7 Vektori

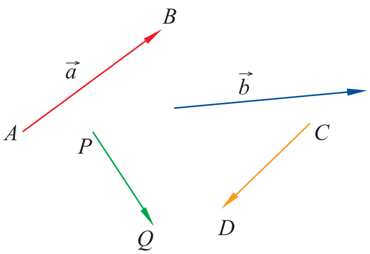
Vektori

U svijetu oko nas lako ćemo prepoznati mnoge veličine čija se vrijednost izražava brojem. To su, na primjer, duljina, površina, obujam, temperatura, tlak, masa, energija, specifična gustoća... Njih nazivamo **skalarnim** *veličinama. Međutim, neke se veličine ne mogu opisati samo brojem. Za djelovanje sile važan je njezin iznos, ali i smjer djelovanja. I brzina je fizikalna veličina koja — uz svoj iznos — mora imati definiran i smjer. Isto će vrijediti i za ubrzanje, moment sile, električno ili magnetsko polje, itd. Takve ćemo veličine nazivati* **vektorima**.

7.1. Osnovni pojmovi o vektorima

Definicija vektora

Vektor[1] je usmjerena dužina $\overrightarrow{AB}$ u kojoj razlikujemo **početnu točku** (**hvatište**) A i **završnu točku** (**kraj**) B. Vektor crtamo poput obične dužine, s tim da je završna točka označena strelicom.



Zato ćemo vektor označavati s $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{PQ}$ ili samo malim slovom iznad kojeg je postavljena strelica: $\vec{a}$, $\vec{b}$, itd.

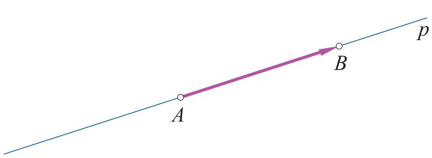
S V^2 ćemo označavati skup svih vektora čija se početna i završna točka nalaze u jednoj ravnini. Kažemo da je V^2 *skup svih vektora u ravnini*.

Opis vektora

Vektor je određen ako poznajemo njegovu duljinu, smjer i orijentaciju.

Duljina vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ udaljenost je između njegove početne i završne točke. To je, dakle, duljina dužine $\overline{AB}$. Duljinu vektora označavamo s $|\vec{a}|$, odnosno $|\overrightarrow{AB}|$:

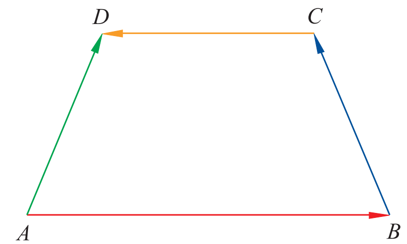
$$|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}| = |AB|.$$

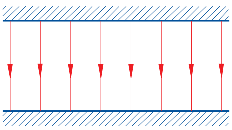


[1] vector (*lat.*) — nositelj

Smjer vektora. Ako pravac p prolazi točkama A i B vektora $\overrightarrow{AB}$, onda kažemo da taj pravac *sadrži* vektor $\overrightarrow{AB}$, ili da vektor $\overrightarrow{AB}$ leži na pravcu p. Govorimo još da je pravac p **nositelj** vektora $\overrightarrow{AB}$.

Smjer vektora određen je pravcem na kojem vektor leži. Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ imaju isti smjer, ali različitu duljinu. Vektori $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{BC}$ nisu istog smjera, no imaju jednaku duljinu.



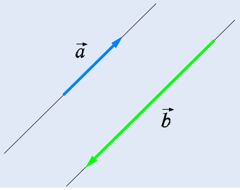


Silnice električnog polja paralelnih ploča. U svakoj točki između ploča polje ima isti smjer i iznos.

Za sve vektore koji leže na paralelnim pravcima reći ćemo da imaju *isti smjer*. Za njih još kažemo da su **kolinearni**.

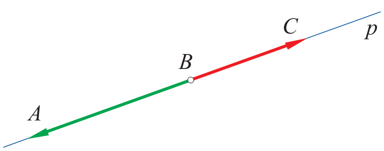
Smjer i kolinearnost vektora

Ako dva vektora leže na paralelnim pravcima, za njih kažemo da imaju **isti smjer** ili da su **kolinearni**. U suprotnom slučaju govorimo o nekolinearnim vektorima.

