, $f(0)$, $f(0.25)$?

Neka je baza eksponencijalne funkcije $a > 1$.

Tada za svaki pozitivan racionalni eksponent $x > 0$ vrijedi $a^x = a^{\frac{m}{n}} > 1$. Naime, $a^x = \sqrt[n]{a^m}$, a kako je $a^m > 1$, onda je i $\sqrt[n]{a^m} > 1$.

Uzmimo da je $x_1 < x_2$. Uz primjenu svojstva $\mathbf{E}_1$ imamo:

$$a^{x_2} = a^{(x_2 - x_1) + x_1} = a^{x_2 - x_1} \cdot a^{x_1} > a^{x_1},$$

jer je $x_2 - x_1 > 0$ i $a^{x_2 - x_1} > 1$.

Time smo dokazali:

Ako je $a > 1$, onda za racionalne brojeve $x_1 < x_2$ vrijedi $a^{x_1} < a^{x_2}$.

Analogno bismo dokazali: ako je $0 < a < 1$, onda za racionalne brojeve $x_1 < x_2$ vrijedi $a^{x_1} > a^{x_2}$.

Imamo dakle i sljedeće *svojstvo monotonosti eksponencijalne funkcije*:

(E$_5$) 1) Ako je $a > 1$, onda za racionalne brojeve $x_1 < x_2$ vrijedi $a^{x_1} < a^{x_2}$.
2) Ako je $0 < a < 1$, onda za racionalne brojeve $x_1 < x_2$ vrijedi $a^{x_1} > a^{x_2}$.

Zadaci 5.1.

1. Zapiši u obliku potencije s bazom 10:

1) 100^3; **2)** $1\,000^2$; **3)** 0.01^4;
4) 0.001^4; **5)** 0.1^{-2}; **6)** 0.01^{-3}.

2. Zapiši u obliku potencije s bazom 2:

1) 8^{-2}; **2)** 0.25^{-3}; **3)** 0.125^4;
4) 16^{-3}; **5)** 32^4; **6)** 0.5^{-5}.

3. Zapiši u obliku potencije s bazom 5:

1) 25^{-4}; **2)** 0.2^6; **3)** 125^{-3};
4) 0.04^4; **5)** 625^{-2}; **6)** 0.2^{-5}.

4. Zapiši u obliku potencije s bazom 10:

1) $1\,000^2 \cdot 100^4$; **2)** $(10^2)^3 \cdot 100^2$;
3) $1\,000^3 \cdot 0.1^5$; **4)** $0.01^{-3} \cdot 0.001^3$;
5) $100^{-4} \cdot 0.01^{-5}$; **6)** $0.1^{-5} \cdot 0.01^{-4} \cdot 0.001^{-3}$.

5. Izračunaj:

1) $(-125)^{-3} \cdot (-25)^{-4}$;
2) $(-4)^{-4} \cdot (-8)^{-3}$;
3) $(-9)^{-3} : \left(-\frac{1}{27}\right)^{-3}$;
4) $(-0.1)^{-4} : (-100)^{-3}$;
5) $-10^{-3} \cdot (-0.1^{-2})^3 \cdot (-0.01^{-3})^{-2}$;
6) $-\frac{1}{100^{-2}} \cdot \frac{1}{0.01^3} \cdot \frac{10^{-2}}{0.001^2}$.

6. Provedi naznačene računske operacije i rezultat izrazi u znanstvenom zapisu:

1) $9.1 \cdot 10^{-5} + 5.2 \cdot 10^{-5}$;
2) $6.9 \cdot 10^8 + 7.8 \cdot 10^9$;
3) $3.5 \cdot 10^{-4} \cdot 7.6 \cdot 10^{-4}$;
4) $5.5 \cdot 10^{-4} \cdot 9.2 \cdot 10^{-5}$;
5) $7.4 \cdot 10^8 : 1.2 \cdot 10^{11}$;
6) $6.6 \cdot 10^{-10} : 4.4 \cdot 10^{-15}$.

7. Ova knjiga je otisnuta s rezolucijom od 2400 točaka po inču. Koliko točaka ima na stranici dimenzije 20×24 cm? Izrazi rezultat u znanstvenom zapisu.

8. Za koliko će vremena svemirski broj koji putuje brzinom od $1.5 \cdot 10^5$ km/ s prijeći put od $4.5 \cdot 10^{12}$ km?

9. Brzina svjetlosti je $3 \cdot 10^8$ metara u sekundi. Ako je udaljenost Sunca od Zemlje 93 milijuna milja (1 milja = 1.6 km), za koliko će vremena svjetlost sa Sunca stići do Zemlje?

