4 Derivacija

Zabavni park "Europark" u Rustu, Njemačka.

U ovom ćemo poglavlju naučiti osnove diferencijalnog računa, najjačeg 'oružja' kojim su matematičari obogatili čovječanstvo. Riječ je o području matematike u kojem se na djelotvoran način iskorištava ideja o beskonačno malim veličinama, koja je dvije tisuće godina zaokupljala velikane ljudske misli. Ogromna je važnost diferencijalnog računa u tome što pomoću njega opisujemo fizikalne zakone na kojima se temelji naš svijet.

4.1. Problem tangente i brzine

Prirast varijable i prirast funkcije

Ponovimo najvažnije o prirastu funkcije.

Primjer 1.

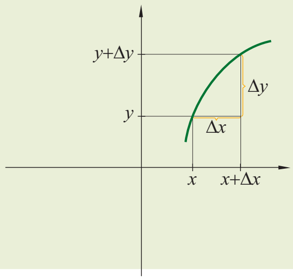
Neka je $f(x)=x^2+2x$. Koliki je prirast funkcije u točki $x_0=1$ ako je prirast argumenta $\Delta x=1$?

Prirast funkcije definira se kao promjena vrijednosti funkcije:

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \qquad (1)$$

U ovom primjeru je

$$\Delta y=f(2)-f(1)=8-3=5.$$



Prirast funkcije ovisi o prirastu argumenta i o točki u kojoj se taj prirast promatra.

Primjer 2.

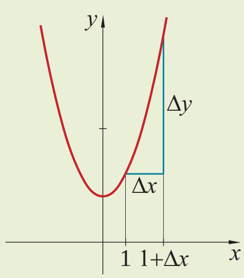
Neka je $f(x)=x^2+2$. Odredimo prirast Δy funkcije

A. u točki $x_0=1$, **B.** u točki $x_0=3$,

C. u po volji odabranoj točki $x_0\in\mathbf{R}$.

A. Računamo po (1):

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(1+\Delta x)-f(1)\\&=(1+\Delta x)^2+2-(1+2)\\&=\Delta x^2+2\Delta x.\end{aligned}$$



B. Sada je:

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(3+\Delta x) - f(3)\\ &= (3+\Delta x)^2 + 2 - (3^2+2) = \Delta x^2 + 6\Delta x.\end{aligned}$$

C. Općenito je:

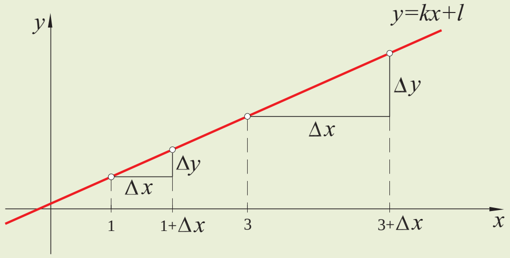
$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = (x_0+\Delta x)^2 + 2 - (x_0^2+2)\\ &= \Delta x^2 + 2x_0\Delta x.\end{aligned}$$

Vidimo da ovaj prirast ovisi i o točki x_0 i o iznosu prirasta Δx.

Afina funkcija, čiji je graf pravac, ima jednak prirast u svakoj točki. Ta funkcija svuda raste (ili pada) jednako brzo.

Primjer 3.

Nagib pravca. Odredimo prirast afine funkcije $f(x) = kx + l$ u istim točkama kao u prethodnom primjeru.



Nagib pravca jednak je koeficijentu smjera pravca i dobiva se kao omjer $\Delta y/\Delta x$. On je stalan u svakoj točki x_0.

A. U točki $x_0 = 1$ je:

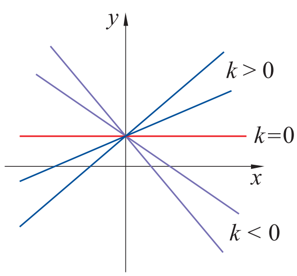
$$\Delta y = f(1+\Delta x) - f(1) = k(1+\Delta x) + l - (k\cdot 1 + l) = k\Delta x.$$

B. U točki $x_0 = 3$ je:

$$\Delta y = f(3+\Delta x) - f(3) = k(3+\Delta x) + l - (k\cdot 3 + l) = k\Delta x.$$

C. Općenito je:

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = k(x_0+\Delta x) + l - (kx_0 + l) = k\Delta x.$$



Koeficijent smjera i nagib pravca.