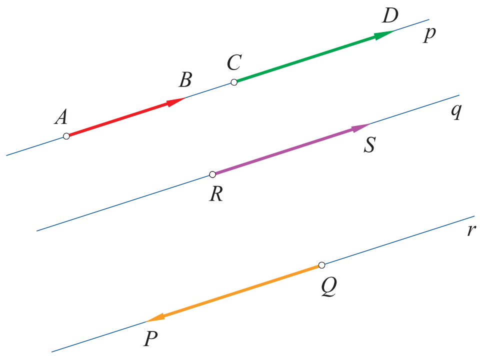


Orijentacija vektora. Vektor kojem poznajemo duljinu i pravac nositelj još nije potpuno određen — moramo mu poznavati još i *orijentaciju*.

Nacrtajmo pravac p i izdvojimo na njemu tri točke. Neka su to (tim poretkom) A, B i C. Onda su vektori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BC}$ iste orijentacije. Također su iste orijentacije i vektori $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BA}$. Međutim, vektori $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BC}$ na slici suprotne su orijentacije.



Orijentacija se na prirodan način prenosi i na vektore istog smjera. Tako su na slici, primjerice, vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{RS}$ istog smjera i iste orijentacije, a $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{QP}$ su vektori istog smjera, ali suprotne orijentacije.



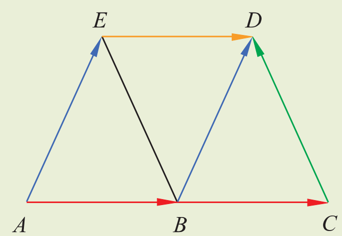
Određenost i jednakost vektora

Vektor je određen ako mu znamo **duljinu**, **smjer** i **orijentaciju**.

Dva su vektora **jednaka** ako se podudaraju po duljini, smjeru i orijentaciji.

Primjer 1.

Vektori $\overrightarrow{AE}$ i $\overrightarrow{BD}$ imaju istu duljinu, smjer i orijentaciju pa su jednaki. Vektori $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{ED}$ imaju isti smjer, ali različite duljine, pa nisu jednaki. Vektori $\overrightarrow{AE}$ i $\overrightarrow{CD}$ imaju iste duljine, ali nemaju isti smjer pa nisu jednaki. Konačno, $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DE}$ imaju istu duljinu i smjer, ali suprotnu orijentaciju, pa također nisu jednaki.

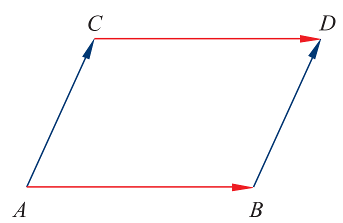


Vektori koji imaju isti nositelj jednaki su kad imaju istu duljinu i orijentaciju. Za vektore kojima se nositelji razlikuju imamo sljedeći kriterij.

Kriterij za jednakost vektora

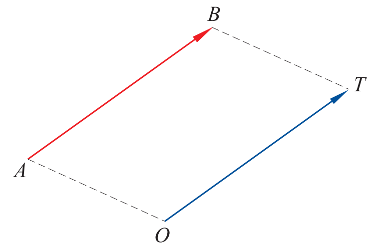
Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ jednaki su onda i samo onda ako je četverokut $ABDC$ paralelogram.

Jedan je smjer u ovoj tvrdnji očit: ako je četverokut $ABDC$ paralelogram, tada vrijedi $|AB| = |CD|$, pravci AB i CD su paralelni, a orijentacije vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ su identične.



Obratno, ako je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, tada su u četverokutu $ABDC$ dvije nasuprotne stranice paralelne i jednake duljine, što je dovoljno da bi on bio paralelogram.

Za svaki vektor možemo odrediti njemu jednak vektor koji ima početak u unaprijed zadanoj točki O. Odaberimo neki vektor $\overrightarrow{AB}$ i neka je dana točka O. Postoji (samo jedna) točka T takva da je $OTBA$ paralelogram. Onda je $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{AB}$.



Radijvektor. Temeljni stavak o vektorima

Neka je O bilo koja točka ravnine (ili prostora) i $\overrightarrow{AB}$ zadani vektor. Tada postoji jedinstvena točka T u ravnini (ili prostoru) za koju je $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{AB}$.

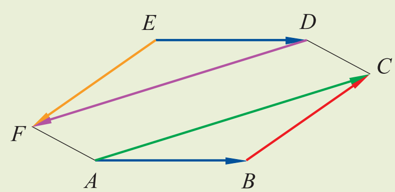
Vektor $\overrightarrow{OT}$ nazivamo **radijvektor** točke T.