10. Ako je masa atoma vodika $1.7 \cdot 10^{-24}$ grama, koliko je atoma vodika u masi od jednog kilograma?

11. Zapiši u obliku potencije:

1) $\sqrt{3}$; **2)** $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; **3)** $\sqrt{125}$;
4) $\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$; **5)** $\sqrt{a^2 - b^2}$; **6)** $\frac{1}{\sqrt[3]{(a-b)^2}}$;
7) $\sqrt[4]{4}$; **8)** $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$.

12. Koristeći džepno računalo izračunaj:

1) $\sqrt[3]{17}$; **2)** $\sqrt[5]{2\,225}$; **3)** $\frac{1}{\sqrt[4]{111}}$;
4) $\frac{1}{\sqrt[3]{0.35}}$; **5)** $\sqrt[4]{1\,000}$; **6)** $\frac{1}{\sqrt[3]{51^2}}$.

13. Zapiši u obliku korijena sljedeće potencije:

1) $10^{0.5}$; **2)** $4^{\frac{1}{3}}$; **3)** $8^{-\frac{1}{4}}$;
4) $2^{-1.5}$; **5)** $100^{\frac{3}{4}}$; **6)** $16^{-\frac{2}{3}}$;
7) $27^{-\frac{3}{4}}$; **8)** $2^{-1.5}$.

14. Koristeći džepno računalo izračunaj:

1) $10^{1.5}$; **2)** $151^{0.4}$; **3)** $258^{-0.75}$;
4) $313^{0.25}$; **5)** $1\,500^{-\frac{1}{3}}$; **6)** $77^{\frac{5}{6}}$.

15. Izračunaj:

1) $81^{\frac{1}{2}}$; **2)** $81^{-\frac{1}{4}}$;
3) $0.0625^{\frac{1}{4}}$; **4)** $32^{\frac{1}{5}} + (-8)^{\frac{1}{3}}$;
5) $\sqrt[10]{32^2}$; **6)** $\sqrt[3]{(-2)^3}$.

16. Izračunaj:

1) $0.25^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{-0.5}$;
2) $0.04^{-1.5} \cdot \left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{2}{3}}$;
3) $16^{0.5} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0.75}$;
4) $(0.81)^{-0.5} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$;
5) $\left(\frac{16}{25}\right)^{-\frac{3}{2}} - (0.064)^{-\frac{2}{3}}$;
6) $27^{-\frac{2}{3}} - \left(5\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$.

5.2. Graf i svojstva eksponencijalne funkcije

Način na koji zapisujemo brojeve daje naslutiti kako će baza $a = 10$ imati posebnu ulogu u računanju potencija. Naime, dekadski zapis brojeva upravo se zasniva na računanju s potencijom broja 10.

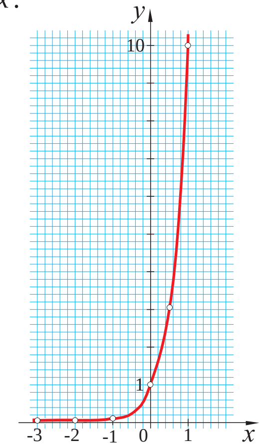
Promotrimo zato potencije oblika 10^x.

Graf funkcije $x \mapsto 10^x$

Skicirajmo graf funkcije $f(x) = 10^x$. U tu ćemo svrhu izračunati njezine vrijednosti za nekoliko odabranih vrijednosti x.

x	10^x
-3	$10^{-3} = 0.001$
-2	$10^{-2} = 0.01$
-1	$10^{-1} = 0.1$
0	$10^0 = 1$
0.5	$10^{0.5} = \sqrt{10} = 3.16$
1	$10^1 = 10$
1.5	$10^{1.5} = \sqrt{1000} = 31.6$
2	$10^2 = 100$

Primijetimo da su vrijednosti funkcije u točkama 0.5 i 1.5 određene približno, jer su $\sqrt{10}$ i $\sqrt{1\,000}$ iracionalni brojevi.



Graf funkcije $f(x) = 10^x$.

Vidimo da ova eksponencijalna funkcija raste vrlo brzo za pozitivne brojeve x. Crtano u mjerilu $1:1$, za $x = 10\,\text{cm}$ koordinata y iznosi $10^{10}\,\text{cm} = 10^5\,\text{km}$. Za negativne argumente x funkcija pada prema nuli, također vrlo brzo. Njezin se graf priljubljuje uz negativni dio x osi. Kažemo da je negativni dio x osi **asimptota** grafa eksponencijalne funkcije.