U svakoj točki x_0 je za isti Δx jednak prirast funkcije. Zato je *omjer prirasta* stalan i jednak koeficijentu smjera k pravca:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = k.$$

Koeficijent smjera određuje **nagib** pravca. Dakle, graf afine funkcije ima u svakoj točki jednak nagib.

Iz pariškog predgrađa.

Nagib govori o brzini rasta funkcije. Kod pravca nam je poznata ovisnost rasta (pada) o predznaku koeficijenta k:

$$\begin{aligned} &\text{za} \quad k < 0 \quad \text{funkcija pada,} \\ &\text{za} \quad k = 0 \quad \text{funkcija je konstanta,} \\ &\text{za} \quad k > 0 \quad \text{funkcija raste.} \end{aligned}$$

Pad i rast su to brži što je veća apsolutna vrijednost koeficijenta k.

Nagib se može definirati i općenitije, za po volji odabranu funkciju f.

Nagib funkcije. Tangenta na graf funkcije

Nagib grafa funkcije

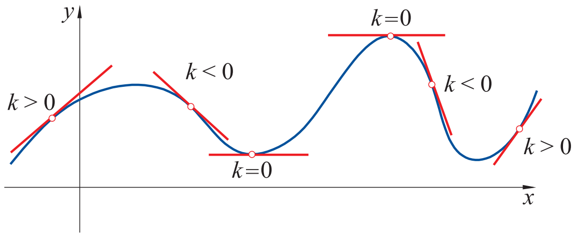
Neka se na graf funkcije f može povući *tangenta* u točki (x_0, y_0). **Nagib grafa** funkcije f u točki (x_0, y_0) definiramo kao nagib tangente položene na graf u toj točki.

On je jednak koeficijentu smjera k tangente, a može se izraziti kao

$$k = \operatorname{tg} \alpha,$$

pri čemu je α kut što ga pravac zatvara s pozitivnim dijelom x-osi.

Funkcije različite od linearne nemaju jednak nagib u svakoj točki. To znači da njihov rast (pad) nije u svakoj točki jednak. Ilustrirajmo to sljedećom slikom.

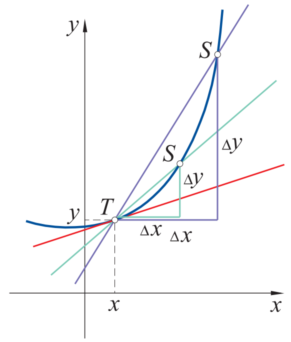


Rast i pad funkcije možemo ilustrirati nagibom pravaca koji diraju graf funkcije. Primjećujemo da funkcija pada tamo gdje je nagib pravca negativan, a raste tamo gdje je on pozitivan. Na prijelazu između rasta i pada nagib tangente jednak je nuli.

Da bismo odredili koliki je točno nagib grafa funkcije u nekoj točki, moramo odrediti koeficijent smjera tangente položene na graf u toj točki. To nije jednostavan posao. Čak niti za tako jednostavne funkcije poput polinoma ne znamo jednostavno odrediti tangentu u po volji uzetoj točki na grafu.

Pokušajmo doći do tangente na sljedeći način: tangentu ćemo zamijeniti **sekantom**, pravcem koji siječe graf funkcije u (barem) dvjema točkama.

Sekanta je pravac koji prolazi točkama (x, y) i $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ na grafu funkcije. Što je vrijednost prirasta Δx manja, to će sekanta biti bolja aproksimacija za tangentu u točki (x, y). Puštajući da Δx teži nuli, iz jednadžbe sekante dobivamo jednadžbu tangente.