Vektori koji imaju istu duljinu i smjer ne moraju biti jednaki. Oni se mogu razlikovati po orijentaciji.

Suprotni vektori

Za dva vektora kažemo da su **suprotni** ako imaju istu duljinu i smjer, a suprotnu orijentaciju. Suprotan vektor vektoru $\vec{a}$ označavat ćemo s $-\vec{a}$.

Primjer 2.



Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{ED}$ imaju isti iznos (duljinu), smjer i orijentaciju pa su jednaki. Vektori $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{EF}$ suprotni su. Jednako tako su suprotni vektori $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{DF}$.

Zadatak 1. Nacrtaj pravilni šesterokut $ABCDEF$. Neka je S sjecište njegovih dijagonala. Ispiši sve vektore kojima su krajnje točke vrhovi šesterokuta i koji

1) su jednaki vektoru $\overrightarrow{AS}$.

2) imaju isti smjer kao vektor $\overrightarrow{BE}$.

3) imaju jednaku orijentaciju kao i vektor $\overrightarrow{SC}$.

Vektor suprotan vektoru $-\vec{a}$ je $\vec{a}$, pa zato vrijedi $-(-\vec{a}) = \vec{a}$.

Vektor suprotan vektoru $\overrightarrow{AB}$ je $\overrightarrow{BA}$, jer taj vektor ima isti iznos i smjer, a suprotnu orijentaciju. Zato je $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

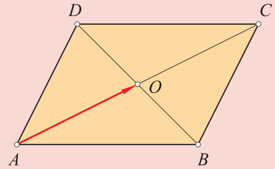
Nulvektor

Vektor kojem se podudaraju početna i završna točka nazivamo **nulvektor** i označavamo s $\vec{0}$. Njegova je duljina 0, i to je jedini vektor duljine nula. Tako je $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$, za bilo koju točku A. Jedino za nulvektor nema smisla govoriti o smjeru niti o orijentaciji. Prema dogovoru uzimamo da je nulvektor kolinearan sa svakim vektorom.

Zadaci 7.1.

1. Koje su od sljedećih veličina vektorske, a koje skalarne: temperatura, obujam, brzina, masa, ubrzanje, sila, električni napon?

2. Dan je paralelogram $ABCD$. Točka O sjecište je njegovih dijagonala. Promatramo skup vektora kojima su početna i završna točka vrh paralelograma ili točka O.



1) Ispiši sve vektore koji imaju jednak smjer kao i vektor $\overrightarrow{AO}$. Ispiši sve vektore koji imaju jednaku orijentaciju kao i vektor $\overrightarrow{AO}$.
2) Ispiši sve vektore koji imaju jednak smjer kao i vektor $\overrightarrow{BD}$. Ispiši sve vektore koji imaju jednaku orijentaciju kao i vektor $\overrightarrow{BD}$.

3. Koliko postoji vektora kojima su početna i završna točka neka dva vrha trokuta ABC?

4. Koliko postoji vektora kojima su početna i završna točka vrhovi četverokuta $ABCD$ ako je taj četverokut paralelogram, a koliko ako nije paralelogram?

5. Ako je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, onda je $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Dokaži!

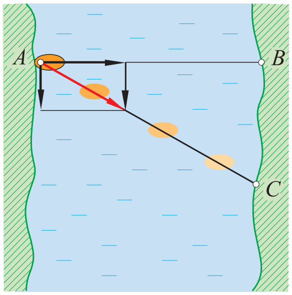
6. Nacrtaj pravilan šesterokut $ABCDEF$. Neka je S sjecište dijagonala tog šesterokuta. Ispiši sve vektore kojima su početna i završna točka neki vrh šesterokuta ili točka S, a koji su

1) jednaki vektoru $\overrightarrow{BC}$; **2)** suprotni vektoru $\overrightarrow{SA}$.

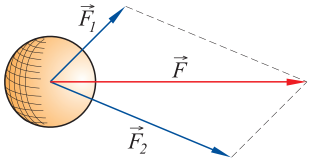
7.2. Zbrajanje vektora

Zbrajanje vektora

Ako čamac plovi preko rijeke brzinom 3 m/ s okomito na njezin tok, a brzina vode je 1 m/ s, kakva će biti njegova putanja? Na ovo su pitanje znali odgovoriti još stari Grci: čamac će se gibati po pravcu koji je dijagonala pravokutnika koji čine pojedina gibanja. Krene li čamac iz točke A prema točki B i ako cijelo vrijeme vozi okomito na tok vode, stići će na drugu obalu u točki C.