Graf funkcije 10^x u različitim mjerilima

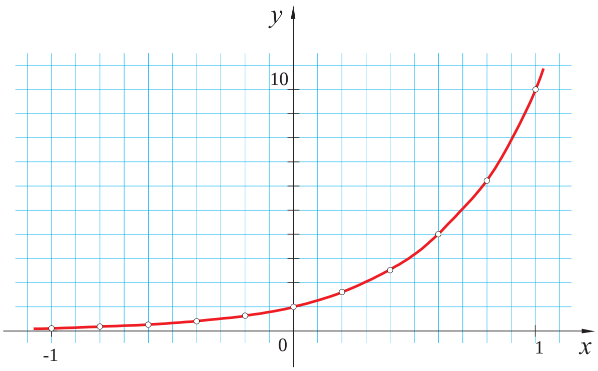
Grafove funkcija koje rastu vrlo brzo možemo lakše predočiti tako da uporabimo različita mjerila na koordinatnim osima. Nacrtajmo sad graf eksponencijalne funkcije 10^x na intervalu $[-1, 1]$ izabravši jedinice na koordinatnim osima tako da jednoj jedinici na x osi odgovara deset jedinica na y osi.

Pritom ćemo pomoću računala računati vrijednosti eksponencijalne funkcije u racionalnim točkama. Broj 10^x računa se na džepnom računalu na sljedeći način:

- unese se vrijednost broja x,
- pritisne se tipka $\boxed{10^x}$.

Dobivene ćemo vrijednosti zapisati dvjema znamenkama.

x	10^x
-1	0.1
-0.8	0.16
-0.6	0.25
-0.4	0.40
-0.2	0.63
0	1
0.2	1.6
0.4	2.5
0.6	4.0
0.8	6.3
1	10



Graf funkcije 10^x, *crtan u mjerilu 10:1.*

Nacrtani graf je graf funkcije koja je definirana za svaki realni broj x, dakle i za svaki iracionalni broj. Da vidimo je li takav postupak ispravan, načinimo sljedeće razmatranje.

Izaberimo neki iracionalni broj, recimo $\sqrt{2}$. Njega možemo zapisati samo određenom točnošću, jer je njegov decimalni zapis beskonačan. Ako računamo na dvije decimale, tada ćemo zapisati:

$$1.41 < \sqrt{2} < 1.42 \ .$$

Želimo da svojstva eksponencijalne funkcije ostanu sačuvana. Zato po $\mathbf{E}_4$ mora vrijediti:

$$10^{1.41} < 10^{\sqrt{2}} < 10^{1.42},$$

odnosno:

$$25.70 < 10^{\sqrt{2}} < 26.30 \ .$$

Ocjena je neprecizna jer funkcija $x \mapsto 10^x$ raste jako brzo, a uzeli smo grubu aproksimaciju broja $\sqrt{2}$. Popravimo je! Iz ocjene

$$1.41421 < \sqrt{2} < 1.41422$$

slijedi:

$$25.95434 < 10^{\sqrt{2}} < 25.95493.$$

Vidimo da smo dobili broj $10^{\sqrt{2}}$ s pet točnih znamenaka, $10^{\sqrt{2}} = 25.954\cdots$.

Kad se broj $10^{\sqrt{2}}$ računa na računalu koje zapisuje brojeve s 10 znamenaka, tada računalo koristi aproksimaciju

$$1.41421356237 < \sqrt{2} < 1.41421356238$$

(prebrojite broj znamenaka!), a na zaslonu se pokaže vrijednost

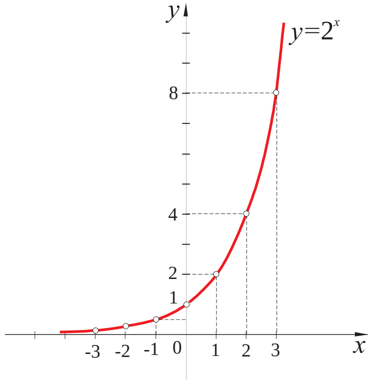
$\boxed{2}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{10^x}$ $\boxed{=}$ 25.95455352, s deset točnih znamenaka. Naravno, i ovo je samo približna vrijednost broja $10^{\sqrt{2}}$ jer je to iracionalan broj. Pri zapisivanju iracionalnih brojeva izračunatih na računalu, rezultate ćemo zaokruživati na 2–5 točnih znamenaka.