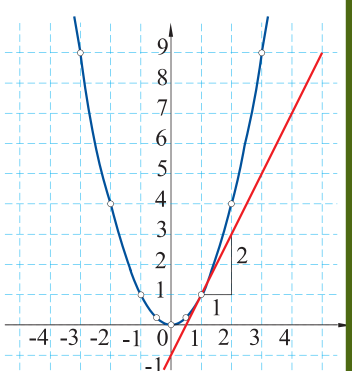


Neka je $T(x_0, y_0)$ točka na grafu u kojoj želimo izračunati nagib, a $S(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ točka na grafu kroz koju vučemo sekantu TS. Nagib sekante je $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Kada se S približava točki T po grafu funkcije f, onda sekanta prelazi u tangentu u točki T.

Odaberimo neku funkciju i pogledajmo kako joj računamo tangentu.

Primjer 4.

Neka je $y = f(x) = x^2$. Nađimo nagib tangente na graf te funkcije u točki $(1, 1)$.



Postavit ćemo sekantu kroz točku s koordinatama $(1, 1)$, i kroz njoj "susjednu" točku $(1 + \Delta x, f(1 + \Delta x))$. Vrijedi

$$f(1 + \Delta x) = (1 + \Delta x)^2 = 1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Zato je prirast funkcije u točki $x_0 = 1$ jednak

$$\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = [1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2] - 1 = 2\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Zanima nas koeficijent smjera sekante. On iznosi

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2 + \Delta x.$$

Vidimo da njegova vrijednost teži k 2 kad Δx teži k nuli. Zato je nagib tangente u točki $(1, 1)$ jednak 2.

Izračunajmo nagib tangente u *po volji uzetoj* točki (x_0, y_0) na grafu funkcije $f(x) = x^2$. Koeficijent smjera sekante dobivamo računajući kvocijent $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ prirasta funkcije i prirasta argumenta:

$$f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2,$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x.$$

Pustivši da Δx teži nuli dobivamo nagib $2x_0$.

Tako, na primjer, nagib u točki grafa s apscisom -1 iznosi -2, nagib u točki grafa s apscisom 3 je 6 itd. Izračunavši nagib možemo napisati jednadžbu tangente koristeći formulu za jednadžbu pravca koji prolazi zadanom točkom i ima poznati koeficijent smjera

$$y - y_0 = k(x - x_0) = 2x_0(x - x_0).$$

Tako imamo, na primjer:

apscisa	ordinata	nagib	tangenta
$x = -1$	$y = 1$	$k = -2$	$y - 1 = -2(x + 1)$
$x = 1$	$y = 1$	$k = 2$	$y - 1 = 2(x - 1)$
$x = 3$	$y = 9$	$k = 6$	$y - 9 = 6(x - 3)$

Zadatak 1. Zadana je funkcija $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 3$. Odredi nagib tangente **1)** u točki $(2, 3)$, **2)** u bilo kojoj točki (x_0, y_0) na grafu te funkcije.

Zadatak 2. U kojoj točki na grafu funkcije $f(x) = -x^2 + x$ nagib iznosi 3?

Problem brzine

Odgovor na pitanje što je brzina nije jednostavan. O tome izvrsno govori prepirka između policajca i vozačice koja se može pročitati u znamenitim *The Feynman Lectures in Physics* američkog nobelovca R. P. Feynmana:

– Gospođo, vi ste prekršili pravila vožnje kroz grad. Vozili ste brzinom od 90 km/ h.

– Oprostite, to nije moguće. Kako sam mogla voziti 90 kilometara na sat, kad vozim tek sedam minuta?

– Radi se o tome, gospođo, da biste za jedan sat prešli 90 km kad biste nastavili voziti na isti način.

– Kad bih ja nastavila voziti kako sam vozila još cijeli sat, naletjela bih na zid na kraju ulice!