Pred oko 400 godina nizozemski znanstvenik Simon Stevin rješavao je općenitiji problem gibanja tijela na koje djeluju različite sile. Mnogo prije nego što je pojam vektora ušao u matematiku, on je ispravno odgovorio na pitanje: *može li se djelovanje dviju sila zamijeniti djelovanjem samo jedne sile koja će imati isti učinak?* Djelovanje dviju sila predstavljenih vektorima $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ može se zamijeniti djelovanjem samo jedne sile predstavljene vektorom $\vec{F}$. Pritom je $\vec{F}$ dijagonala paralelograma kojemu su $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ susjedne stranice.

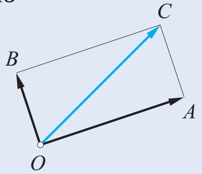


Time je opravdana sljedeća definicija zbrajanja vektora.

Zbroj dvaju vektora – pravilo paralelograma

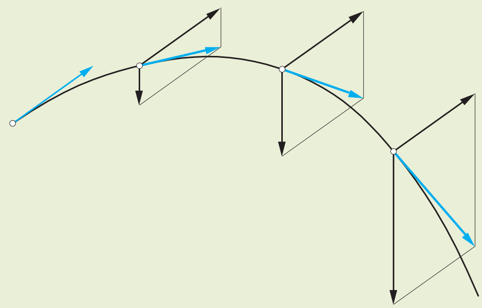
Zbroj dvaju vektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ s istim početkom O je vektor $\overrightarrow{OC}$ takav da je $\overline{OC}$ dijagonala paralelograma $OACB$. Pišemo

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$



Primjer 1.

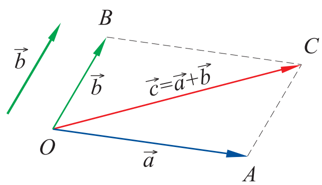
Kosi hitac. Tijelo je izbačeno pod nekim kutom početnom brzinom $\vec{v}_p$. Pod pretpostavkom odsustva trenja, ono će se nastaviti gibati u tom smjeru istom brzinom. Međutim, u svakom trenu, zbog utjecaja gravitacijske sile, iznos komponente brzine $\vec{v}_o$ prema tlu povećava se proporcionalno proteklom vremenu: $v_o = gt$. Rezultantno gibanje odvija se po paraboli.



Vektor brzine tijela dobiva se zbrajanjem jedne stalne komponente u smjeru početne brzine, i druge kojoj se iznos mijenja proporcionalno proteklom vremenu. Rezultantna brzina bit će uvijek tangencijalna na putanju tijela.

Kako ćemo zbrajati vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ koji imaju početke u različitim točkama?

Označimo početnu točku vektora $\vec{a}$ s O. Neka je A njegova završna točka. Izaberimo vektor $\overrightarrow{OB}$ jednak vektoru $\vec{b}$.

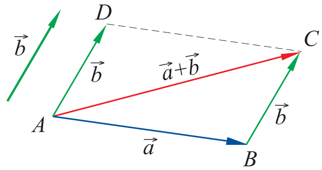


Zbrojimo vektore $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$. Njihov je zbroj vektor $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. Kako se vektori $\overrightarrow{OB}$ i $\vec{b}$ podudaraju, vrijedi

$$\vec{c} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Zbrajanje vektora možemo opisati na još jedan način. Pogledajmo sliku.

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ bilo koja dva vektora. Označimo početnu točku vektora $\vec{a}$ s A, a završnu s B.



Dakle, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$. Izaberimo vektor $\overrightarrow{AD}$ jednak vektoru $\vec{b}$. Nacrtajmo paralelogram $ABCD$. Po pravilu paralelograma za zbrajanje dvaju vektora je

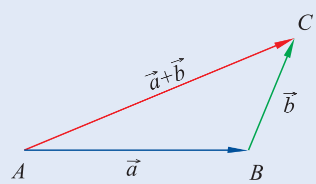
$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.$$

Međutim, vektori $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{BC}$ su jednaki, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. To znači da se zbroj dvaju vektora može dobiti i na ovaj način:

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}.$$

Primijetimo da smo tu izabrali dva vektora, $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ tako da se završetak jednog podudara s početkom drugog vektora. Za takve vektore kažemo da su **ulančani** ili da se **nadovezuju**.