Na ovakav način, koristeći racionalne eksponente, vrijednost potencije 10^x možemo s dovoljnom točnošću izračunati za svaki iracionalni broj x. Za to je dovoljno uzeti bliske decimalne brojeve x_1 i x_2 takve da vrijedi $x_1 < x < x_2$. Onda će biti: $10^{x_1} < 10^x < 10^{x_2}$.

Graf eksponencijalne funkcije $x \longmapsto a^x$

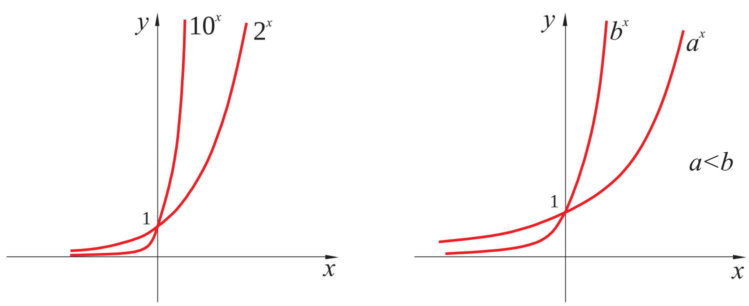
Baš kao za $a = 10$, možemo nacrtati graf funkcije a^x za druge vrijednosti baze a. Nacrtajmo graf funkcije $f(x) = 2^x$.

x	2^x
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



Graf funkcije 2^x.

Vidimo da i ova funkcija ima graf sličan grafu funkcije $x \mapsto 10^x$, samo što ona za pozitivne realne brojeve $x > 0$ raste sporije, jer je $2^x < 10^x$ za $x > 0$. Za negativne brojeve x vrijedi suprotna nejednakost: $2^x > 10^x$.



Usporedba grafova eksponencijalnih funkcija za razne vrijednosti baza $a > 1$, $b > 1$.

Zadatak 1. Nacrtaj graf funkcije $f(x) = 3^x$. Usporedi ga s grafovima funkcija $f(x) = 10^x$ i $f(x) = 2^x$. Što možeš zaključiti?

Uz bazu 10, koja je važna zbog toga što računamo u dekadskom sustavu, te bazu 2, jer računala računaju u binarnom sustavu (sustavu s bazom 2), važna je i eksponencijalna funkcija čija je baza broj e. To je iracionalan broj s približnom vrijednošću

$$e = 2.718281828\ldots$$

Funkcija $f(x) = e^x$ ugrađena je u svako džepno računalo koje sadrži i ostale standardne funkcije. Njezina je tipka označena s $\boxed{e^x}$. Vrijednost broja e možemo dobiti pomoću $\boxed{1}\ \boxed{e^x}$.

Zadatak 2. Provjerite:
$e^{1.5} \approx 4.4817$, $\quad e^3 \approx 20.0855$, $\quad e^{-0.25} \approx 0.7788$, $\quad e^{-1} \approx 0.3679$.

Kutak plus

BROJ e

Jednadžbe kao što su linearna $ax + b = 0$, kvadratna $ax^2 + bx + c = 0$ ili jednadžba 3. stupnja (kubna), gdje su koeficijenti racionalni brojevi zovu se **algebarske jednadžbe**.

Realni brojevi koji su rješenja takvih jednadžbi zovu se **algebarski brojevi**.

No postoje realni brojevi koji nisu rješenja nijedne algebarske jednadžbe. To su **transcedentni brojevi**. Broj π je transcedentan broj. On nije rješenje nijedne algebarske jednadžbe. Dužinu čija je duljina transcedentan broj nije moguće konstruirati. Tako ne možemo konstruirati niti dužinu duljine π i to je razlog zbog kojeg nije rješiv zadatak *kvadrature kruga* spomenut u 1. razredu.

Uz broj π još se ističe jedan transcedentan broj, broj e.

Taj broj čija je približna vrijednost 2.7182818284590 kao baza eksponencijalne funkcije pojavljuje se u vrlo raznolikim prirodnim zakonima kao što su razne vrste prirodnog prirasta. Nezaobilazne su takve funkcije i u optici, akustici, elektronici, dinamici itd.

Promatramo li niz brojeva koji dobijemo uvrštavanjem za n redom prirodnih brojeva u izraz $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, tada što dalje u tom nizu odmičemo, sve smo bliži broju e.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to 2.7182818284590\ldots$$

Oznaku e uveo je švicarski matematičar Leonhard Euler 1727. godine, vjerojatno inspiriran riječju *eksponent*. On je 1737. dokazao da je e iracionalan, a da je transcedentan dokazao je 1873. Charles Hermite.