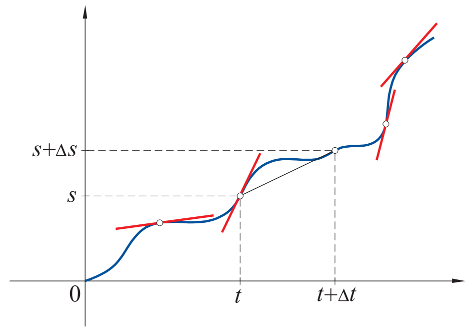
– Vaš je brzinomjer pokazivao 90 km/ h!

– Moj je brzinomjer pokvaren i odavno ne radi.

Ako automobil prijeđe put od 120 km za 2 sata, njegova je prosječna brzina 60 km/ h. To dakako ne znači da je ta brzina bila konstantna duž cijelog puta. Ona se tijekom putovanja mijenjala (brzina je funkcija vremena!), a prosječnu vrijednost dobili smo dijeljenjem prijeđenog puta vremenom provedenim na putu.

Na sličan način možemo dobiti i prosječnu brzinu na nekom manjem dijelu puta. Smanjujemo li dio puta, odnosno promatrajući sve kraće vremenske intervale, očekujemo da će prosječna brzina biti sve bliža trenutnoj brzini.

Nacrtajmo s-t dijagram prijeđenog puta koji opisuje ovisnost prijeđenog puta s o vremenu t. Graf funkcije $t \mapsto s(t)$ nalik je na ovakav:



Graf prijeđenog puta u ovisnosti o vremenu. Što je nagib krivulje veći, to je automobil u jednakim vremenskim intervalima prevaljivao veći dio puta. Tu je i njegova brzina bila veća. Dakle, iznos brzine ovisan je o nagibu grafa ove funkcije.

U vremenskom intervalu $[t_0, t_0 + \Delta t]$ automobil je prevalio put od $s_0 = s(t_0)$ do $s_0 + \Delta s = s(t_0 + \Delta t)$. Prosječna brzina u tom vremenskom intervalu je

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Smanjivanjem duljine Δt vremenskog intervala, ova prosječna brzina postaje sve bliža trenutnoj brzini u trenutku t_0.

Ilustrirajmo taj prijelaz na poznatim formulama koje opisuju slobodni pad tijela. Ovisnost prijeđenog puta o vremenu lako je mjeriti: dovoljno je tijelo puštati da pada s različitih visina i mjeriti ukupno vrijeme pada. Teže je odgovoriti na pitanje: kolika je brzina tijela pri padu?

Primjer 5.

Mjerenjem je utvrđeno da je prevaljeni put tijela koje slobodno pada u vakuumu dan formulom

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

gdje je t vrijeme slobodnog pada. Kolika je brzina tijela u tom trenutku?

Računajmo prosječnu brzinu u vremenskom intervalu od t do $t + \Delta t$:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{\Delta t} = gt + \frac{1}{2}g \cdot \Delta t.$$

Promatramo li sve kraće vremenske intervale, tada je $\Delta t \to 0$ i *prosječna brzina postaje trenutna brzina* u trenutku t:

$$v(t) = gt.$$

Primjeri s tangentom i brzinom vode nas do istih izraza, promatranja limesa kvocijenta $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ kad Δx teži nuli.

Derivacija funkcije

Derivacija funkcije f u točki x_0 je broj:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

ukoliko ovaj limes postoji. Taj je broj jednak nagibu k tangente na graf $y = f(x)$ u točki (x_0, y_0):

$$f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha,$$

α je kut što ga tangenta zatvara s pozitivnim dijelom x-osi.

Za funkciju f kažemo da je **derivabilna** u točki x_0, ako postoji $f'(x_0)$. Funkcija je **derivabilna** (**diferencijabilna**) **na intervalu** $\langle a, b\rangle$ ako u svakoj točki tog intervala postoji derivacija $f'(x_0)$. Tada je na intervalu $\langle a, b\rangle$ definirana funkcija f' koju nazivamo **derivacija** funkcije f.

Derivaciju još označavamo simbolima

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

Postoji li derivacija po volji odabrane funkcije u bilo kojoj njezinoj točki? Odgovor na ovo pitanje je: ne! Da bi funkcija imala derivaciju, ona mora zadovoljavati neke uvjete. Ne ulazeći u detalje, istaknimo jedan nuždan uvjet.