Zbroj vektora – pravilo trokuta



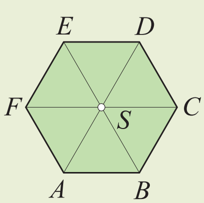
Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su **ulančani** ako se završetak prvog podudara s početkom drugog. Zbroj dvaju ulančanih vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ je vektor $\overrightarrow{AC}$ koji spaja početnu točku prvog vektora sa završnom točkom drugog vektora.

Primjer 2.

Neka je dan pravilni šesterokut $ABCDEF$ i neka je S njegovo središte. Odredimo sljedeće vektore:

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$; **2)** $\overrightarrow{FS}+\overrightarrow{ED}$;

3) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}$; **4)** $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}$.



Promatraj sliku i prati redom sljedeće jednakosti:

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{AS}$;

2) $\overrightarrow{FS}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{FS}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{FC}$;

3) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{AC}$;

4) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}$.

Zadatak 1. Nacrtaj kvadrat $ABCD$ i neka su A_1, B_1, C_1 i D_1 polovišta njegovih stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$. Točka S je središte kvadrata. Odredi vektore:

1) $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1D_1}$; **2)** $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1}$; **3)** $\overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{SA_1}$;

4) $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS}$; **5)** $\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{CD_1}$; **6)** $\overrightarrow{A_1C} + \overrightarrow{BA}$.

Pravilo trokuta za zbrajanje vektora pogodno je zbog toga što se može lako poopćiti na zbroj više od dvaju vektora. Da bismo to pokazali, prije toga moramo naučiti osnovna svojstva operacije zbrajanja vektora.

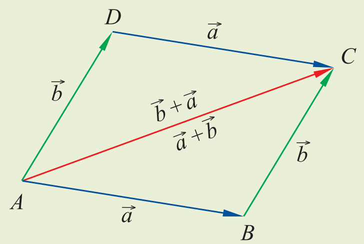
Svojstva operacije zbrajanja vektora

Realne brojeve a i b možemo zbrajati u bilo kojem poretku, jer vrijedi $a + b = b + a$. Isto svojstvo ima i operacija zbrajanja vektora, jer se po pravilu paralelograma zbrojevi $\vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{b} + \vec{a}$ računaju na isti način.

Primjer 3. Provjerimo svojstvo komutativnosti zbrajanja vektora.

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ bilo koja dva vektora. Odaberimo njima jednake vektore tako da budu ulančani. Neka je, dakle, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Onda je

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$



Odaberimo sad vektore jednake vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, ali tako da budu ulančani u drugom poretku. Vrijedi $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ i $\vec{a} = \overrightarrow{DC}$. Zato je

$$\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}.$$

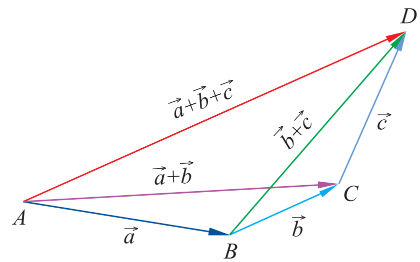
Zaključujemo da vrijedi $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, pa je zbrajanje vektora komutativno.

Komutativnost zbrajanja vektora

Zbrajanje vektora je **komutativno**, tj. za bilo koja dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vrijedi

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$

Da bismo zbrojili više od dva broja, moramo odabrati poredak zbrajanja. Tako, na primjer, tri broja a, b i c možemo zbrojiti na način $(a+b)+c$, u kojem se zbroju prvih dvaju brojeva dodaje treći, ali i na način $a+(b+c)$, u kojem smo najprije zbrojili posljednja dva broja i taj zbroj dodali prvom broju. Kako je zbrajanje realnih brojeva asocijativno, u oba ćemo postupka dobiti isti rezultat. Pokažimo da isto svojstvo ima i zbrajanje vektora.



Uvjerimo se u istinitost ovog svojstva koristeći pravilo trokuta za zbrajanje vektora. Izaberimo vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ tako da budu ulančani. Neka je $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ i $\vec{c}=\overrightarrow{CD}$. Onda vrijedi:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}.$$

Zbrajajući u drugom poretku dobit ćemo

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}.$$

Dakle, vrijedi $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

Asocijativnost zbrajanja vektora

Zbrajanje vektora je **asocijativno**, tj. za bilo koja tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ vrijedi

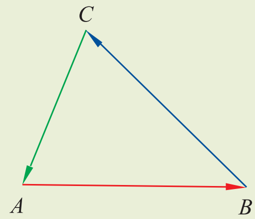
$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

Primjer 4.