Nužan uvjet za postojanje derivacije

Da bi funkcija imala derivaciju u nekoj točki, ona mora u toj točki biti neprekinuta.

Dokaz. Ako funkcija ima derivaciju u točki x, onda postoji limes:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Nazivnik ovog izraza teži nuli. Da bi limes postojao, i brojnik mora težiti nuli. Zato je

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x),$$

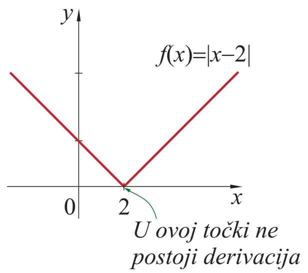
što znači da je f neprekinuta u točki x.

Ovaj je uvjet nužan, ali ne i dovoljan. To znači da obratna tvrdnja nije istinita; funkcija koja je neprekinuta ne mora imati derivaciju u toj točki.

Pokazat ćemo u nastavku da su sve elementarne funkcije (poput polinoma, eksponencijalne i logaritamske funkcije, trigonometrijskih funkcija i sl.) derivabilne u svim točkama u kojima su definirane.

Primjer 6.

Navedimo primjer funkcije koja je neprekinuta, a nema derivaciju u nekoj točki.[1] Neka je $f(x) = |x-2|$. Ona je neprekinuta u svakoj točki. Tvrdimo da nema derivaciju u točki $x_0 = 2$. Računamo:



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{|2+\Delta x - 2| - 0}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Zato je

$$\lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1, \qquad \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

i ne postoji $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, tj. funkcija nema derivaciju u točki 2.

Sa slike grafa ove funkcije vidi se zbog čega derivacija u toj točki ne postoji.

Povijesni **kutak**

Dio matematike koji se temelji na pojmu derivacije naziva se *diferencijalni račun*. Osnivačima diferencijalnog računa drže se veliki matematičari I. Newton i G. W. Leibniz. Newton je do pojma derivacije došao preko fizikalnog modela brzine. On je rabio oznaku $\dot{s}$ koja se i danas koristi za označavanje derivacija po varijabli koja predstavlja vrijeme. Leibniz je do pojma derivacija došao preko problema tangente.

SIR ISAAC NEWTON

Sir Isaac Newton, (Woolsthorpe, 25. prosinca 1642. – Kensington, 20. ožujka 1727.) engleski je fizičar, matematičar i astronom. Po završetku studija u razdoblju od tri godine (1665.–1667.) napravio je nekoliko otkrića fundamentalne važnosti iz različitih područja znanosti. U matematici je postavio osnove diferencijalnog i integralnog računa. Newton je nazivao derivaciju fluksacijom, od latinskog *fluere* – teći. Osnivač je suvremene mehanike (Newtonovi zakoni), otkriva principe gravitacijske sile, kao i neke temeljne zakone optike. 1668. izradio je prvi teleskop na principu refleksije. 1672. objavljuje djelo *New Theory about Light and Colour*. Međutim, temeljne radove iz matematike i astronomije — model gibanja nebeskih tijela — objavio je tek na nagovor prijatelja punih dvadeset godina nakon njihova nastanka u djelu *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, za koje se drži da je najveći pojedinačni doprinos znanosti.

GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ

Gottfried Wilhelm von Leibniz (Leipzig 1. srpnja 1646. – Hanover 14. studenoga 1716.) njemački filozof i matematičar, osnivač Berlinske akademije znanosti. 1661. upisao je pravni fakultet, a uz pravo studirao je filozofiju i matematiku. Doktorirao je 1666., a nakon toga radio u diplomatskoj službi. Na brojnim putovanjima upoznao se s mnogim matematičarima svoga doba i njihovim radovima. U isto vrijeme kad i Newton utvrdio je osnove diferencijalnog i integralnog računa. Autor je većine matematičkih simbola i oznaka diferencijalnog i integralnog računa kakve danas koristimo. Za derivaciju je rabio oznaku dy. Uveo je pojam diferencijala po kojem se i čitav račun naziva diferencijalni račun. On ga je tretirao kao 'beskonačno mali prirast'. U njegovim se radovima po prvi put pojavljuje i teorija algoritama. Otkrio je pojam binarnog sustava i izumio stroj za računanje složeniji od Pascalovog.

[1] U visokoškolskoj matematici daju se primjeri funkcija koje su neprekinute, a nemaju derivaciju niti u jednoj točki! Konstrukcija takvih funkcija je složena.

Zadaci 4.1.

1. Izračunaj kvocijent $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ za funkciju f u zadanoj točki x_0:

1) $f(x) = x^2 - 3x + 1$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, u bilo kojoj točki $x_0 \in \mathscr{D}_f$;

2) $f(x) = ax^2 + bx + c$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, u bilo kojoj točki $x_0 \in \mathscr{D}_f$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, u bilo kojoj točki $x_0 \in \mathscr{D}_f$;

4) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, u bilo kojoj točki $x_0 \in \mathscr{D}_f$;

5) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, u bilo kojoj točki $x_0 \in \mathscr{D}_f$.

2. Izračunaj $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ za funkciju f u zadanoj točki x_0.

1) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, u bilo kojoj točki $x_0 \in \mathscr{D}_f$;

2) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, u bilo kojoj točki $x_0 \in \mathscr{D}_f$;

3) $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, u bilo kojoj točki $x_0 \in \mathscr{D}_f$.

3. Pokaži da je nagib tangente u točki (x_0, y_0) na grafu funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ jednak $2ax_0 + b$.

4. Odredi jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = 2x^2$ u točki $(2, 8)$.

5. Odredi jednadžbu tangente na parabolu $y = x^2$ koja je paralelna s pravcem $y = -4x$.

6. Odredi jednadžbu tangente na parabolu $y = x^2 + 2x - 3$ u točki s apscisom $x = 1$.

7. U kojoj točki je tangenta na parabolu $y = x^2 + 2$ paralelna s x-osi?

8. Odredi jednadžbu tangente parabole $y = x^2 - x + 3$ koja je paralelna pravcu $y = 2x - 1$. Koje su koordinate dirališta?

9. Kako glasi jednadžba tangente povučene na parabolu $y = -x^2 + x + 3$ u njezinoj točki $T(-1, y)$?

10. U kojoj se točki sijeku tangente položene na parabolu $y = \frac{1}{2}(x-1)^2$ u njezinim točkama s apscisama -1 i 2?

11. U kojoj točki parabole $y = x^2 - 2x + 5$ treba postaviti tangentu koja je okomita na pravac $x - y = 0$?

12. Napiši jednadžbu tangente na parabolu $y = x^2$ ako tangenta prolazi točkom $T(2, 3)$.

13. Neko se tijelo giba po zakonu $s(t) = 4t - t^2$. Koliki put ovo tijelo prijeđe u vremenu od $t = 1$ s do $t = 1.5$ s? Odredi srednju brzinu gibanja u tom intervalu.

14. Tijelo se giba jednoliko po pravcu prema zakonu **a)** $s = 20 + 3t$; **b)** $s = 10 + 2t + 0.2t^2$, gdje je t vrijeme izraženo u sekundama, a s put u metrima. Kolika je:

1) srednja brzina u vremenskom intervalu [2,5];

2) srednja brzina u vremenskom intervalu [2,3];

3) trenutna brzina u trenutku $t = 2$?

15. Tijelo bačeno uvis brzinom $v_0 = 5$ m/s kreće se po zakonu $s(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$. U kojem je trenutku njegova brzina jednaka 2 m/s? U kojem je trenutku ona jednaka nuli? Kolikom će brzinom tijelo pasti na tlo?

16. Dizalo se nakon pokretanja giba po zakonu $s(t) = 1.5t^2 + 2t + 12$. Nađi trenutačnu brzinu dizala.