Neka je ABC bilo koji trokut. Odredimo zbroj vektora

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\,.$$

To su vektori stranica ovog trokuta koji su odabrani tako da budu ulančani.



Prema pravilu za zbrajanje, rezultat je vektor kojemu je početna točka početak prvog, a završna točka završetak trećeg vektora:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

Dakle, zbroj vektora stranica trokuta (koji su ulančani) jednak je nul-vektoru.

Zadatak 2.

Neka je dan mnogokut $A_1A_2\ldots A_n$. Tada vrijedi:

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_nA_1} = \vec{0}.$$

Obrazloži!

Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$ suprotni su jer imaju isti nositelj i suprotnu orijentaciju. Za zbroj ovih dvaju vektora vrijedi:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

Dakle, *zbroj suprotnih vektora jednak je nulvektoru*. Ta činjenica opravdava oznaku

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}\,.$$

Suprotan vektor bilo kojeg vektora $\vec{a}$ označavali smo s $-\vec{a}$. Dakle, vrijedi

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}.$$

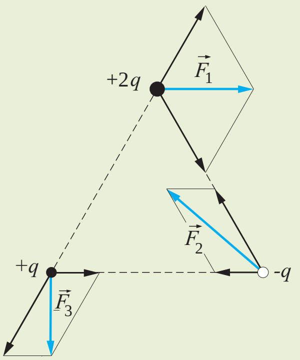
Nul-vektor možemo napisati na način $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$, gdje je A bilo koja točka. Ako je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ neki vektor, onda je

$$\vec{0} + \vec{a} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}.$$

Isto tako je $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$. To pokazuje da nulvektor ima slična svojstva koje ima i broj nula za operaciju zbrajanja brojeva.

Primjer 5.

Djelovanje električnih sila nekoliko točkastih naboja. U vrhovima jednakostraničnog trokuta postavljeni su točkasti naboji iznosa $+2q$, $+q$ i $-q$. Nacrtano je djelovanje električnih sila na svaki od tih naboja kao i rezultantne sile $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$ u svakom od naboja. Primijeti da je zbroj tih sila $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3$ jednak nulvektoru, što je jasno jer se njihove komponente međusobno poništavaju. To znači da bi ukrućeni sistem ovakvih naboja bio u ravnoteži.



Djelovanje električne sile točkastog naboja

Oduzimanje vektora

Oduzimanje je operacija izvedena iz zbrajanja. Prisjetimo se operacije oduzimanja realnih brojeva. Razliku $a-b$ brojeva a i b možemo izračunati tako da broju a pribrojimo broj $-b$ suprotan broju b:

$$a-b=a+(-b).$$

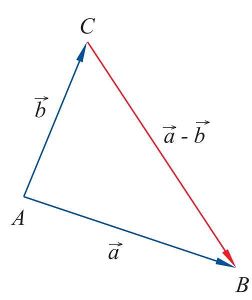
Na isti se način definira i oduzimanje vektora.

Oduzimanje vektora

Razlika vektora definira se kao zbroj sa suprotnim vektorom:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

Opišimo kako se geometrijski određuje razlika $\vec{a}-\vec{b}$ dvaju vektora. Izaberimo vektore jednake početnima tako da imaju zajednički početak. Neka je $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$. Onda je $\overrightarrow{CA}=-\vec{b}$, pa je $\vec{a}+(-\vec{b})=(-\vec{b})+\vec{a}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$.



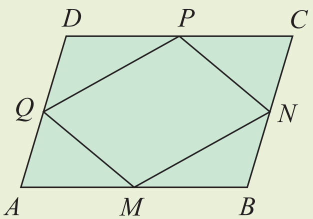
Razlika vektora

Razlika $\vec{a}-\vec{b}$ vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ određuje se tako da se izaberu vektori jednaki početnima, a koji imaju zajednički početak. Tada je razlika vektor koji spaja završetak drugog sa završetkom prvog vektora.

Primjer 6.

Na slici je dan paralelogram $ABCD$. Točke M, N, P i Q polovišta su njegovih stranica. Obrazložimo sljedeće jednakosti:

1) $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{QM}$;
2) $\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MB}$;
3) $\overrightarrow{QD}-\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{PD}$;
4) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AM}$.



1) $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AM}+(-\overrightarrow{AQ})=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{QA}=\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{QM}$;

2) $\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{AQ}+(-\overrightarrow{NP})=\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QM}=\overrightarrow{AM}$;

3) $\overrightarrow{QD}-\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QD}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{QD}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QD}=\overrightarrow{PD}$;

4) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}$.

Zadatak 3.

Nacrtaj sliku kao u prethodnom primjeru. Neka je sa S označeno sjecište dijagonala paralelograma. Odredi vektore:

1) $\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{AQ}$; **2)** $\overrightarrow{AS}-\overrightarrow{BC}$; **3)** $\overrightarrow{BS}-\overrightarrow{AD}$; **4)** $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}$.

Zadaci 7.2.

1. Dan je paralelogram $ABCD$. Neka je točka S sjecište njegovih dijagonala. Izračunaj:

1) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}$; **2)** $\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{BS}$; **3)** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$;

4) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{SD}$; **5)** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BS}$; **6)** $\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{CS}$.

2. Točka S sjecište je dijagonala paralelograma $ABCD$. Izračunaj:

1) $\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{CS}$; **2)** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{BD}$;

3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$; **4)** $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}$.

3. Neka je $ABCDEF$ pravilni šesterokut i neka je S sjecište njegovih dijagonala. Izračunaj:

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF}$; **2)** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{SD}$; **3)** $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ES}$;

4) $\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{EF}$; **5)** $\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{SC}$; **6)** $\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{AS}$.

4. Točka S sjecište je dijagonala pravilnog šesterokuta $ABCDEF$. Izračunaj:

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{SF}$; **2)** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}$;

3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AF}$; **4)** $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{SF}$.

5. Dan je trapez $ABCD$. Konstruiraj vektore:

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$; **2)** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$;

3) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$; **4)** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

6. Odredi zbroj vektora:

1) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BA}$;

2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}$.

3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$;

4) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$;

5) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}$.

7. Može li zbroj vektora biti vektor manje duljine nego što je duljina svakog pojedinog pribrojnika?
Može li razlika vektora biti manje duljine od njihova zbroja?

8. Ako točke O, A i B nisu kolinearne i ako je $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$. Dokaži!

9. Dan je paralelogram $ABCD$ i točka O. Dokaži da je $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

10. Dan je trokut $\triangle MPQ$. Konstruiraj vektore:

1) $\overrightarrow{MP}-\overrightarrow{PQ}$; **2)** $\overrightarrow{MP}-\overrightarrow{QM}$; **3)** $\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{MP}$.

11. Nacrtaj paralelogram $ABCD$ i odredi njegovo središte S. Izračunaj:

1) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}$; **2)** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$; **3)** $\overrightarrow{AS}-\overrightarrow{BS}$;

4) $\overrightarrow{BS}-\overrightarrow{SD}$; **5)** $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{SC}$; **6)** $\overrightarrow{AS}-\overrightarrow{SD}$.

12. Neka su A, B, C, D, E, F vrhovi pravilnog šesterokuta. Provjeri jednakosti:

1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BC}$; **2)** $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AF}$;

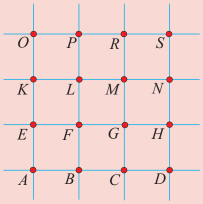
3) $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BA}$; **4)** $\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BC}$.

13. Nacrtaj neka tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ te konstruiraj sljedeće vektore:

1) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; **2)** $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$; **3)** $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$.

14. Točka T težište je trokuta ABC. Odredi zbroj vektora $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}$.

15. Dana je pravokutna mreža kao na slici. Odredi:



1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{KP}$; **2)** $\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{MR}$;

3) $\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{SP}$; **4)** $\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{DN}$;

5) $\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{RN}$; **6)** $\overrightarrow{LS}+\overrightarrow{NC}$.

16. Promatraj pravokutnu mrežu iz prethodnog zadatka i izračunaj:

1) $\overrightarrow{EH}-\overrightarrow{KB}$; **2)** $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{EF}$; **3)** $\overrightarrow{NR}-\overrightarrow{MO}$;

4) $\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{GD}$; **5)** $\overrightarrow{RO}-\overrightarrow{NC}$; **6)** $\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{MR}$.